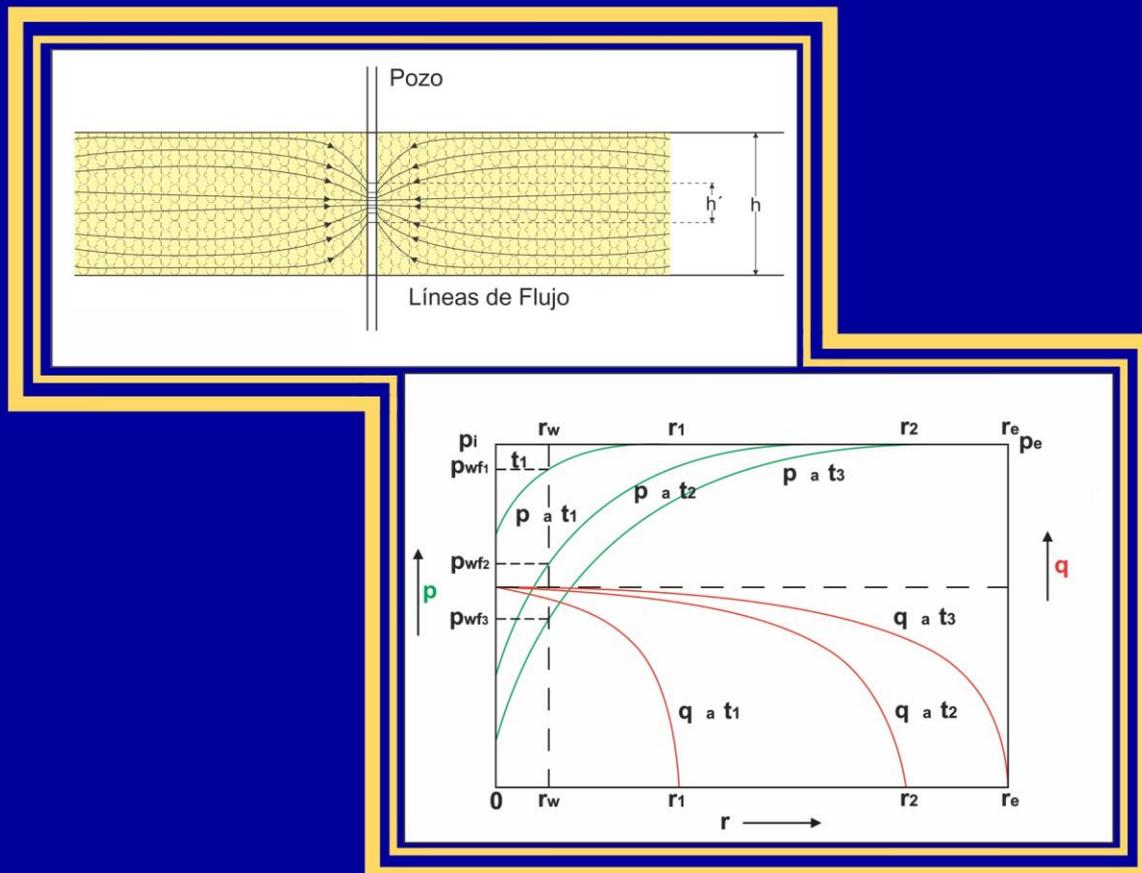




UNIVERSIDAD ESTATAL
PENÍNSULA DE SANTA ELENA

Flujo de Fluidos en Medios Porosos

Primera Edición



Ing. Gabriel J. Colmont M., Msc.

Ing. César I. Pinoargote R., Msc.

SERIE DE TEXTOS ACADÉMICOS DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

Flujo de Fluidos en Medios Porosos

1º Edición

Ing. Gabriel J. Colmont M., MSc.

Autor

Profesor Honorario, Universidad Estatal
Península de Santa Elena, UPSE

Ing. César I. Pinoargote R., MSc.

Co-autor

Docente Investigador, Universidad Estatal
Península de Santa Elena, UPSE

FICHA BIBLIOGRÁFICA

Colmont Moncayo, Gabriel Jorge
Pinoargote Rovello, César Iván

Flujo de Fluidos en Medios Porosos

1ª Edición

Editorial UPSE
ISBN 978-9942-776-03-7
223 paginas

FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

1º Edición

Este libro ha sido evaluado bajo el sistema de pares académicos y mediante la modalidad de doble ciego.

Portada: Gerardo Villón Domínguez

No está permitida la reproducción total o parcial de esta obra ni su tratamiento o transmisión por cualquier medio o método sin autorización escrita de los autores.



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO I	3
INTRODUCCIÓN AL FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS	3
1.1. DIFERENCIA ENTRE RESERVORIO, YACIMIENTO, POZO Y ÁREA DE DRENAJE DE UN POZO.	3
1.2. CLASIFICACIÓN DEL FLUJO DE FLUIDOS EN UN MEDIO POROSO.	6
1.- LA CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA DEL FLUJO.	6
2.- DE ACUERDO A LA COMPRESIBILIDAD DE LOS FLUIDOS.	9
3.- DE ACUERDO A LA VARIACIÓN ESPACIAL DE LA COMPOSICIÓN Y PROPIEDADES DE LA ROCA.	11
4.- DE ACUERDO A LA VARIACIÓN DEL CAUDAL AL POZO, Q_w , Y LA PRESIÓN AL POZO, P_{wf} , CON RESPECTO AL TIEMPO.	13
1.3. MODELO DE FLUJO SEGÚN LA FRONTERA EXTERIOR DEL YACIMIENTO.	14
1. YACIMIENTO CERRADO (VOLUMÉTRICO)	14
2. YACIMIENTO ABIERTO (CON EMPUJE HIDRÁULICO)	24
1.4. PERFILES DE LAS PRESIONES EN EL YACIMIENTO	28
1. FLUJO SEUDOCONTINUO (DEL INGLÉS SEMI-STEADY STATE (SSS))	28
2. FLUJO CONTINUO O STEADY STATE (SS)	31
CAPÍTULO II	36
LA LEY DE DARCY Y SUS APLICACIONES	36
2.1. LA LEY DE DARCY	36
2.2. SIGNIFICADO DE ΔH	39
2.3. ECUACIÓN DE DARCY	41
2.4. CONVENCION DE SIGNO	43
A. FLUJO LINEAL	43
B. FLUJO RADIAL	44
2.5. UNIDADES DE CONVERSIÓN	44
A. UNIDADES DARCY	45
B. UNIDADES DE CAMPO	47
2.6. POTENCIAL REAL DEL GAS	53
2.7. PRESIÓN AL PLANO DE REFERENCIA O DATUM	54
2.8. SISTEMAS DE FLUJO CONTINUO	58
2.9. ECUACIÓN DE FLUJO PARA FLUIDO INCOMPRESIBLE, FLUJO CONTINUO	60
A. FLUJO LINEAL.	60
B. FLUJO RADIAL	62
2.10. APLICACION DE LA ECUACIÓN DE DARCY A UN LÍQUIDO LIGERAMENTE COMPRESIBLE, FLUJO CONTINUO.	65
2.11. ECUACIONES DE FLUJO PARA FLUIDO COMPRESIBLE (GAS), FLUJO CONTINUO.	73

A. FLUJO LINEAL, HORIZONTAL (NO TURBULENCIA, SI CUMPLE LA LEY DE DARCY)	73
B. FLUJO RADIAL, HORIZONTAL	76
2.12. ESTRATOS EN SERIE, FLUJO CONTINUO	76
A. FLUJO LINEAL	76
B. FLUJO RADIAL	78
2.13. ESTRATOS EN PARALELO, FLUJO CONTINUO	78
A. FLUJO LINEAL	78
B. FLUJO RADIAL	79
2.14. EFECTO DE PIEL (SKIN EFFECT) O EFECTO DE DAÑO	79
INCLUSIÓN DE S EN ECUACIÓN PARA FLUIDO COMPRESIBLE (GAS)	82
ANÁLISIS DEL SIGNO DE S	83
CAPITULO III	99
LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD PARA LÍQUIDO LIGERAMENTE COMPRESIBLE	99
3.1. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL RADIAL BÁSICA DE FLUJO EN MEDIOS POROSOS EN UNIDADES DE CAMPO, USADA PARA MODELAR SISTEMAS DE FLUJO DEPENDIENTES DE TIEMPO.	99
3.2. COMPRESIBILIDAD Y ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD	102
NOTAS SOBRE LA COMPRESIBILIDAD	105
3.3. SOLUCIONES EXACTAS DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD RADIAL	108
A. YACIMIENTOS CILÍNDRICOS CERRADOS, CON Q AL POZO CONSTANTE.	110
A1. CONDICIONES DE FRONTERA E INICIAL	110
A.2. VARIABLES ADIMENSIONALES	112
A.3. SOLUCIÓN ANALÍTICA	114
B. YACIMIENTOS CILINDRICOS ABIERTOS.	116
B.1. CONDICIONES DE FRONTERA E INICIAL	116
B.2. SOLUCIÓN ANALÍTICA	116
CAPÍTULO IV	119
SOLUCIONES PRÁCTICAS DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD	119
4.1. YACIMIENTO INFINITO:	120
4.1.1. SOLUCIÓN PARA EL PERÍODO DE FLUJO TRANSITORIO TEMPRANO (YACIMIENTO ∞).	120
4.1.2. USO DE LA APROXIMACIÓN LOGARÍTMICA DE E_1 PARA YACIMIENTO INFINITO	124
4.1.3. FUNCIÓN DE LA DERIVADA DE PRESIÓN	134
4.1.4. DURACIÓN DE LA ACTUACIÓN DEL YACIMIENTO COMO INFINITO O DEL PERÍODO DE FLUJO TRANSIENTE TEMPRANO.	135
4.1.5. SOLUCIÓN PARA EL TRANSIENTE TARDÍO	137
4.2. YACIMIENTO FINITO (CERRADO)	138
4.2.1. SOLUCIÓN PARA EL ESTADO SEUDOCONTINUO	138
4.2.2. DEFINICIÓN DE $(p_i - \bar{p})$ Y $\bar{p}_D(r_{eD}, t_D)$	139
4.2.3. OTRAS RELACIONES DE LA ECUACIÓN DE FLUJO DE ESTADO SEUDOCONTINUO	141
4.2.4. FUNCION DE LA DERIVADA DE PRESION	142

4.2.5. RESUMEN	142
4.2.6. ÍNDICE DE PRODUCTIVIDAD	144
4.2.7. TIEMPO DE INICIO DE FLUJO DE ESTADO SEUDOCONTINUO	145
4.2.8. BREVE ANÁLISIS DE LOS LÍMITES DE LA APLICACIÓN DE LA SOLUCIÓN FUNCIÓN-EI Y DE LA SOLUCIÓN DE FLUJO SEUDOCONTINUO.	145
4.3. PERMEABILIDAD Y EXTENSIÓN DE LA ZONA DAÑADA O ESTIMULADA	152
4.3.1. INCLUSION DEL FACTOR DE DAÑO O DE PIEL, “S”, EN	154
A. SOLUCIÓN DEL FLUJO TRANSIENTE TEMPRANO CONSIDERANDO “S”	154
B. SOLUCIÓN DEL FLUJO SEUDOCONTINUO CONSIDERANDO “S”.	156
4.3.2. EFICIENCIA DE FLUJO	157
4.3.3. RADIO APARENTE	158
4.4. YACIMIENTOS ABIERTOS $\left(\frac{\partial P}{\partial r}_{r=r_e} \neq 0\right)$ Y $\left(\frac{\partial p}{\partial t}_{t>t_s} = 0\right)$.	159
CAPITULO V	172
INTRODUCCION A PRUEBA DE POZOS	172
5.1 PRUEBAS DE DECLINACIÓN DE PRESIÓN (DRAWDOWN).	172
5.2. RADIO DE INVESTIGACIÓN	177
5.3. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION	182
1.SUPERPOSICIÓN EN ESPACIO	183
2.SUPERPOSICIÓN EN TIEMPO	186
5.4. ALMACENAMIENTO DE POZO (WELLBORE STORAGE) O EFECTO DE LLENE^{2,11,12}	189
5.5. COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO	191
5.6. TASA DE FLUJO DEBIDO AL ALMACENAMIENTO	193
5.7. CONDICIÓN DE FRONTERA CONSIDERANDO ALMACENAMIENTO	193
5.7.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	194
5.7.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA	195
5.8. RESPUESTA DE PRESIÓN DE FONDO DOMINADA POR ALMACENAMIENTO	196
APÉNDICE A	205
VALORES DE LA INTEGRAL EXPONENCIAL $-E_i(-X)$	205
FACTOR DE FORMA PARA VARIAS AREAS DE DRENAJE CON UN SOLO POZO	207
APENDICE B	209
FLUJO RADIAL EN EL RESERVORIO HACIA UN POZO DE RADIO r_w , EN UN YACIMIENTO HOMOGÉNEO QUE ACTÚA COMO SI FUERA INFINITO $((r_e \rightarrow \infty))$.	209
APÉNDICE C	215
LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD Y SU SOLUCIÓN CONSIDERANDO EFECTOS DE ALMACENAMIENTO (C) DEL POZO Y DE PIEL O DAÑO (S).	215

INTRODUCCIÓN

Estos apuntes sobre el Flujo de Fluidos en Medios Porosos han sido escritos principalmente para estudiantes de pre-grado de Ingeniería en Petróleos como disciplina fundamental del área de ingeniería de yacimientos e ingeniería de producción. También están dirigidos a ingenieros, educadores y profesionales, deseosos de contar con un material de apoyo donde se presentan conceptos fundamentales relacionados con el flujo en el yacimiento, como base para un mejor análisis e interpretación de pruebas de presión transitoria en pozos que producen crudo, gas y/o agua.

Para estudiar el sistema pozo-yacimiento es conveniente construir modelos representativos de modo que, a través de estos y de la medición de la evolución de la presión en el yacimiento en función del tiempo de producción, podamos inferir ciertas propiedades claves del yacimiento y del pozo para mejorar la gestión de la producción. Los modelos pueden ser físicos o matemáticos. En estos apuntes presentamos los modelos matemáticos traducidos en ecuaciones diferenciales parciales y sus soluciones, que representan el flujo de fluidos en el yacimiento hacia el pozo.

Iniciamos, en los dos primeros capítulos, con la diferenciación entre roca reservorio, yacimiento de hidrocarburos y área de drenaje de un pozo; clasificación de los tipos de flujo en el medio poroso; una presentación breve de cómo se comporta la presión en el yacimiento una vez que el pozo es abierto a producción; y, presentamos la descripción, análisis y ejemplos de aplicación de la Ley de Darcy. En el Capítulo III y IV derivamos la ecuación diferencial de la difusividad para flujo radial de un líquido ligeramente compresible en un medio que actúa como homogéneo, en términos de variables reales y adimensionales; y, examinamos posteriormente las condiciones inicial y de fronteras así como las soluciones analíticas exactas y, en particular, las soluciones aproximadas, prácticas y útiles en la interpretación de pruebas de presión transitoria en pozos. También revisamos el concepto de Factor de Piel (S) o de daño alrededor del pozo y la forma de incluirlo en las soluciones de la ecuación de difusividad. Finalmente, en el Capítulo V, revisamos el concepto de radio de investigación, el principio de superposición y el fenómeno de almacenamiento de pozo. Dado el propósito de estos apuntes, se incluye algunos ejercicios orientados a fijar los conceptos importantes y algunos ejemplos de aplicación de las soluciones a la ecuación de difusividad orientados al análisis del comportamiento de la presión en el yacimiento.

Estos apuntes provienen de una recopilación de material seleccionado de diferentes textos, libros, documentos técnicos, artículos de revistas y curso de actualización realizados por el autor durante su vida profesional. Por la experiencia docente del autor por muchos años de dictar los cursos Flujo en Medios Porosos y Análisis de Prueba de Pozos en la Facultad de Ingeniería en Ciencias de la Tierra de la ESPOL, la recopilación bibliográfica ha sido estructurada, ilustrada y abonada procurando que esta pueda ser comprendida de la mejor manera por los estudiantes, al mismo tiempo que profesionales también puedan beneficiarse de los fundamentos teóricos para un mejor análisis e interpretación de las respuestas de las pruebas de pozos. El co-autor, exalumno del autor y ahora profesor de los mismos cursos que utilizan estos conceptos en la carrera de ingeniería en petróleo de la Universidad Estatal Península de Santa Elena-UPSE, ha revisado, mejorado y actualizado junto con el autor el original de los Apuntes.

Las mejoras en claridad, presentación y consistencia introducidas en los borradores de estos apuntes se las debemos a nuestros calificados pares. Siendo una primera edición, seguramente contendrá algunos errores que se habrán filtrado a las revisiones efectuadas, por lo que pedimos disculpas y declaramos que dichos errores son de exclusiva responsabilidad nuestra. Por la retroalimentación que recibamos de los críticos lectores, lo que nos permitirá introducir mejoras en las próximas revisiones, anticipamos a ellos nuestros sinceros agradecimientos. No quisiéramos terminar esta introducción sin reconocer a las autoridades de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la UPSE por las motivaciones brindadas que nos hicieron continuar adelante y cumplir con el objetivo trazado y, por las facilidades brindadas para la impresión. También quisiéramos agradecer a Gerardo Villón Domínguez, estudiante del último nivel de la carrera de ingeniería en petróleo de la UPSE quien se encargó de la escritura en word, reescritura por varias veces, reestructuración, preparación de las figuras, valiosos comentarios sobre la forma y contenido, y muchos otros aportes importantes.

Ing. Gabriel J. Colmont M., MSc.
Profesor Honorario UPSE
Autor
gabrielcolmont@hotmail.com

Ing. César I. Pinoargote R., MSc.
Profesor Titular UPSE
Co-autor
cpinoargote@upse.edu.ec

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN AL FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

1.1. DIFERENCIA ENTRE RESERVORIO, YACIMIENTO, POZO Y ÁREA DE DRENAJE DE UN POZO.

Para el propósito de la elaboración de los modelos y análisis del comportamiento del flujo y presión en un medio poroso que se sigue en estos apuntes, es importante ponernos de acuerdo en identificar, diferenciar y emplear correctamente los términos reservorio, yacimiento, pozo y área de drenaje de un pozo. En la figura 1.1 se muestra un corte lateral de una sección geológica (estructura anticlinal) con varios cuerpos de rocas sedimentarias (estratos o capas de roca), en el cual se identifica con color negro la zona correspondiente al yacimiento de petróleo. Se observa que, en este caso, el yacimiento se encuentra en contacto con un acuífero. La sección geológica se encuentra además atravesada por los pozos verticales 11 EC y 6 EC, tal como se detalla a continuación:

- Pozo 11 EC: no atraviesa el yacimiento de petróleo, pero si el reservorio que contiene un acuífero.
- Pozo 6 EC: atraviesa el yacimiento de petróleo y, si el pozo se profundizara, también atravesaría el acuífero, ambos dentro de mismo reservorio.

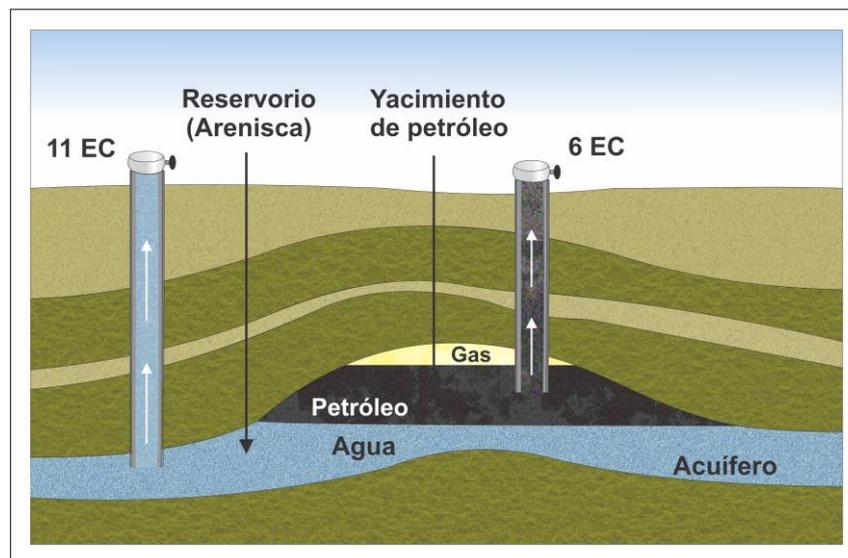


Figura 1.1: Sección esquemática que muestra pozos verticales atravesando un estrato plegado conteniendo gas, petróleo y agua.

Definiciones.

Reservorio es la roca capaz de almacenar fluidos. Un reservorio puede contener hidrocarburos (petróleo y/o gas) y agua.

Yacimiento es la sección del reservorio que contiene hidrocarburos (petróleo y/o gas). La zona del reservorio que contiene petróleo se denomina **yacimiento de petróleo**. En el caso de la figura 1.1, el yacimiento de petróleo tiene una capa de gas o gorro/sombrero de gas (del inglés “gas cap”) asociada es decir, el petróleo se encuentra a una presión de su punto de saturación. Si la zona del reservorio contuviera mayoritariamente gas se denominaría **yacimiento de gas**.

Acuífero es la sección del reservorio que contiene agua de formación.

Pozo se refiere al agujero perforado que atraviesa los diferentes estratos o capas de roca. Un pozo puede ser productor si produce fluidos de interés (petróleo o gas natural) o pozo seco si no produce fluidos de interés. Un pozo seco podría producir solo agua pero, será llamado pozo seco del fluido de interés.

Emplear terminología en idioma inglés es una práctica común en la ingeniería en petróleo. A menudo existen errores o confusión al momento de realizar la traducción al idioma español o viceversa. Por lo tanto, es necesario señalar la diferencia entre el término *reservoir* en inglés y su traducción *reservorio* en español.

El término **reservoir** en la industria petrolera se traduce muchas veces como **yacimiento** en español. Un “oil reservoir” es un yacimiento de petróleo, mientras que un “gas reservoir” es un yacimiento de gas. En español y en el presente texto, se entenderá la palabra reservorio tal como se definió previamente.

La figura 1.2 corresponde a un mapa de isopacas o mapa de contornos. Un mapa de isopacas o de contornos son un conjunto de líneas o contornos que unen puntos de igual espesor del yacimiento y nos permite obtener una proyección 2D de la vista en planta del volumen del yacimiento. El área dentro de cada contorno multiplicada por el espesor promedio entre dos contornos consecutivos, nos dará un volumen de roca del yacimiento, el cual al multiplicarlo por la porosidad efectiva y saturación de petróleo promedios de dicha sección, obtendremos el volumen de petróleo en ese cuerpo parcial de roca. La suma de los sucesivos volúmenes así calculados nos dará una aproximación del volumen total de petróleo “in situ”, contenido en el yacimiento.

En el mapa de isopacas o de contornos de la figura 1.2, la línea cortada o de donde empieza el rayado, corresponde al contorno cero de espesor del yacimiento de petróleo, esto es en nuestro caso el contacto petróleo/agua (“oil/water contact”). Mientras que la zona rayada corresponde al yacimiento de petróleo. El área no rayada corresponde a un acuífero asociado con el yacimiento. Las curvas 0, 20, 40, 60, generalmente en pies, corresponden a los contornos de igual espesor del yacimiento de petróleo.

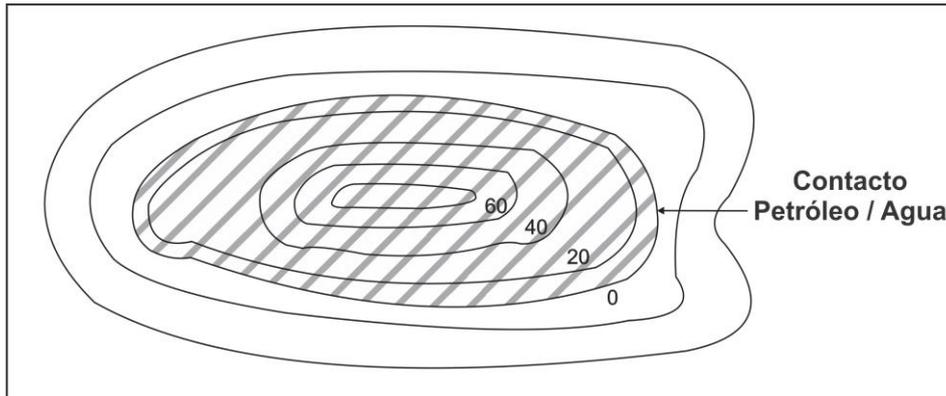


Figura 1.2: Mapa de isopacas o de contornos. Vista superior.

La figura 1.3 muestra el área de drenaje de un pozo y los pozos considerados productores y no productores con su leyenda correspondiente. Se emplea un círculo relleno de color negro para denotar a los pozos productores de petróleo y un círculo blanco para los pozos secos (no producen petróleo).

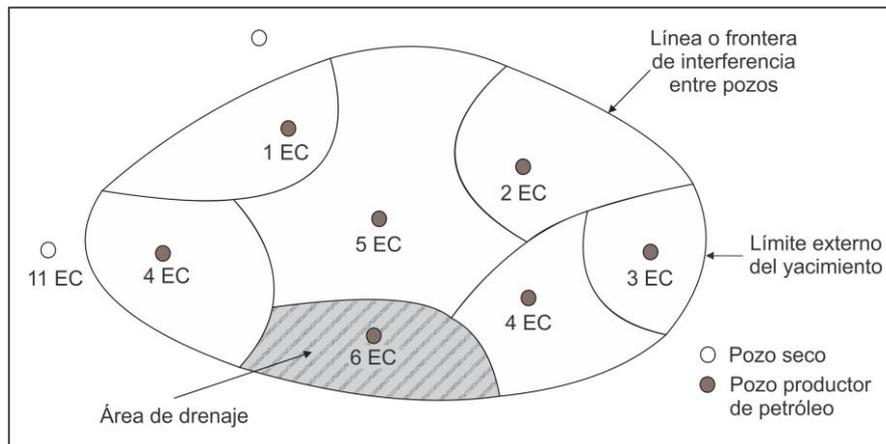


Figura 1.3: Área de drenaje del pozo 6 EC (rayada) en un yacimiento desarrollado.

Por ejemplo, se observa en la figura 1.3, que el pozo 6 EC es un pozo productor, mientras que el pozo 11 EC es un pozo seco (Véase también la figura 1.1). El área rayada es el *área de drenaje* del pozo 6 EC.

Cuando los pozos de un yacimiento desarrollado (varios pozos perforados, productores y con facilidades de producción) son puestos a producir, los fluidos fluyen hacia los pozos, cada instante desde una distancia más lejana hasta que se establece una “línea” de interferencia entre un pozo y sus vecinos, configurándose así el *área de drenaje* de un pozo.

1.2. CLASIFICACIÓN DEL FLUJO DE FLUIDOS EN UN MEDIO POROSO.

Una clasificación del sistema de flujo en un medio poroso es presentada por Craft and Hawkins¹, la que toma en cuenta la geometría del flujo; el tipo del fluido; la variación espacial de la composición y propiedades de la roca; y, la variación del caudal al pozo, q_w , y la presión al pozo, p_{wf} , con respecto al tiempo. Un cabal conocimiento de las características de cada caso de esta clasificación nos permitirá modelar, sea analítica o numéricamente, el comportamiento de las diferentes situaciones que resultan, ya sea en relación con la vecindad del pozo, el pozo mismo, el yacimiento y sus fronteras^{2,3,4}. Estos modelos generalmente son utilizados en el análisis de pruebas de pozos para encontrar los parámetros importantes que caracterizan dinámicamente al sistema pozo/yacimiento.

1.- La configuración geométrica del flujo.

- **Flujo lineal:** se produce cuando las líneas de flujo son paralelas y atraviesan un plano perpendicular; por ejemplo, líneas de flujo que atraviesan un plano perpendicular en un modelo de prisma con base rectangular del yacimiento-figura 1.4a o, flujo lineal en la formación hacia una fractura hidráulica, figura 1.4b; o, flujo lineal dentro de una fractura hidráulica hacia el pozo, figura 1.4c.

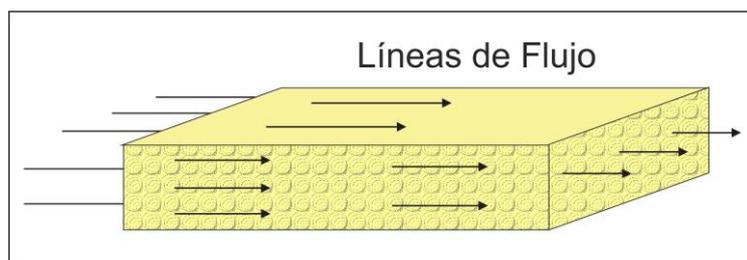


Figura 1.4, a: Flujo lineal en el yacimiento.

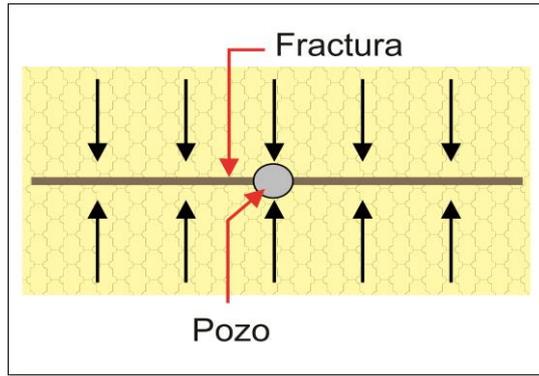


Figura 1.4, b: Flujo lineal en la formación hacia la fractura hidráulica.

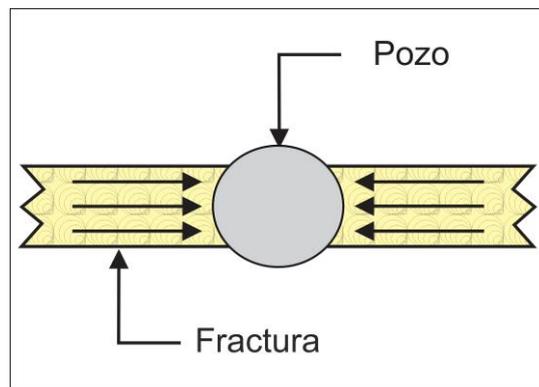


Figura 1.4, c: Flujo lineal dentro de la fractura hacia el pozo.

- **Flujo esférico:** se produce principalmente cerca del pozo cuando los disparos (cañoneo) para poner en contacto al pozo con la arena productora no cubren el espesor total h de la arena, sino la parte central. En la figura 1.5 se observa que la producción se realiza a través del espesor h' (sección disparada) por lo que las líneas de flujo se aglutinan hacia los disparos.

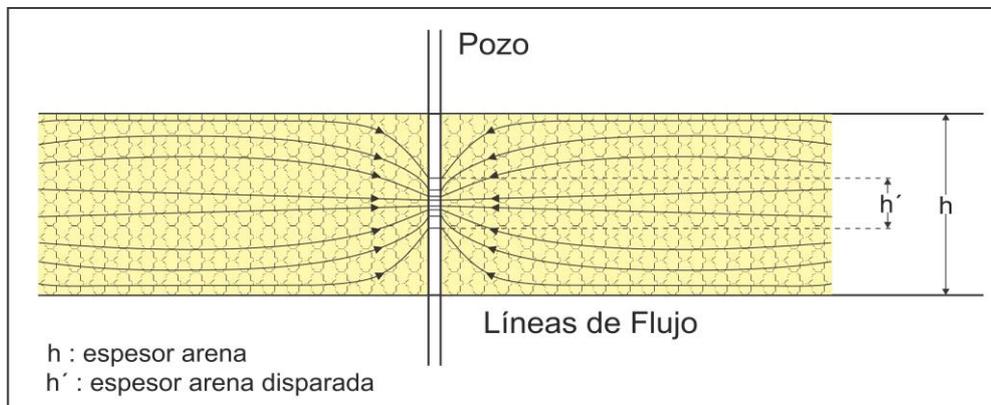


Figura 1.5: Flujo esférico.

- **Flujo radial:** se produce cuando los disparos se realizan en toda la sección h de la arena, por lo que $h' = h$.

En la figura 1.6 se muestra una vista frontal o lateral y una vista superior o en planta del flujo radial. Se observa que las líneas de flujo nacen desde un círculo exterior y se dirigen radialmente hacia el pozo en línea recta. Las líneas equipotenciales son aquellas que unen puntos del yacimiento que poseen la misma presión o el mismo potencial y, son ortogonales o perpendiculares a las líneas de flujo. Si el medio es homogéneo e isotrópico, estas líneas equipotenciales serán círculos concéntricos (más adelante se define a los medios).

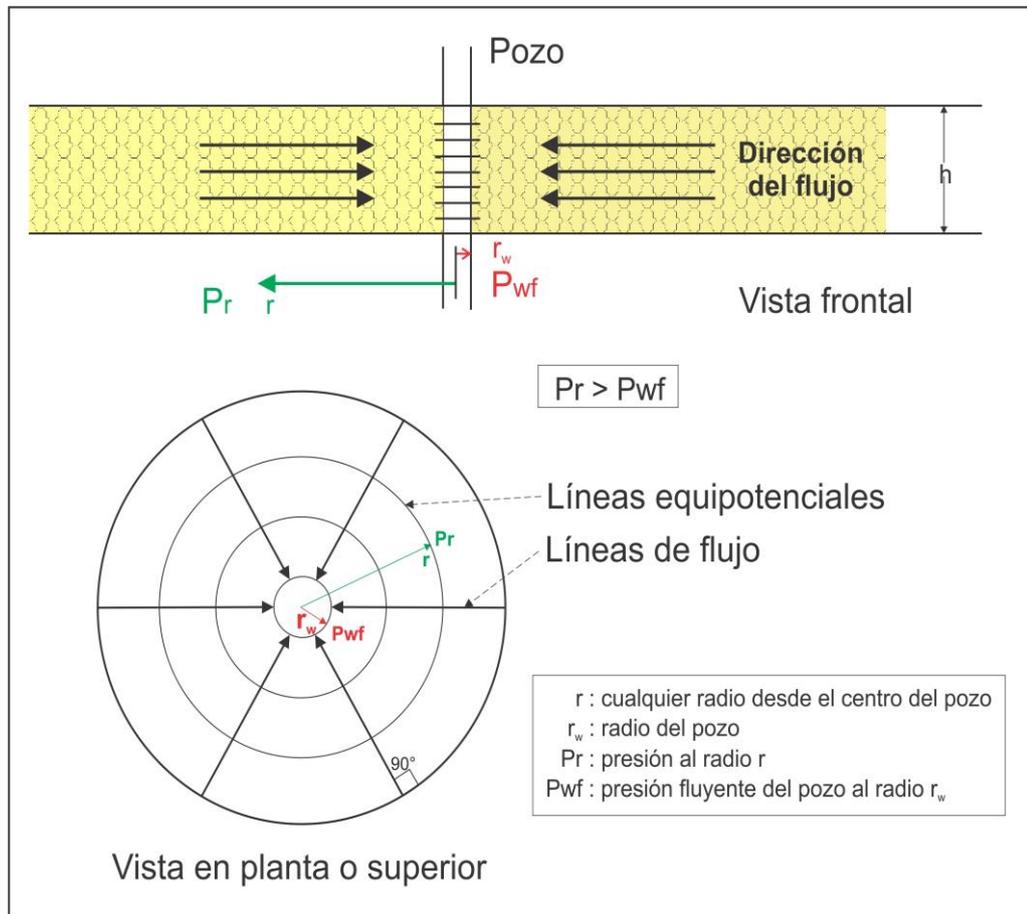


Figura 1.6: Flujo radial.

- **Flujo semiesférico:** se producen cuando los disparos se realizan en el tope o base de la arena productora, tal como se muestra en la figura 1.7.

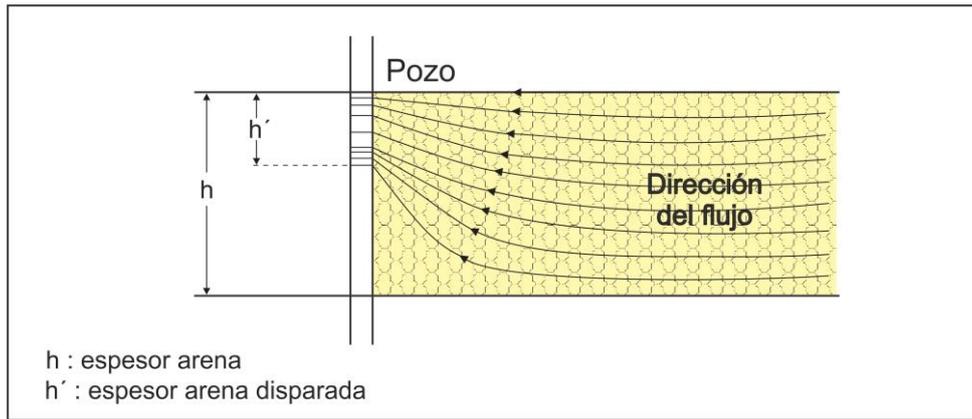


Figura 1.7: Flujo semiesférico.

2.- De acuerdo a la compresibilidad de los fluidos.

La compresibilidad de los fluidos se encuentra definida por:

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

Donde c es el coeficiente o módulo de elasticidad o de compresibilidad a temperatura constante y representa el cambio de volumen del material o fluido por unidad de volumen por cada unidad de variación de la presión.

En la figura 1.8, se observa un cilindro lleno con un determinado material o fluido compresible. El fluido es sometido a una presión P_1 en el laboratorio. Es obvio que la forma que toma el material contenido en el cilindro es la de un cilindro de material. Se mide el volumen V_1 del cilindro de material o fluido contenido en el cilindro. En un segundo instante, se incrementa la presión de P_1 a P_2 y se mide el nuevo volumen del cilindro de material dado (V_2). Se continúa el procedimiento, incrementando la presión ejercida sobre el material y registrando los nuevos volúmenes que adquiere el cilindro de material bajo diferentes presiones.

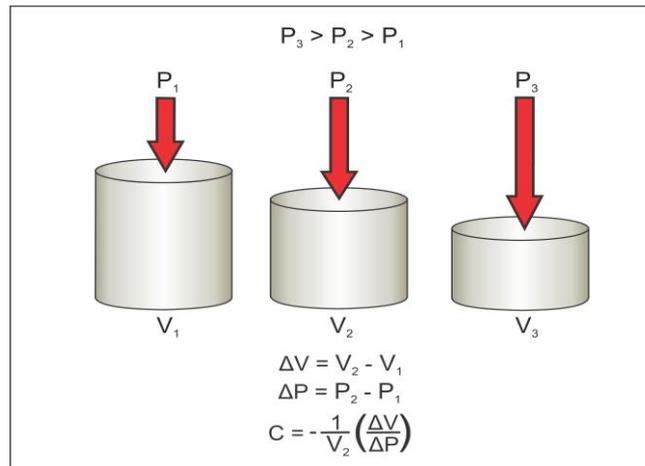


Figura 1.8: Cilindro de un material o fluido sometido a diferentes presiones en el laboratorio.

La figura 1.9 (volumen V vs. presión P) se elabora con los diferentes datos de volumen y presión registrados en el laboratorio tal como se explicó en la figura anterior. Las líneas A, B y C de la figura 1.9 representan cualitativamente los diferentes volúmenes que experimenta un cilindro de diferentes materiales o fluidos cuando estos son sometidos a diferentes presiones.

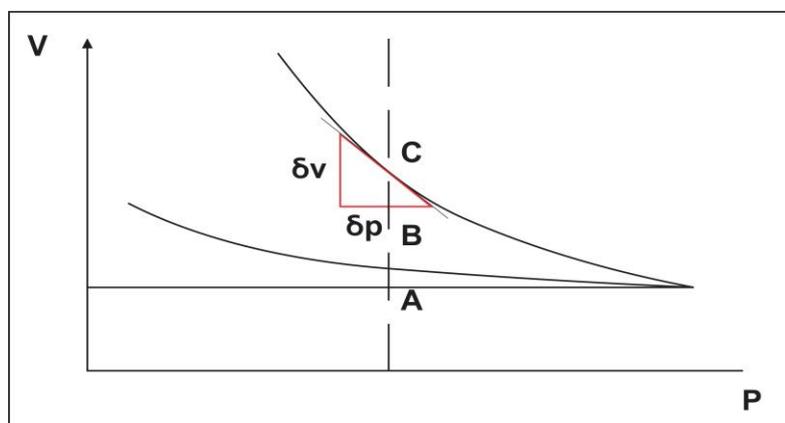


Figura 1.9: Compresibilidad de los fluidos.

- **Fluido incompresible**

Para un fluido incompresible (línea A de figura 1.9.), se observa que a medida que se incrementa la presión ejercida sobre el cilindro de fluido, el volumen del mismo permanece constante (no decrece). Es decir, la variación del volumen con respecto al cambio de presión ejercida es igual a cero.

En este tipo de fluido tenemos que $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = 0$

Ej.: el agua

- **Fluido ligeramente compresible**

Para un fluido ligeramente compresible (línea B de figura 1.9.), se observa que a medida que se incrementa la presión ejercida sobre el cilindro de fluido, el volumen del mismo decrece. Sin embargo, la reducción de volumen que experimenta el fluido a medida que se incrementa la presión ejercida sobre el mismo, es inferior que para un fluido compresible.

En este tipo de fluido tenemos que $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) =$ pequeño (negativo)

Ej.: el petróleo

- **Fluido compresible**

Para un fluido o material compresible (línea C de figura 1.9.), se observa que a medida que se incrementa la presión ejercida sobre el cilindro de material, el volumen del mismo decrece en mayor proporción que para un material o fluido ligeramente compresible, cuando es sometido al mismo incremento de presión.

En este tipo de fluido tenemos que $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) =$ grande (negativo)

Ej.: el gas

Tabla 1. 1 Rangos de compresibilidad comunes de los principales componentes de los yacimientos^{5,6,7,8} . Los subíndices g, o, w y f se refieren al gas, petróleo, agua y formación, respectivamente.

COMPONENTE	RANGO DE COMPRESIBILIDAD	COMPRESIBILIDAD TÍPICA
c_g	49 x 10 ⁻⁶ – 211 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹ @ 4978 # 914 x 10 ⁻⁶ – 1266 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹ @ 1000 #	200 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹
c_o	4.9 x 10 ⁻⁶ – 100 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹	10 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹
c_w	2.1 x 10 ⁻⁶ – 4.2 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹	3 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹
c_f	2.8 x 10 ⁻⁶ – 10 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹	5 x 10 ⁻⁶ psi ⁻¹

3.- De acuerdo a la variación espacial de la composición y propiedades de la roca.

Según la composición de la roca, el medio puede ser:

- Homogéneo. - una capa o estrato de roca se considera homogéneo cuando su composición es invariable o casi en el espacio o cuando un segundo material se distribuye o esparce en forma uniforme o pareja en todo el estrato.

Ej.: en la parte izquierda de la figura 1.10 se observa que rastros o fragmentos de lutitas o arcilla se distribuyen en forma homogénea en todo el estrato de arenisca.

- Heterogéneo. - una capa o estrato de roca se considera heterogéneo cuando aparecen intercalaciones de un segundo material rocoso en el estrato. Es decir, contiene capas de diferentes composiciones.

Ej.: en la parte derecha de la figura 1.10 se observa una intercalación considerable de lutitas atravesando al estrato de arenisca.

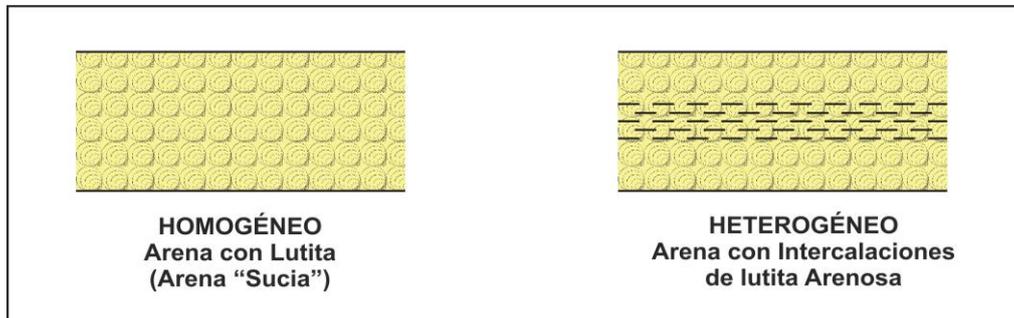


Figura 1.10.- Formación homogénea y heterogénea.

Según las propiedades de la roca, el medio puede ser:

- Isotrópico: cuando sus propiedades no varían en el espacio, es decir:

$$k_x = k_y = k_z$$

- Anisotrópico: sus propiedades varían en el espacio, es decir:

$$k_x \neq k_y \neq k_z$$

$$\Phi_x \neq \Phi_y \neq \Phi_z$$

donde:

Φ : porosidad

k_x es la permeabilidad en la dirección x

k_y es la permeabilidad en la dirección y

k_z es la permeabilidad en la dirección z

Con el objetivo de ubicar presión, caudal y radio del pozo, se presenta la figura 1.11. Esta representa un diagrama de un sistema pozo-yacimiento con sus principales componentes. Nótese la ubicación del radio del pozo, r_w y radio externo del área de drenaje o frontera exterior del yacimiento, r_e .

Entonces, de los tipos de flujo descritos anteriormente, podemos ver que el flujo podría ser, por ejemplo: “FLUJO RADIAL, DE FLUIDO LIGERAMENTE COMPRESIBLE, EN MEDIO HOMOGÉNEO E ISOTRÓPICO, A TASA CONSTANTE AL POZO”.

1.3. MODELO DE FLUJO SEGÚN LA FRONTERA EXTERIOR DEL YACIMIENTO.

El tipo de frontera exterior del yacimiento (frontera abierta o cerrada) determinará el comportamiento del flujo en la misma, por lo tanto, influirá sobre el comportamiento de la presión en el yacimiento y finalmente sobre el modelo y ecuaciones que deban aplicarse como representativas del flujo en el yacimiento ⁹.

Según la presión en la frontera exterior, el yacimiento puede ser:

1. Yacimiento cerrado (Volumétrico)

Un yacimiento es considerado cerrado cuando no existe flujo a través de sus fronteras. Es decir, el caudal que atraviesa cualquiera de sus fronteras es igual a cero ($q_{a\ re} = 0$). Una frontera de no flujo puede producirse, por ejemplo, por efecto de una falla o una trampa estratigráfica como cambio en el tipo de roca (de arenisca a lutita, pinch out) También, en un yacimiento desarrollado, cuando los pozos son puestos a producir y los fluidos fluyen cada instante desde una distancia más lejana, hasta un momento en que para cada pozo se establece una “línea” de interferencia en el flujo entre el pozo y sus vecinos, configurándose así el *área de drenaje* de un pozo o frontera externa de no flujo. Ver figura 1.3.

Los yacimientos cerrados son denominados también **yacimientos volumétricos**.

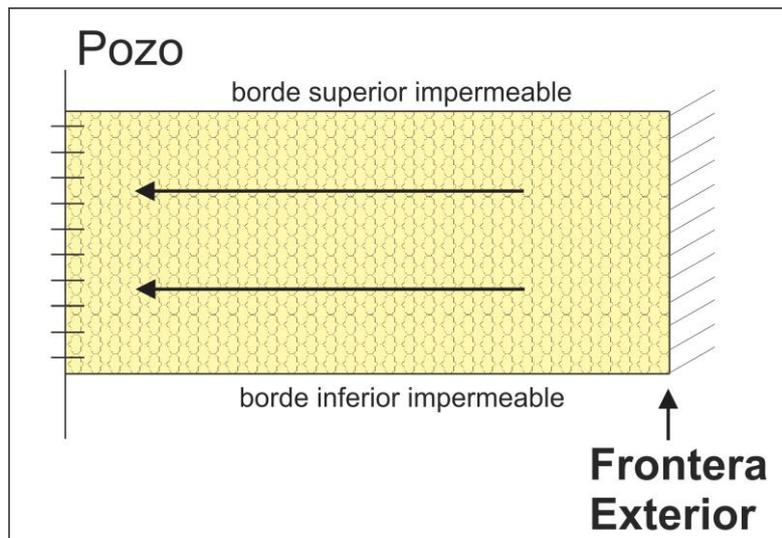


Figura 1.12: Modelo de Yacimiento cerrado: No hay flujo en frontera exterior.

En la figura 1.12 se muestra un esquema de yacimiento cerrado, donde las líneas de flujo se producen sólo en el interior del yacimiento y se dirigen hacia el pozo productor. La frontera exterior se ubica en el extremo derecho de la figura y no existe flujo a través de la misma. Para un $r > r_e$, no hay caída de presión y el flujo será cero, esto es:

$$\text{A la frontera exterior se tiene que, } \left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0, \text{ no flujo.}$$

En un yacimiento cerrado, al abrir el pozo a producción ocurren varios regímenes de flujo en función de la variación de la presión con respecto al tiempo. En la etapa inicial del flujo en el yacimiento cerrado, se tendrá un flujo de estado transitorio. Durante este tipo de flujo, la variación de la presión con tiempo en el yacimiento es cambiante. Algunos autores lo llaman *Flujo Radial de Actuación Infinita* (del inglés Infinite Acting Radial Flow- *IARF*). Este tipo de flujo dura hasta que el radio de drenaje hacia el pozo alcance la frontera más alejada del yacimiento. De ahí en adelante en el tiempo se tendrá *flujo de estado pseudo-continuo*. En este último estado, la variación de la presión con tiempo en el yacimiento es una constante. Más adelante explicamos en detalle estos regímenes de flujo.

Para una comprensión cabal de estos estados de flujo, supongamos un yacimiento circular horizontal, con el pozo en el centro que produce a tasa constante, flujo radial, fluido ligeramente compresible, medio homogéneo e isotrópico (figura 1.13).

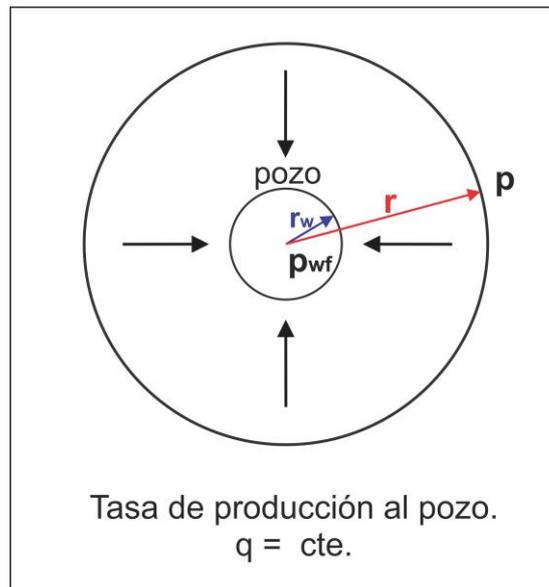


Figura 1.13: Modelo de yacimiento circular cerrado con pozo en el centro.

El comportamiento del flujo en el yacimiento de la figura 1.13 puede ser representado en el laboratorio empleando diez tubos o vasos llenos de fluido (agua) interconectados entre sí en la base inferior¹⁰, figura 1.14. En el extremo inferior izquierdo se conecta una válvula para el control del flujo y se emplea una escala para medir la altura del fluido en cada uno de los recipientes. La figura 1.14 representa el estado inicial ($t=0$) de no flujo, en el que se encuentra el yacimiento (válvula de control o producción cerrada).

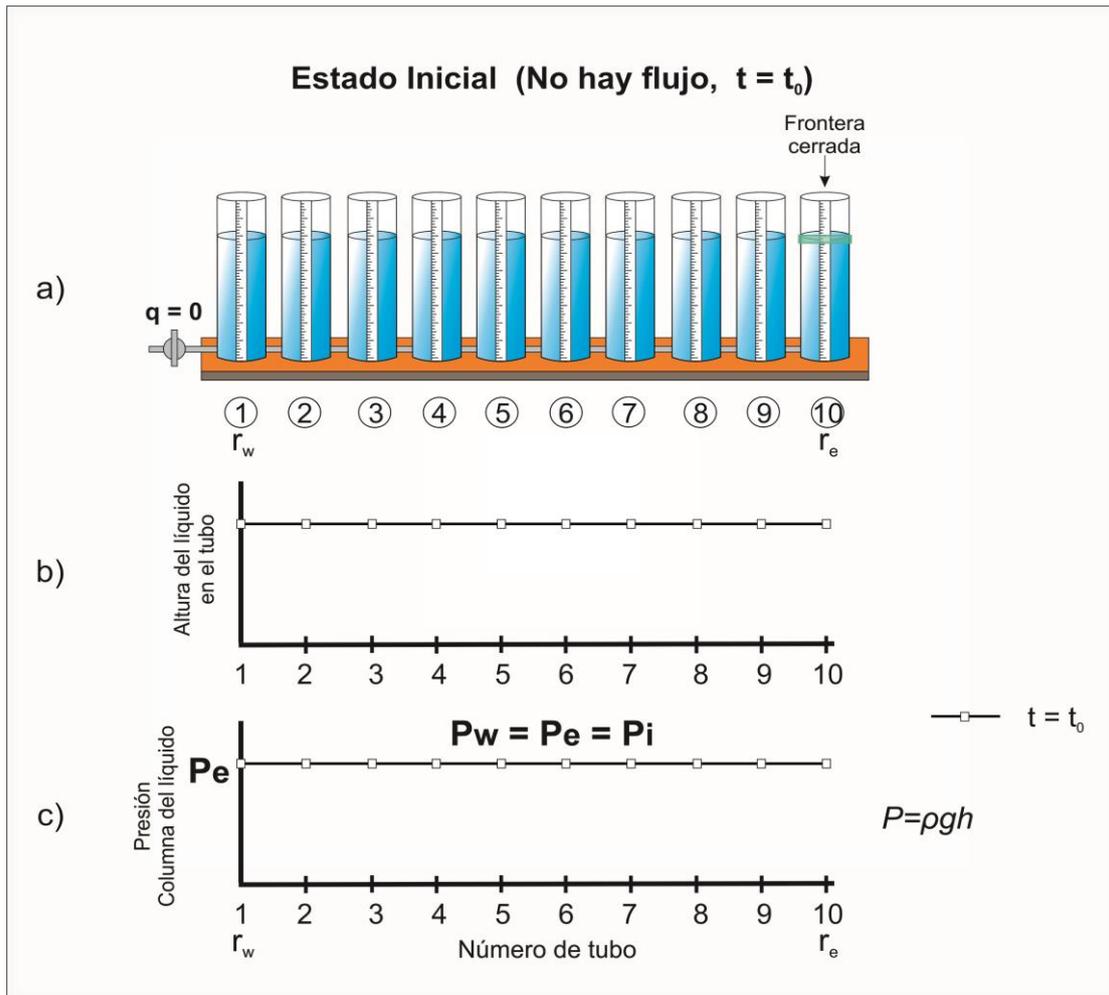


Figura 1.14: Modelo equivalente de flujo en el yacimiento al tiempo $t=0$. Nótese que la altura de líquido y presión en todos los tubos es la misma¹⁰.

En la figura 1.14, el tubo 1 se ubica a una distancia r_w del eje del pozo, mientras que el tubo 10 se ubica a un radio r_e del eje del mismo (radio externo o frontera del yacimiento). Dado que no hay flujo ($q = 0$) al tiempo inicial $t=0$, el nivel de fluido en todos los tubos es el mismo. Al mismo tiempo, la presión en todos los tubos, es decir, la presión a diferentes radios o puntos en el yacimiento se mantiene uniforme. Por lo tanto, la presión en el tubo 1 (P_w) es igual a la presión en el tubo 10 (P_e).

Dado que no se ha empezado a producir el yacimiento la presión P_e es igual a la presión inicial del yacimiento (P_i).

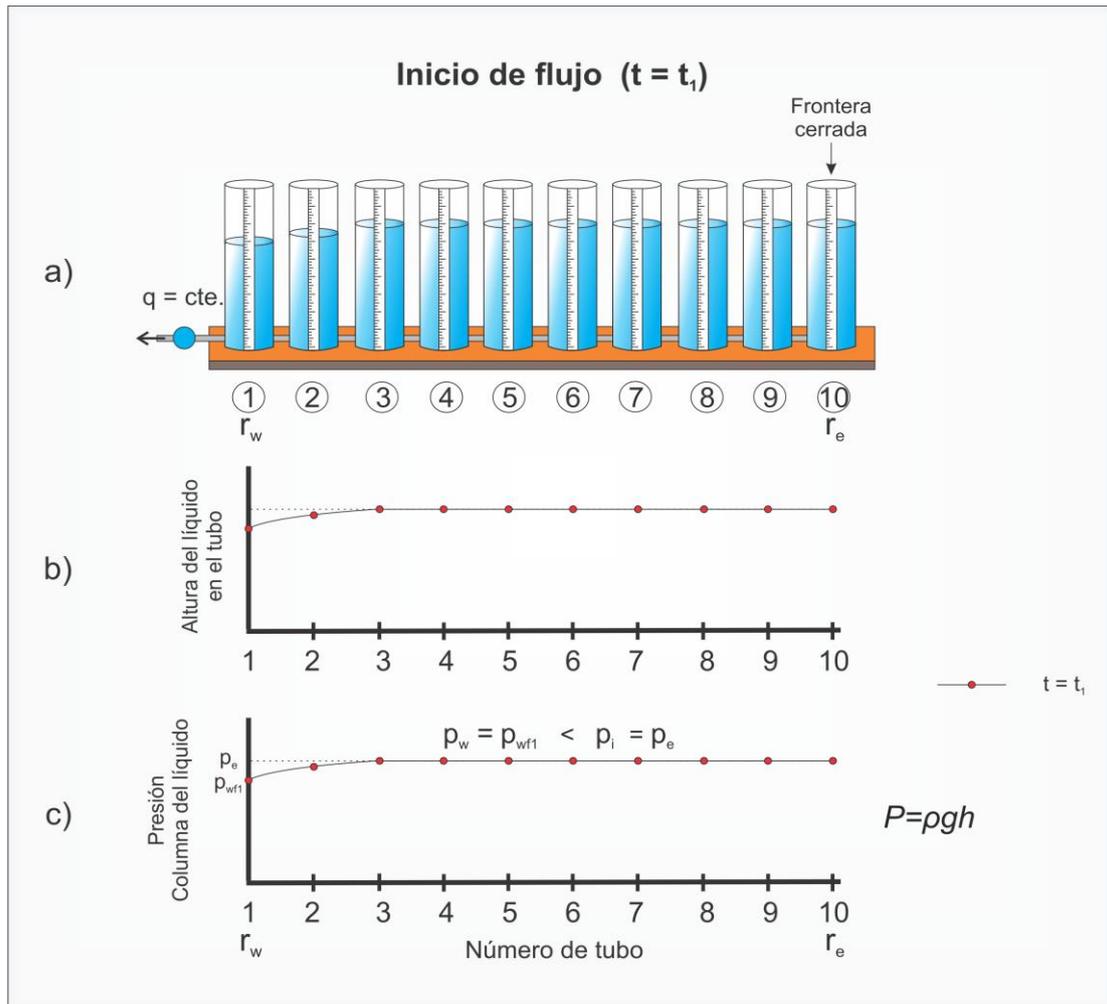


Figura 1.15: Inicio de flujo a tasa constante, tiempo $t=t_1$. Nótese que a ese tiempo, el área de drenaje abarca aproximadamente el “radio 3”.

En la figura 1.15, una vez abierta la válvula del pozo, se empieza a producir fluido del yacimiento, por lo tanto, se inicia el flujo de fluido en el medio poroso.

En los tubos 1 y 2 podemos observar una disminución del nivel del fluido debido a la producción por un tiempo $t=t_1$ (sección a de la figura). La sección b de la Fig. 1.15 representa una “foto” del perfil instantáneo de nivel en los tubos al instante t_1 . Al mismo tiempo, la presión en los tubos 1 y 2 disminuye (sección c de la figura que representa un perfil instantáneo de presión en el yacimiento al instante t_1). Una vez empezado el flujo, la presión en el tubo 1 (r_w) se denomina “Flowing well pressure” (P_{wf}) por sus siglas en inglés o presión de flujo al pozo, en español. Algunos técnicos suelen también llamarla presión fluyente al pozo.

Nótese que para que exista flujo en dirección hacia la izquierda de la figura siempre habrá una reducción de la presión en el tubo 1, es decir a P_{wf} , de valor menor a P_e , cosa que se produce al abrir la válvula a la izquierda del tubo 1. Por lo tanto, el fluido en el yacimiento fluye como consecuencia de una diferencia de presión desde la presión mayor de inicio P_e , hasta la presión menor P_{wf} al radio r_w del pozo. Es importante recordar que un fluido siempre fluye desde un punto de mayor presión a un punto de menor presión, para flujo horizontal. Para flujo inclinado hablamos de mayor potencial a menor potencial, que se trata en el Capítulo 2.

Si el flujo continúa y el tiempo transcurre, el nivel de fluido en los tubos 3, 4, 5, 6, etc., disminuirá hasta llegar al tubo 10, tal como se muestra en la figuras 1.16 para t_2 , t_4 y t_6 . Nótese también que la presión a una distancia cualquiera dada medida desde el pozo (o tubo 1) cambia con el tiempo de producción.

Por lo tanto, a medida que la producción de fluido continua, el flujo ocurrirá desde tubos o distancias cada vez más lejanas.

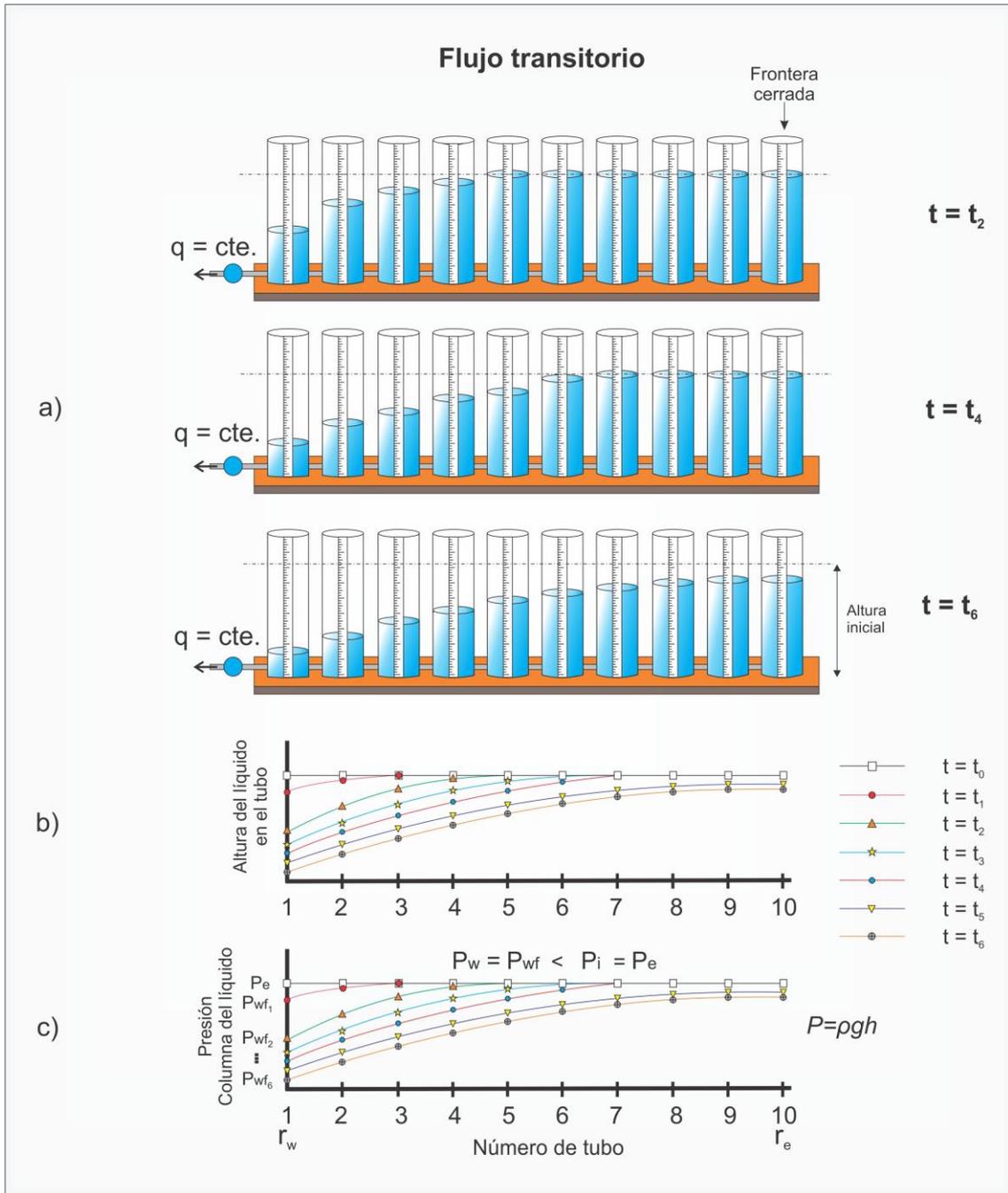


Figura 1.16: Flujo transitorio en un yacimiento cerrado¹⁰.

En la figura 1.16 se observa que habrá un tiempo (en la figura, comprendido entre t_4 y t_5 , aproximadamente) al cual el área de drenaje alcance el radio r_e , esto es, el nivel en el tubo 10 empiece a disminuir y con ello la presión desde su nivel P_e . Dado que el conjunto de recipientes representa a un sistema o yacimiento cerrado (no ingresa fluido al sistema), si la extracción de fluido continua para tiempos superiores al tiempo en que se alcance r_e , el nivel de fluido y por lo tanto la presión en todos los tubos continuará

disminuyendo a medida que transcurre el tiempo. Se observa en los recipientes de la figura 1.16, que la altura de fluido en el tubo 10 (frontera) con respecto a la altura inicial ha disminuido.

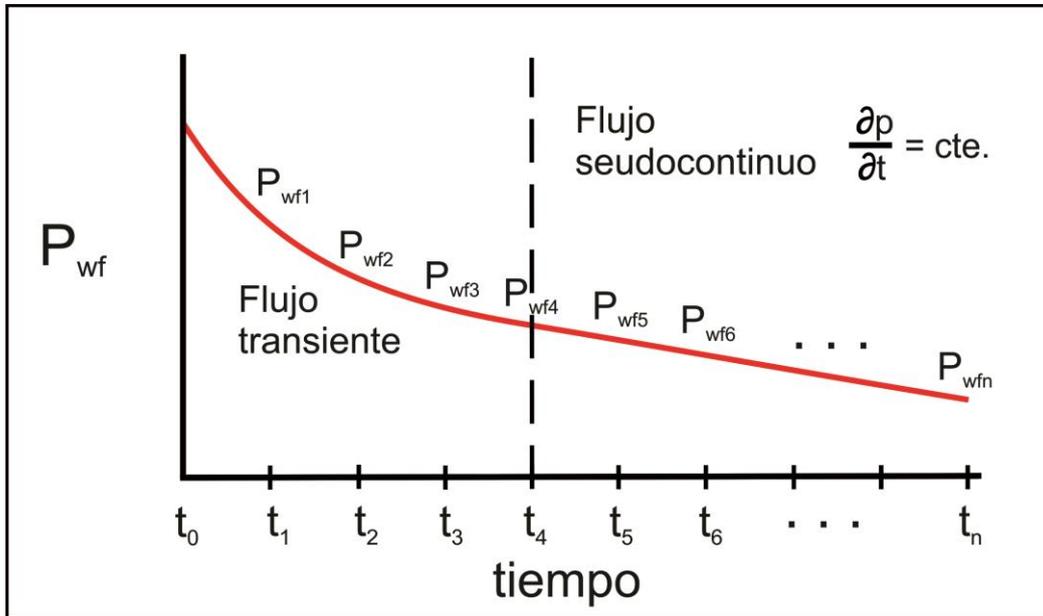


Figura 1.17: P_{wf} vs tiempo en un yacimiento cerrado. Nótese que para $t < t_4$, el cambio de presión con respecto al tiempo es variable (flujo transitorio). Para $t > t_4$, el cambio de presión al pozo, p_{wf} , con respecto al tiempo se mantendrá constante (flujo pseudocontinuo).

En el laboratorio se puede observar, que para un yacimiento cerrado, si se grafican las presiones del fondo del tubo 1 (P_{wf}) para los diferentes instantes de tiempo, la gráfica P_{wf} vs t muestra el comportamiento de la figura 1.17. Se diferencian dos comportamientos distintos en la variación de P_{wf} :

- a) **Antes que disminuya el nivel de fluido en la frontera exterior: la perturbación o difusión de la variación de presión no llega a la frontera, el flujo es de estado transitorio (del inglés transient flow)**

La variación de P_{wf} a medida que transcurre el tiempo, antes que el nivel de fluido en el tubo 10 (frontera) sea afectado ($\approx t_4$, figura 1.17), posee un comportamiento variable. Es decir, la derivada de P con respecto a t es variable $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = \text{variable}\right)$. Lo mismo ocurre con la presión a cualquier punto del yacimiento, hasta $\approx t_4$

- b) Después que el nivel de fluido en la frontera es afectado: la perturbación de presión llega a la frontera y, en adelante el flujo será de estado pseudocontinuo o semi-continuo (del inglés pseudo steady state).**

Una vez que el nivel del fluido en el tubo 10 (frontera) disminuye, la variación de P_{wf} a medida que transcurre el tiempo refleja un comportamiento constante. Es decir, la variación o derivada de la presión con respecto al tiempo es constante $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = cte.\right)$. Lo mismo ocurre con la presión a cualquier punto del yacimiento, una vez que el yacimiento alcanza el flujo de estado pseudo continuo.

Flujo de estado transitorio – Analogía de los vehículos en un semáforo

Como se observó en el caso de los recipientes llenos de fluido e interconectados en el laboratorio, el fluido empieza a fluir desde una zona cercana al pozo (r_w) y cada vez desde distancias más lejanas hasta llegar a la frontera externa (r_e). Durante este tiempo el flujo es de estado transitorio. Este flujo obedece a caídas de presión que ocurren a dichos puntos y por ello, el fluido se mueve desde diferentes zonas o puntos en el yacimiento. Estas caídas de presión son ocasionadas por perturbaciones de presión que se difunden a través del yacimiento desde el radio del pozo, desde el instante en que se abre el pozo a producción, y se mueven hacia el interior del yacimiento, siempre viajando en dirección contraria al flujo, hasta alcanzar el radio r_e .

Para comprender *el flujo de estado transitorio* y el viaje de la perturbación de presión hacia el interior del yacimiento alejándose del pozo, se puede analizar el siguiente caso cotidiano. Supongamos que frente a un semáforo en rojo se ha formado una cola interminable de vehículos, todos detenidos en un instante inicial t_0 (figura 1.18). Lo mismo ocurre en un yacimiento cuando la válvula del pozo se encuentra cerrada, no hay flujo en el medio poroso. Y la presión es la misma en cualquier parte del yacimiento.

Una vez que el semáforo cambia a luz verde (el pozo es abierto a producción), el primer carro se mueve hacia adelante (empieza el flujo del pozo). Mientras esto ocurre, los carros atrás del segundo vehículo no perciben que el primer carro se ha movido. Para que se mueva el tercer carro, debe moverse el segundo, el que empezará a hacerlo luego del tiempo t_1 desde que el semáforo cambió a verde y el primer carro empezó a avanzar

un espacio que necesita el segundo carro para moverse al espacio del primero y continuar rodando. El tiempo que toma el segundo carro para avanzar al espacio antes ocupado por el primer carro es t_2 , contado desde que el semáforo cambió a verde. Transcurrido este tiempo, entonces se empezará a mover el tercer carro. El tercer carro toma el tiempo t_3 para moverse al espacio antes ocupado por el segundo y entonces se moverá el cuarto y, así sucesivamente para los carros de más atrás.

El movimiento de los vehículos hacia adelante (flechas negras en figura 1.18), produce un efecto de señal o desarreglo en la fila de carros, que viaja en dirección contraria (flechas rojas en figura 1.18) al movimiento de los carros y que se aleja cada vez más del semáforo a medida que transcurre el tiempo. De esta misma manera, al abrir el pozo a producción, se produce en el yacimiento una señal ocasionada por la perturbación de la presión, (caída de presión), señal que viaja alejándose del pozo hacia el interior del yacimiento. Para que el fluido localizado a un radio “ r ” del pozo se mueva, deberá transcurrir un tiempo t desde que el pozo fue abierto a producción. Esto se debe a que el fluido del yacimiento (petróleo o gas natural) es compresible. Toma su tiempo para que una dada sección del fluido “sienta” la caída de presión, se descomprima, se mueva hacia el pozo y con ello produzca una caída de presión hacia atrás para que la sección siguiente más alejada del pozo, empiece también a moverse. Esta nueva sección también tomará su tiempo para que se descomprima y avance y pueda dar lugar al movimiento de una otra sección del fluido de más atrás. Y así sucesivamente. Tomando en cuenta un medio continuo, si los fluidos fueran incompresibles no ocurriría esto y todo el fluido se movería al unísono.

Para hacer la analogía entre el flujo de vehículos con el comportamiento que experimenta el yacimiento durante el flujo transitorio, hemos supuesto un flujo lineal en el yacimiento, sin embargo, lo mismo se puede apreciar si el flujo es radial tal como ocurre generalmente en la práctica.

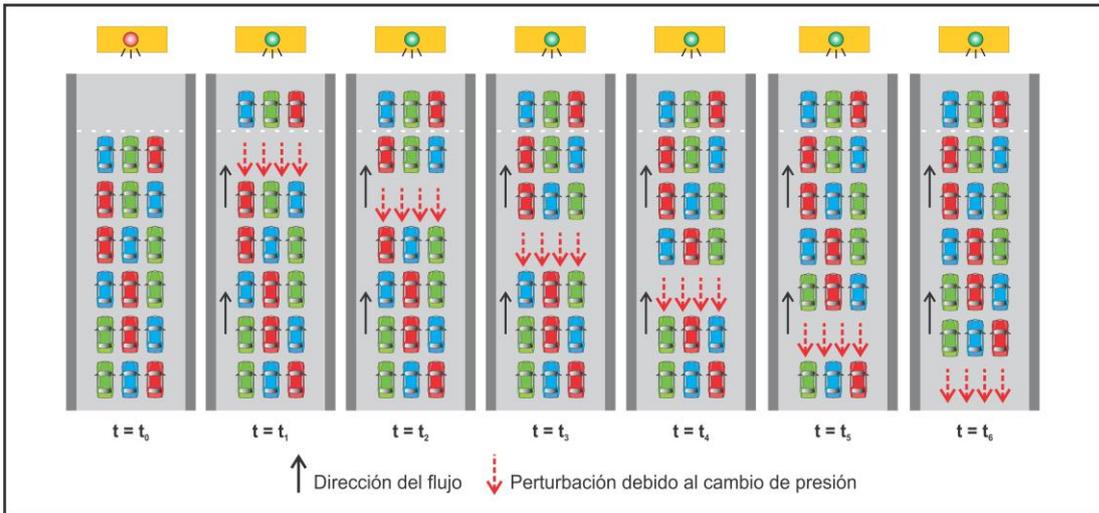


Figura 1.18: Flujo transitorio-Analogía del semáforo

2. Yacimiento abierto (Con empuje hidráulico)

Un yacimiento abierto es aquel que posee una o más fronteras abiertas a través de las cuales existe flujo de un fluido (Ej.: intrusión de agua). Yacimientos con este tipo de flujo generalmente son denominados **yacimientos con empuje hidráulico**. También es posible un empuje por gas (neumático). En estos casos, para un $r > r_e$, sí hay una caída de presión y el flujo a la frontera no será cero, esto es:

A la frontera exterior se tiene que $\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_e} \neq 0$.

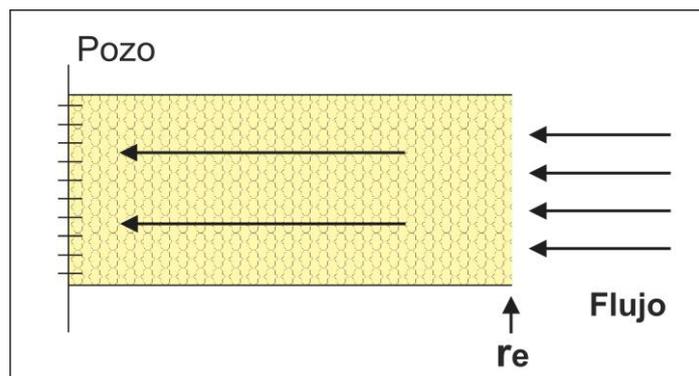


Figura 1.19: Esquema de Yacimiento abierto.

En la figura 1.19, se presenta un esquema de yacimiento abierto. Se ha incluido líneas de flujo en el interior del mismo y también en el exterior atravesando el radio externo r_e . Se tiene un yacimiento abierto cuando el yacimiento de hidrocarburos se encuentra en

contacto con un acuífero activo. Por lo tanto, a un determinado tiempo de haber empezado la extracción de hidrocarburos, el agua proveniente del acuífero ingresa a la zona del yacimiento (figura 1.20).

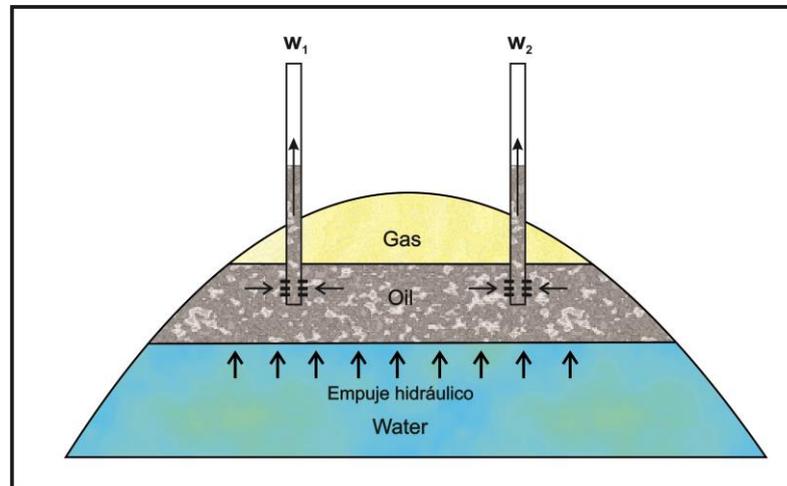


Figura 1.20: Yacimiento en contacto con acuífero. Nótese el empuje del agua hacia arriba al descomprimirse el sistema. Aunque no se muestra en la figura, también en este caso el gorro o capa de gas empujará hacia abajo.

El flujo que se produce en un sistema abierto puede ser representado en el laboratorio empleando tubos interconectados y llenos de fluidos tal como se explicó en el caso de un sistema o yacimiento cerrado. Se incorpora para este caso, una entrada o ingreso de fluido en el cilindro que representa a la frontera (tubo 10, figura 1.21) ¹⁰ .

Una vez iniciado el flujo, en la Fig. 1.21 se aprecia que con el paso del tiempo el nivel de fluido disminuye para los tubos 1 (la presión en tubo 1 disminuye a P_{wf}), 2, 3, 4 y por lo tanto, también la presión en el fondo de los mismos. Si el flujo o extracción de fluido continúa, el nivel de fluido continúa disminuyendo en los tubos 5, 6, 7, 8, 9 durante los tiempos t_2 y t_3 , indicados en la misma figura. Cabe indicar que a medida que el tiempo de flujo transcurre, la presión en el fondo de los tubos 1 al 9 va cambiando con el paso del tiempo, tal como ocurre durante el *flujo transitorio* ilustrado en la figura 1.16. Sin embargo, a diferencia de los yacimientos o sistemas cerrados, se observa que al tiempo que la perturbación inducida por la producción del pozo alcanza el tubo 10, el nivel de fluido y la presión en dicho tubo no disminuyen debido a que existe una alimentación de nuevo fluido al sistema a través de la frontera de este ($q_{frontera}$). El nuevo caudal de fluido

que ingresa, contribuye a mantener constante la presión P_e , en el tubo 10 (frontera). Estamos asumiendo que el caudal del fluido que entra al sistema es igual al caudal del fluido que sale del mismo. Por lo tanto, a partir del tiempo t_3 , el caudal de fluido que ingresa al sistema hace que el nivel a ese instante y la correspondiente presión en todos los tubos se mantengan y se vuelvan constantes, al valor que tenían al tiempo t_3 .

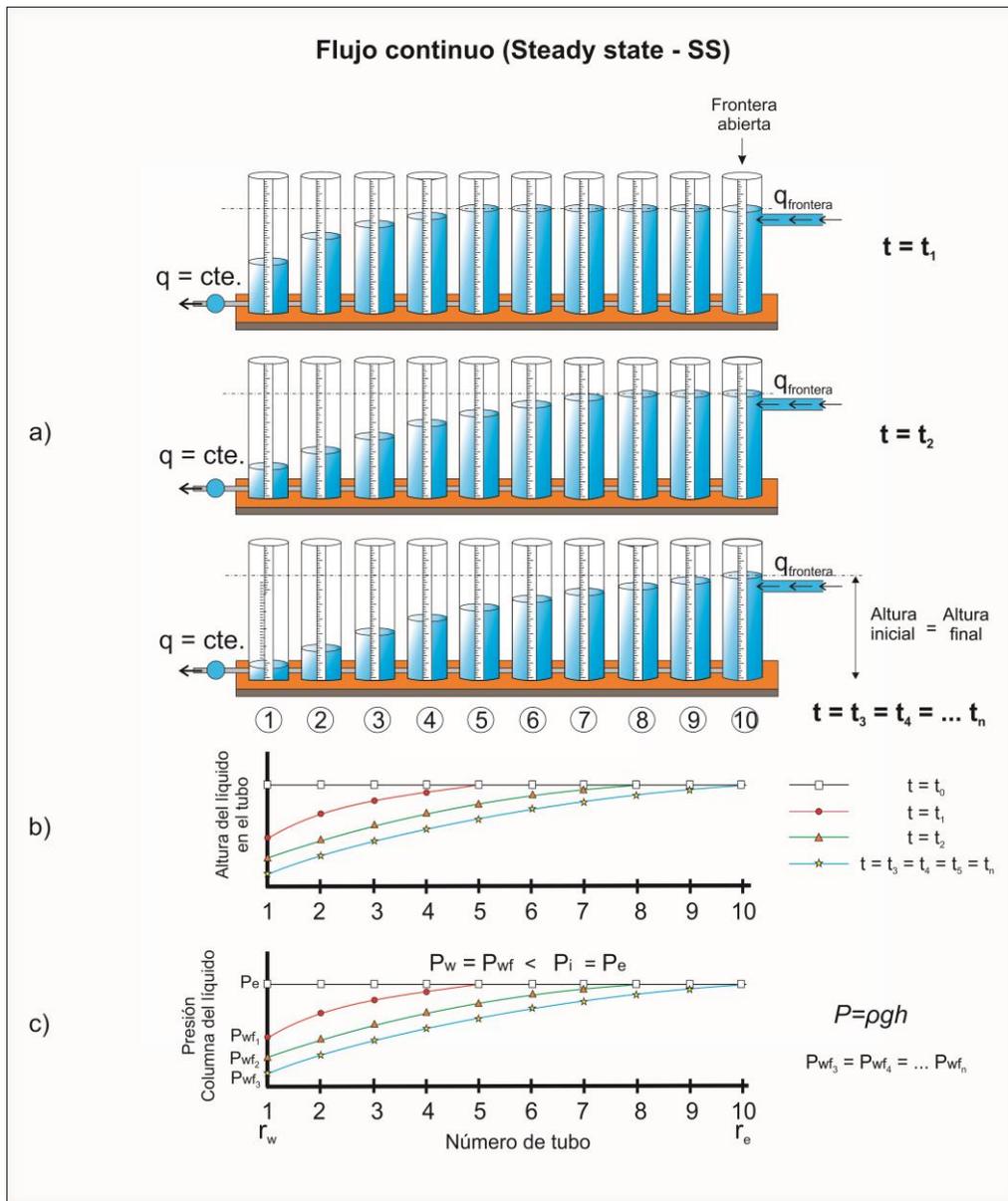


Figura 1.21: Flujo continuo en yacimientos abiertos. Nótese que a t_3 en la sección a de la figura, el flujo ocurre desde el tubo 10, es decir desde r_e . De ahí en adelante hay ingreso de fluido a la frontera y la presión a cualquier tubo o punto del yacimiento se mantendrá para $t > t_3$ (cambio de presión con tiempo es cero) ¹⁰.

Si se graficara la presión al pozo, P_{wf} , para diferentes instantes de tiempo, como la figura 1.22, la variación de P_{wf} a medida que transcurre el tiempo presentaría dos comportamientos, uno antes y otro después de t_s , tiempo de estabilización (figura 1.22).

**a) Variación de presión (o difusión de dicha variación) no llega a la frontera:
Flujo transitorio (del inglés transient flow).**

La variación de la presión al pozo, P_{wf} , a medida que transcurre el tiempo, antes que el nivel de fluido en el tubo 10 sea afectado ($t < t_3$), posee un comportamiento variable. Es decir, en este periodo la derivada de P con respecto a t es variable $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = \text{variable}\right)$. El flujo es de estado transitorio.

**b) La difusión de la variación de presión llega a la frontera: Flujo continuo
(del inglés steady state flow)**

Una vez que la perturbación de la presión ha alcanzado la frontera, es decir al tiempo del fin del flujo transitorio, t_s , el fluido que ingresa a esta hace que la presión a la frontera P_e y a cualquier tubo (radio del pozo, incluyendo al pozo mismo P_{wf}), permanezcan constantes como el tiempo transcurre (para $t > t_s$). Por lo tanto, en este periodo la variación o derivada de la presión con respecto al tiempo es cero $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = 0\right)$.

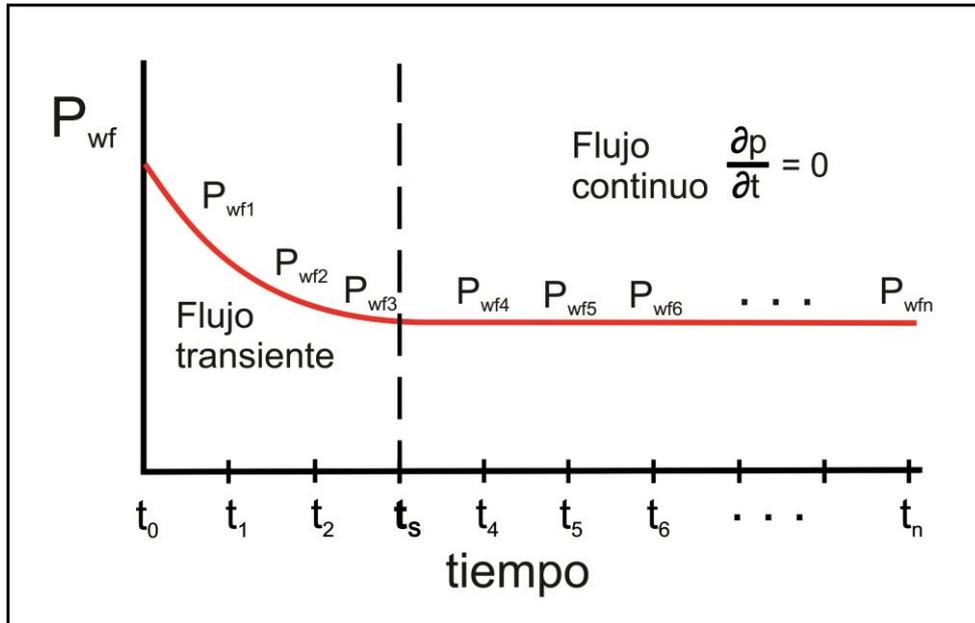


Figura 1.22: P_{wf} vs tiempo en un yacimiento abierto. Nótese que para $t > t_s$, la presión p_{wf} se mantiene constante en función del tiempo y el flujo será de estado continuo.

1.4. PERFILES DE LAS PRESIONES EN EL YACIMIENTO

1. Flujo pseudocontinuo (del inglés semi-steady state (SSS))^{11,12}

El flujo pseudocontinuo (o semi-steady state (SSS) en inglés) es precedido por el flujo transitorio y se produce en yacimientos cerrados, sin presencia de flujo a las fronteras. Es decir, este tipo de flujo se produce en yacimientos que no se encuentran en contacto con grandes cuerpos de agua.

Para un yacimiento **Cerrado** y con tasa de producción constante al pozo ($q|_{r_w} = cte$), la presión vs radio y tiempo varía como sigue (figura 1.23):

Al tiempo t_1 , el perfil de la presión vs radio es como se muestra en t_1 de figura 1.23. La perturbación a la presión del yacimiento por efecto de abrir el pozo a producción se ha difundido hasta el radio r_1 . Esto es, desde el radio r_1 los fluidos se mueven hacia el pozo. A este instante, la presión en el yacimiento desde r_1 hasta r_e es la misma e igual a p_i . Por consiguiente, atrás de r_1 en el yacimiento, no hay flujo de fluido, ($q|_{r \geq r_1} = 0$) $_{t_1}$. A este tiempo t_1 la presión al pozo, es decir a $r = r_w$, es p_{wf1} .

Al tiempo t_2 , la perturbación alcanza ahora el radio r_2 . Un mayor volumen del yacimiento está bajo la influencia de la producción del pozo. Obviamente, la presión a r_1 que antes a t_1 era p_i , ahora ha descendido. La presión más allá de r_2 es la misma e igual a p_i y no hay flujo ($q|_{r \geq r_2} = 0$) _{t_2} . A este tiempo t_2 la presión al pozo, es decir a $r = r_w$, es p_{wf2} .

Al tiempo t_3 , todo el yacimiento está bajo la influencia del pozo en producción, la perturbación ha alcanzado r_e , es decir el radio externo de drenaje del pozo. El flujo o drenaje ocurre ahora desde la distancia r_e . Como se trata de un yacimiento cerrado, más allá de r_e ya no existe flujo, y obviamente no hay gradiente de presión $\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r \geq r_e} = 0$. A este tiempo la presión al pozo es p_{wf3} .

A este punto, un cierto aspecto de la figura 1.23 requiere aclaración. Esta figura es para q_{rw} constante al pozo. Se puede observar de esta figura que la q_{rw} es constante pero a $r = 0$. Pero, puede observarse también del mismo gráfico que q_{rw} llega a ser constante a r_w , luego de un cierto tiempo de iniciada la producción. Esta situación es resultado de la solución de la ecuación que describe el flujo en medios porosos, cuyo procedimiento de solución simplificado asume que el radio del pozo es igual a cero (solución de línea fuente). Volveremos a este punto con mayor extensión más adelante en los capítulos 3 y 4.

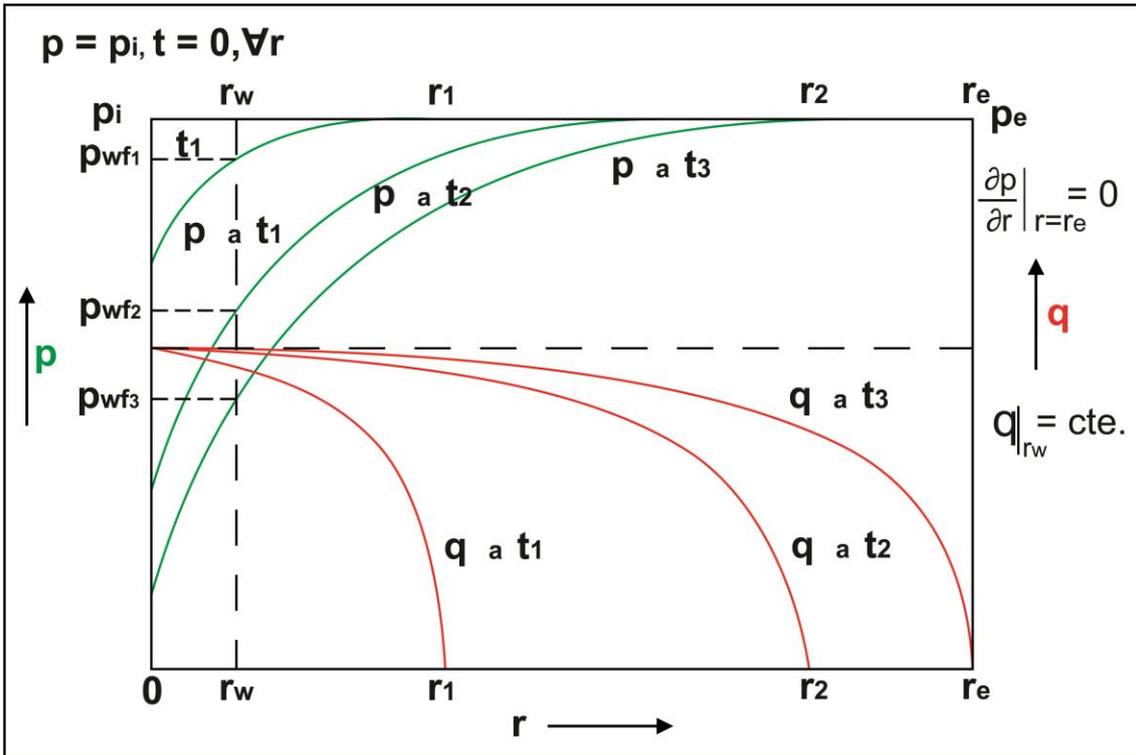


Figura 1.23: Gráfico de p y q vs. r, para diferentes tiempos
Yacimiento Cerrado ¹²

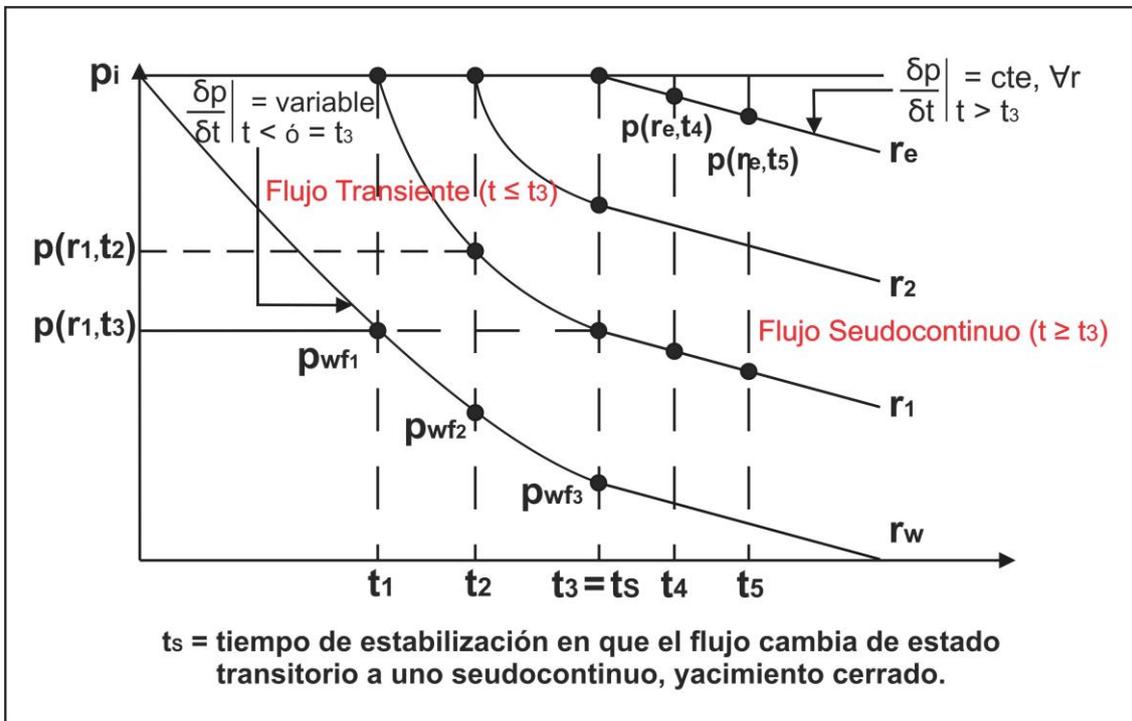


Figura 1.24: Gráfico de p vs. t, para diferentes radios
Yacimiento Cerrado

La presión al radio r_1 , que al tiempo t_1 era p_i , al tiempo t_2 es $p = p(r_1, t_2) < p_i$ y al tiempo t_3 será $p = p(r_1, t_3) < p = p(r_1, t_2) < p_i$. Hasta el tiempo t_3 , también a r_2 y a cualquier otro radio r , la presión continúa declinando. Pero, al tiempo $t_3 = > t_s$, tiempo de estabilización (del inglés *stabilization time*), es decir luego que el tipo de flujo cambia de transitorio a pseudocontinuo, la presión al radio r_1 , r_2 y a cualquier otro radio r , continúa declinando con tiempo, pero a un ritmo constante. Nótese en la figura 1.24 que al tiempo t_3 el decrecimiento de la presión pasa de una forma curvada (declinación variable) a una recta oblicua (declinación constante), para todos los radios. Esto es característico del agotamiento de la presión (*depletion* en inglés) en estos yacimientos. Nótese además que variando p con radio y tiempo, sus derivadas con respecto al radio o al tiempo serán derivadas parciales por cuanto p es función de radio y tiempo.

Hasta t_3 el flujo está en estado de flujo TRANSITORIO (o TRANSIENTE), $\frac{\partial P}{\partial t} =$ variable, para todo r . (figura 1.24).

Desde t_3 en adelante, está en estado de flujo SEUDOCONTINUO, $\frac{\partial P}{\partial t} =$ constante, para todo r . (figura 1.24).

2. Flujo continuo o steady state (SS) ^{11,12}

El flujo continuo (o steady state (SS) en inglés) se produce en yacimientos abiertos, donde los hidrocarburos se encuentran en contacto con un acuífero activo que ingresa a la zona del yacimiento, en el mismo volumen que los hidrocarburos salen del pozo, y evita así que la presión del yacimiento decaiga.

Para un yacimiento **Abierto** y tasa de producción constante al pozo, la presión versus radio y tiempo varía como sigue (Figs. 1.25 y 1.26).

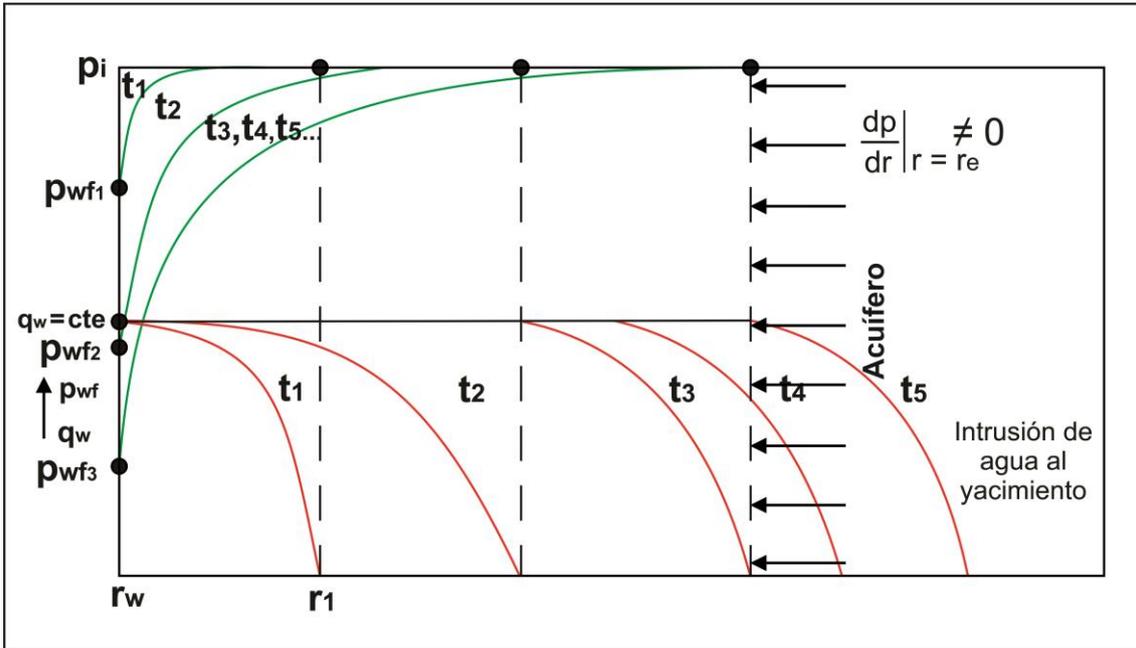


Figura 1.25. Gráfico de p y q vs. r , para diferentes tiempos
Yacimiento Abierto ¹²

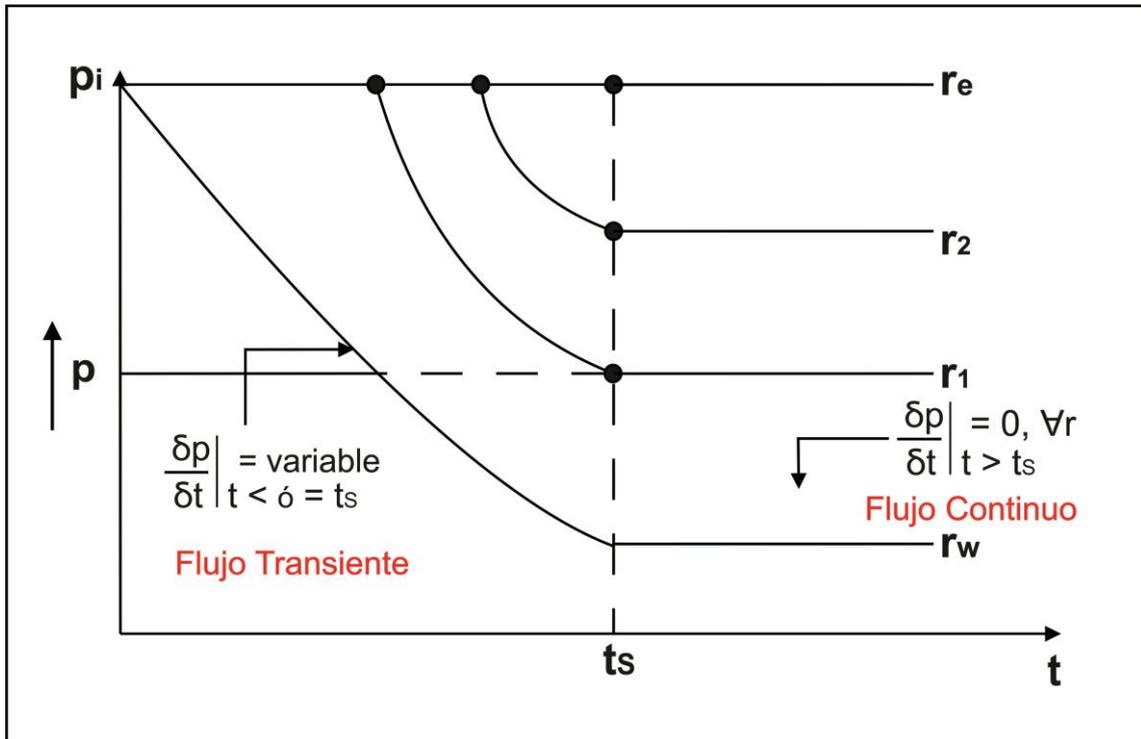


Figura 1.26. Gráfico de p vs. t , para diferentes radios
Yacimiento Abierto

En las figuras 1.27 y 1.28 se resume el comportamiento de la presión $p(r=r_w, t) = p_{wf}$ con respecto al tiempo para un yacimiento cerrado y para uno abierto.

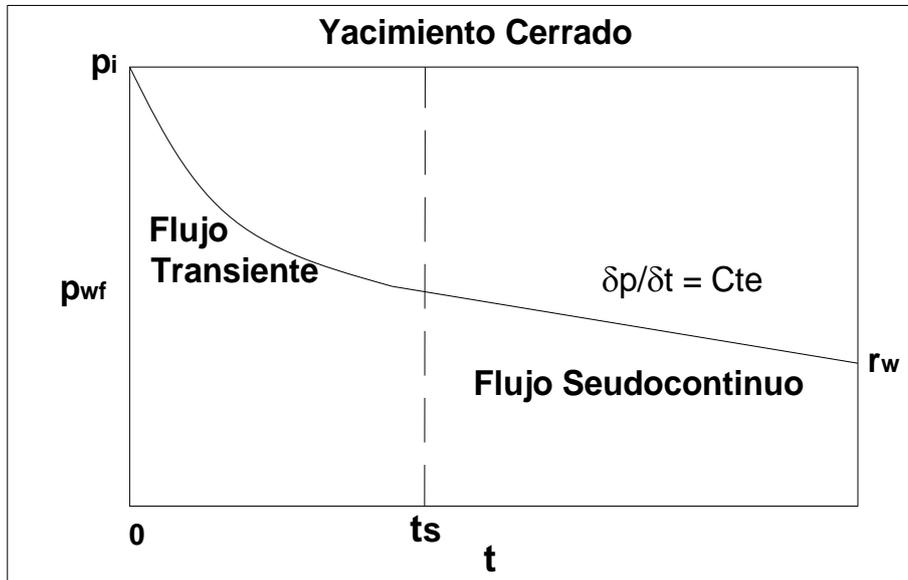


Figura 1.27: Variación de presión P_{wf} versus tiempo para un yacimiento cerrado.

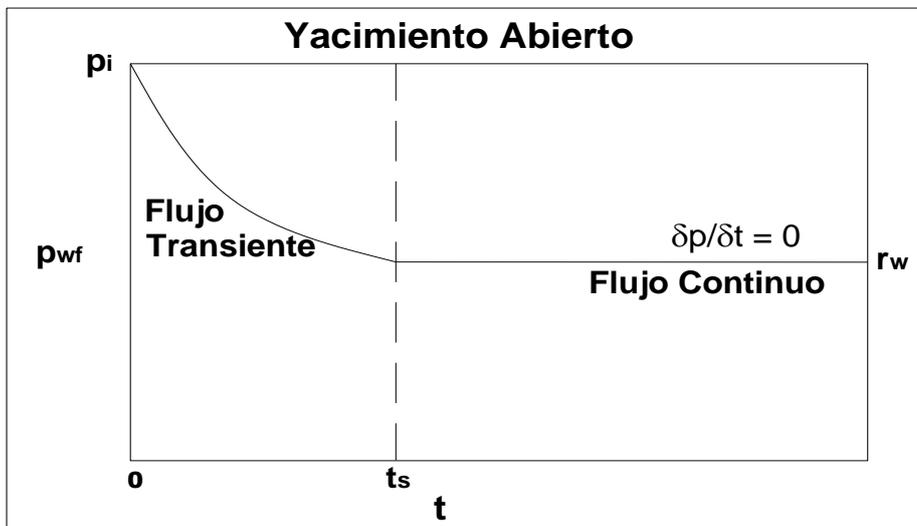


Figura 1.28: Variación de presión P_{wf} versus tiempo para un yacimiento abierto.

El tiempo t_s es el tiempo de estabilización al cual el flujo cambia de flujo transitorio (o transiente) a flujo seudocontinuo o flujo continuo.

PREGUNTAS TEÓRICAS - CAPÍTULO 1

1. Graficar una sección de un anticlinal con varios estratos en que uno de estos incluya los siguientes componentes: acuífero, yacimiento de petróleo, capa de gas, pozo productor de petróleo, pozo seco.
2. Realizar un esquema de los diferentes tipos de flujo, a) según configuración geométrica del flujo y, b) según la variación espacial de la composición y propiedades de la roca.
3. Para un yacimiento abierto y uno cerrado, y apoyado en gráficos con sus leyendas pertinentes: a) cómo es la variación de la presión con respecto al radio, a la frontera externa; b) cómo es la variación de la presión con respecto al tiempo, antes y después de t_s ; y, c) qué tipos o regímenes de flujo están presentes antes y después de t_s .
4. Indique qué característica del fluido hace posible la formación del flujo transitorio y, en qué consiste y hasta cuando se sostiene este tipo de flujo, para un yacimiento abierto y uno cerrado. Explique.
5. Graficar un esquema con vista superior del flujo radial en un yacimiento señalando: líneas de flujo, líneas equipotenciales, P_{wf} , radio del pozo, presión externa, radio externo de área de drenaje. ¿Cuál de los dos términos (P_{wf} o P_e) debe ser mayor en un yacimiento horizontal con un pozo productor activo de petróleo? Justifique su respuesta.
6. Graficar el comportamiento de la presión en el yacimiento (P vs. r), para un yacimiento abierto y para uno cerrado, cuando el caudal de producción del pozo es cero.
7. Graficar el comportamiento de la presión en el yacimiento (P vs. r) al radio r_e , para un yacimiento abierto y para uno cerrado, desde que el pozo inicia su producción hasta un instante de tiempo t , luego de que las perturbaciones debido a la variación de presión hayan tocado las fronteras. Asumir que el caudal de producción del pozo se mantiene constante.
8. Graficar el comportamiento de la P_{wf} a medida que transcurre el tiempo, desde el inicio de la producción para un yacimiento abierto y para un yacimiento cerrado. Asumir que el caudal de producción del pozo se mantiene constante.
9. Grafique el comportamiento de la presión en un yacimiento de petróleo abierto a un radio r , $r_w < r < r_e$, desde que el pozo es abierto a producción hasta un tiempo t mayor a t_s .
10. Explicar qué ocurre con la presión al radio externo del yacimiento desde el inicio de la producción hasta un tiempo t cualquiera después del t_s , en un yacimiento abierto y en uno cerrado. ¿Cuál es el motivo del comportamiento de la presión al radio externo r_e para cada tipo de yacimiento?

Capítulo 1.
REFERENCIAS

1. Craft, B.C. and Hawkins, M., Revised by Terry, Ronald E.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, second edition, Prentice Hall Inc. (1991). 213-216
2. Kamal, M Medhat et al: *Transient Well Testing*, Henry L. Doherty Series Monograph Vol. 23, SPE (2009).9-24
3. Houzé, O., Viturat, D., Fjaere, O.S., et al.: *Dynamic Data Analysis-DDA*, V5.12.01, Kappa Engineering (2008-2017). 163,171,227,281
4. Verga Francesca: 4.4. *Well Testing*, Encyclopaedia of Hydrocarbons, ENI, Istituto della Enciclopedia Italiana Fondata da Giovanni Treccani S.p.A (2005). 540.
5. Spivey, John P. and Lee W. John: *Applied Well Test Interpretation*, SPE Textbook Series Vol. 13, SPE (2013). 9,13
6. Archer, J.S. y Wall, C.G.: *Petroleum Engineering Principles and Practice*, Graham & Trotman Ltd (1986), 43
7. Blasingame, T.A.: *Notas del Curso Petroleum Engineering-P324, Modulo PVT Concepts*, DOPE-Texas A&M University (2011). Slice 20.
8. Garaicochea, F y Bashbush, J. L.: *Apuntes de Comportamiento de los Yacimientos*. División de Ingeniería en Ciencias de la Tierra-Facultad de Ingeniería, UNAM (1985), 35
9. Ilfi Binti E.Y.: *Pressure Transient Analysis Using Generated Well Test Data from Simulated of Selected Wells in Norne Field*, Master Thesis. NTNU-Trondheim, Norwegian University of Science and Technology (2012), 7-10
10. Heriot Watt Institute of Petroleum Engineering: *Notas del Curso “Reservoir Engineering”*, Sección “Fluid Flow in Porous Media 10, Heriot Watt University (2005), 3-6
11. Dake, L.P.: *The Practice of Reservoir Engineering (Revised Edition)*. Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (2001). 161-166
12. Slider, H.C.: *Worldwide Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods*, PennWell Books (1983). 26, 29

CAPÍTULO II

LA LEY DE DARCY Y SUS APLICACIONES

2.1. LA LEY DE DARCY

En 1856, Henry Darcy publicó su trabajo^{1,2,3} sobre el filtro que debía procesar los requerimientos de agua de la ciudad de Dijón en Francia, con lo cual dedujo la fórmula que lleva su nombre. Este fue el primer trabajo publicado sobre el flujo de fluidos en medios porosos.

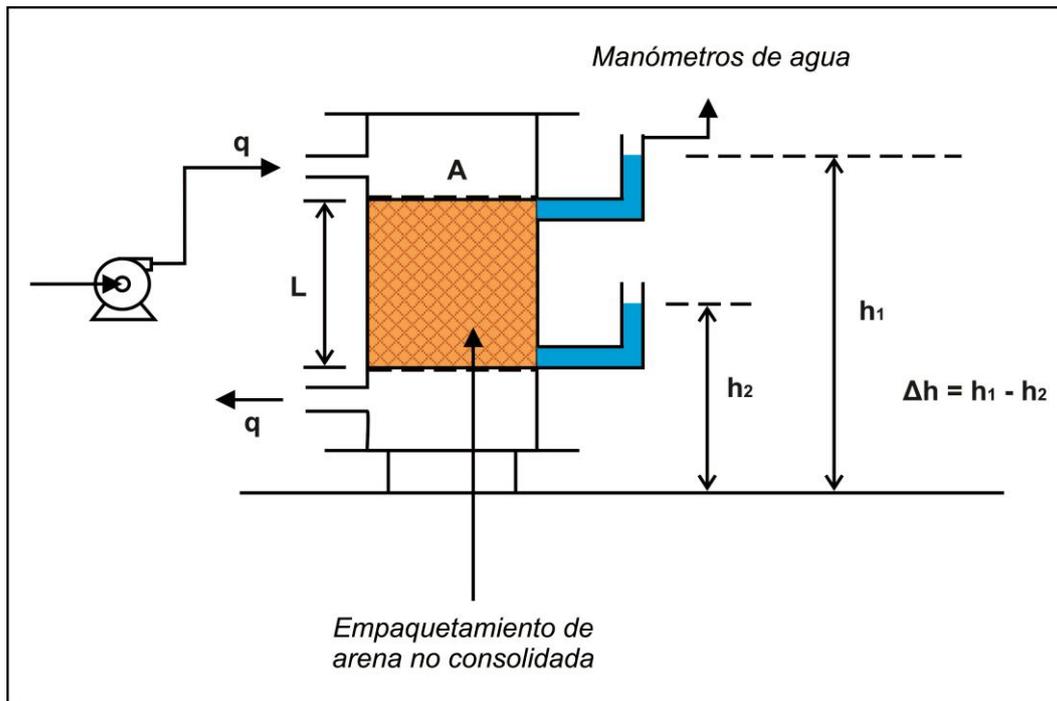


Figura 2.1: Esquema del equipo utilizado por Darcy¹.

La investigación de Darcy consistió en conocer cuán grande debía ser el filtro, para que a través de éste, pueda fluir el volumen de agua que necesitaba la ciudad.

En la Fig. 2.1 se observan las siguientes variables:

q : caudal	[cc/seg]
A : área seccional del filtro, ortogonal al flujo.	[cm ²]
u : velocidad aparente de flujo	[cm/seg]
Δh : diferencia de niveles (o cabeza) manométricos	[cm de agua equivalente]
L : longitud del empaquetamiento de arena	[cm]

donde $u = \frac{q}{A}$.

Variando L y Δh y midiendo la velocidad resultante, Darcy estableció la siguiente relación:

$$u = K \frac{\Delta h}{L} \quad \text{Ec. 2.1}$$

Δh : diferencia de cabeza entre punto 1 y punto 2.

L : longitud del empaquetamiento

donde K es una constante para un tipo de empaquetamiento dado (en hidrología es llamada “conductividad hidráulica”, con las mismas unidades de velocidad, cm/seg). Es importante tener en cuenta que “ q ” es la misma en cualquier sección de la trayectoria de flujo y, como la sección A es constante, entonces la velocidad es también constante a cualquier sección. Darcy trabajó con agua y para fines prácticos esta es incompresible y el caudal es el mismo a cualquier punto de la trayectoria del fluido.

Darcy cambió varias veces el empaquetamiento de arena no consolidada y encontró que K era distinto pero que la relación de u con Δh y L se mantenía para cada uno de los empaquetamientos.

No investigó los efectos de densidad y viscosidad por cuanto siempre utilizó agua. Adicionalmente, mantuvo el filtro en posición vertical.

Posteriormente, otros investigaron¹ el efecto de que el filtro no esté en posición vertical sino inclinada, (figura 2.2) y otros investigaron más a profundidad la relación de K con el tipo de fluido y tipo de roca.

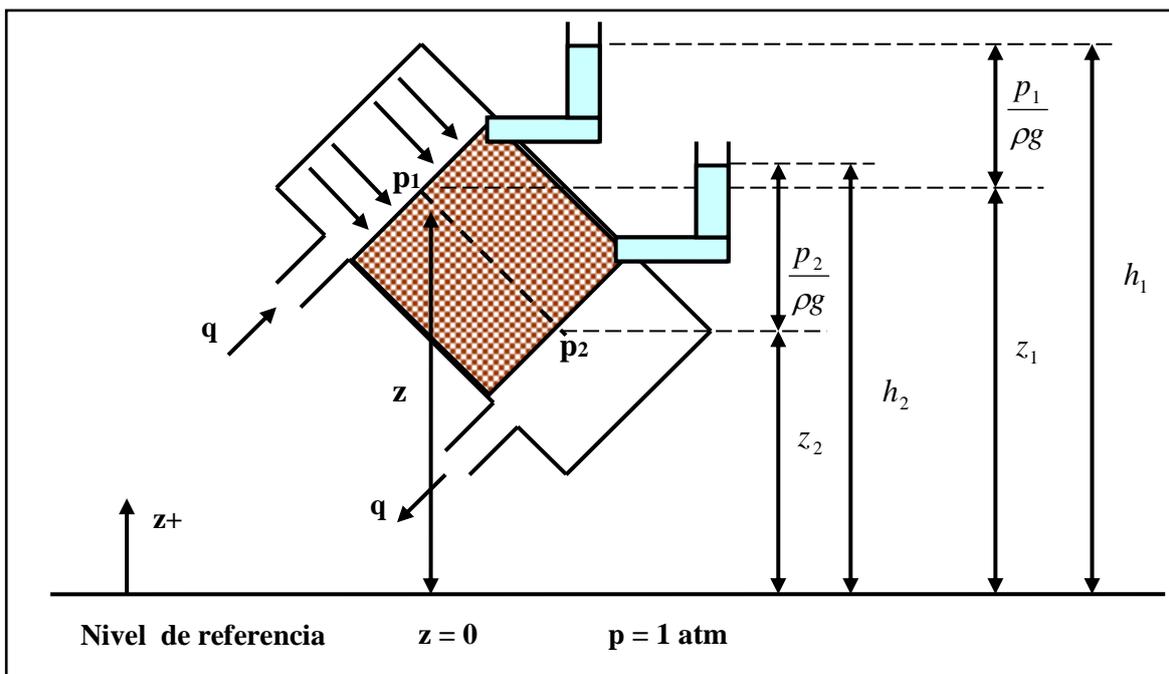


Figura 2.2: Esquema del Flujo Inclinado.¹

De acuerdo a la investigación del efecto del filtro en posición inclinada, se obtuvo que a un punto cualquiera en la trayectoria de flujo la presión hidráulica total (ρgh) es igual a la suma de la presión de flujo (p) más la presión hidráulica debido a la elevación (ρgz), con respecto al nivel de referencia, dada por la atracción de la gravedad (z es asumido positivo hacia arriba). Es decir,

$$\rho g = \frac{\text{lbm}}{\text{pie}^3} \times \frac{\text{pie}}{\text{seg}^2}$$

$$\rho gh = \frac{F \times h}{V} = \frac{\text{trabajo}}{\text{volmen}} = \text{presión}$$

Recuerde que el sistema anglosajón, la densidad tiene el mismo valor numérico de peso específico lbf/pie³, a nivel del mar.

La presión también es trabajo (o energía) por unidad de volumen. La presión hidráulica a un punto cualquiera de la trayectoria del fluido es:

$$\rho gh = p + \rho gz$$

Despejando h tenemos:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad \text{Ec. 2.2}$$

Donde h es la carga o cabeza total. El término $\frac{p}{\rho g}$ es la carga o cabeza de presión manométrica y z es la carga o cabeza de altura o elevación del punto en análisis con respecto al nivel de referencia ($z = 0$; $p = 1 \text{ atm}$).

Estas otras investigaciones demostraron que sin importar la orientación del filtro, la diferencia de los niveles manométricos, Δh , siempre fue la misma para una misma tasa de flujo, q , dada. Sin embargo, estas otras investigaciones, permitieron conocer el significado de Δh . Otros demostraron¹ que $\frac{K}{g} = k \left(\frac{\rho}{\mu} \right)$ para fluidos diferentes al agua,

donde:

k : permeabilidad (*propiedad del empaquetamiento*)

ρ : densidad del fluido

μ : viscosidad del fluido

g : aceleración de la gravedad

Para descubrir las fuerzas que actúan en el flujo inclinado supongamos el siguiente ejemplo conocido. En una tubería colocada horizontalmente, si la presión a la entrada (izquierda) es mayor que la presión a la salida (derecha), el flujo ocurrirá de la presión mayor a la presión menor, es decir en este caso de izquierda a derecha. Si las presiones a la entrada y salida fueran iguales, no existiría flujo; sin embargo, bajo éstas últimas condiciones y suponiendo que los extremos no impidieran el flujo, si inclináramos la tubería con fluido se producirá flujo hacia abajo, lo cual nos lleva a pensar que el flujo en este caso tiene que ver con la atracción de la gravedad o con la energía potencial del fluido.

2.2. SIGNIFICADO DE Δh

La presión a cualquier punto en la trayectoria de flujo de la Fig. 2.2, el cual tiene una elevación z relativa al plano datum o de referencia, puede ser expresada en unidades absolutas como ^{1, 2}:

$$p = \rho g(h - z) \left[\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} \right] \quad \text{Ec. 2.3}$$

También,

$$\rho g h = p + \rho g z$$

$$h g = \frac{p}{\rho} + g z \quad \text{Ec. 2.3A}$$

Por otro lado, la ec. 2.1 en forma diferencial es:

$$u = K \frac{dh}{dL} \quad \text{Ec. 2.4}$$

Diferenciando la ec. 2.3A y sustituyendo en ec. 2.4, tenemos:

$$u = \frac{K}{g} \frac{d}{dL} \left(\frac{p}{\rho} + g z \right)$$

$$u = \frac{K}{g} \frac{d}{dL} (h g) \quad \text{Ec. 2.5}$$

que es la misma ecuación de Darcy pero en términos de hg .

El término $\left(\frac{p}{\rho} + g z \right)$ debe tener las mismas unidades de hg . Es decir,

h : distancia [cm]

$$g = \frac{F}{m} \quad [\text{dinas/gram}]$$

Entonces,

$$hg \text{ esta dado en } \left[\frac{\text{dinas} \times \text{cm}}{\text{gram}} \right]$$

Comparando las unidades, tenemos:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\text{dinas/cm}^2}{\text{gram/cm}^3} = \left[\frac{\text{dinas} \times \text{cm}}{\text{gram}} \right]$$

$$gz = \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \times \text{cm} = \frac{\text{gram}}{\text{gram}} \left(\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2} \times \text{cm} \right) = \left[\frac{\text{dinas} \times \text{cm}}{\text{gram}} \right]$$

Esto es, hg es energía (trabajo) por unidad de masa y la expresión $\frac{p}{\rho} + gz$ es llamada

“**potencial de flujo**” a un punto cualquiera en la trayectoria de flujo, y es definido por:

$$\Phi (\text{phi mayúscula}) = \int_{1\text{atm}}^p \frac{dp}{\rho} + \int_0^z g dz = \int_{1\text{atm}}^p \frac{dp}{\rho} + gz \quad \text{Ec. 2.6}$$

datum de referencia: $z = 0, p = 1 \text{ atm}$.

Donde Φ es el trabajo requerido, por un proceso sin fricción, para transportar una unidad de masa del fluido desde un estado a presión atmosférica y elevación cero hasta el punto en cuestión. El Φ_{absoluto} es:

$$\Phi_a = \int_0^p \frac{dp}{\rho} + gz; \quad p_{\text{absoluta}}$$

$$\text{Integrando, } \Phi_a = \frac{p}{\rho} + gz, \quad [\text{fluido incompresible, } \rho \neq f(p)] \quad \text{Ec. 2.7}$$

Entonces, para el caso general, la expresión de Darcy puede escribirse:

$$u = \frac{K}{g} \frac{d}{dL}(\Phi) \quad \text{Ec. 2.8}$$

Los potenciales no siempre son referidos a la presión atmosférica y elevación cero, sino con respecto a cualquier presión y elevación bases arbitrarias (p_b, z_b).

Entonces:

$$\Phi = \int_{p_b}^p \frac{dp}{\rho} + g(z - z_b) \quad \text{Ec. 2.9}$$

La razón de esto es que el flujo de fluido entre dos puntos A y B, es gobernado por el diferencial de potencial entre los puntos, no por los potenciales individuales, esto es:

$$\int_{\Phi_B}^{\Phi_A} d\Phi = \Phi_A - \Phi_B = \left[\int_{p_b}^{p_A} \frac{dp}{\rho} + g(z_A - z_b) \right] - \left[\int_{p_b}^{p_B} \frac{dp}{\rho} + g(z_B - z_b) \right]$$

$$\Phi_A - \Phi_B = \int_{p_B}^{p_A} \frac{dp}{\rho} + g(z_A - z_B) \quad \text{Ec. 2.10}$$

Para el caso de un fluido incompresible ($\rho \equiv \text{constante}$) como el usado por Darcy

(agua):

$$\int_{\Phi_B}^{\Phi_A} d\Phi = \int_B^A \frac{\partial p}{\rho} + \int_B^A g \partial z$$

$$\int_{\Phi_B}^{\Phi_A} d\Phi = \Phi_A - \Phi_B = \frac{p_A - p_B}{\rho} + g(z_A - z_B) \quad \text{Ec. 2.11}$$

Y, de ec. 2.5 y ec. 2.11

$$\Delta\Phi = \Phi_A - \Phi_B = g\Delta h$$

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta p}{\rho} + g\Delta z \quad \text{Ec. 2.12}$$

Se puede decir que el término Δh (figura 2.2) en la ecuación de Darcy es directamente proporcional a la *diferencia de potencial* del fluido entre los extremos del empaquetamiento de arena.

2.3. ECUACIÓN DE DARCY

Cuando el fluido es diferente al agua, tenemos:

$$u = \frac{K}{g} \frac{d}{dL} [\Phi]$$

Pero, $\frac{K}{g} = \frac{k\rho}{\mu}$ de sección 2.1 para fluido de cualquier densidad y viscosidad.

Entonces,

$$u = \frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} \quad \text{Ec. 2.13}$$

Donde:

k = permeabilidad, propiedad del medio poroso y permeable.

u = velocidad del fluido a las condiciones de presión y temperatura en que ocurre el flujo en la arena.

La ecuación 2.13 es válida tanto si el flujo es horizontal o inclinado y nos indica que para que haya flujo entre dos puntos de un medio poroso debe haber una diferencia de potencial. Y, el flujo ocurrirá desde el punto de mayor potencial al de menor potencial.

Cuando el fluido satura 100% al medio la permeabilidad en la ec. 2.13 es la permeabilidad absoluta, k . Si la saturación del fluido es menor al 100%, entonces la permeabilidad en la ecuación es la permeabilidad efectiva al fluido a la saturación que este existe en el medio: k_o para petróleo, k_g para gas. También se utiliza la llamada permeabilidad relativa, $k_r = k_o/k$, la cual generalmente es obtenida del laboratorio. Entonces, tratándose de petróleo, $k_{ro} = k_o/k$

La ecuación 2.13 es la ecuación generalizada de Darcy para cualquier fluido, cualquier inclinación de la arena. Nótese que para flujo horizontal, z no cambia, y si además consideramos fluido incompresible diferente al agua, se tiene:

$$u = \frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} = \frac{k\rho}{\mu} \frac{d}{dL} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right)$$

$$u = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dL}, \quad \text{Ec. 2.14}$$

donde $u = \frac{q}{A}$.

Por lo tanto,

$$q = \frac{kA}{\mu} \frac{dp}{dL}, \quad \text{flujo horizontal, fluido incompresible.} \quad \text{Ec. 2.15}$$

Problema 2.1.- Derivar las unidades de k en el sistema cgs y en el SI, para la ecuación dada.

$$u = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dL} \quad \text{Ec. 2.14}$$

- En unidades cgs:

$$\frac{dp}{dL} = \frac{atm}{cm} \equiv \frac{dinas/cm^2}{cm}$$

$$k = \frac{u\mu}{dp/dL} = \frac{cm/seg \times grm/cm.seg}{\frac{dinas/cm^2}{cm}} = [cm^2]$$

- En unidades SI:

$$\frac{dp}{dL} = \frac{Pa}{m} = \frac{N/m^2}{m}$$

$$k = \frac{u\mu}{dp/dL} = \frac{m/seg \times kgm/m.seg}{\frac{Newton/m^2}{m}} = [m^2]$$

Se puede apreciar entonces que la permeabilidad de la formación tiene unidades de longitud al cuadrado.

2.4. CONVENCIÓN DE SIGNO

Cuando la ecuación de Darcy es usada en conjunto con otras ecuaciones matemáticas, hay que observar la siguiente convención de signo.

a. Flujo lineal

Nótese en la figura 2.3, que ilustra el flujo lineal, que L aumenta en la dirección del flujo. Entonces, en la dirección de flujo el potencial Φ disminuye mientras que la longitud o distancia L del flujo aumenta, lo cual indica que al integrar $d\Phi/dL$ se obtendrá un signo negativo. Para volver positiva a la velocidad habrá entonces que introducir el signo negativo en el lado de la derecha de la ecuación de Darcy, quedando:

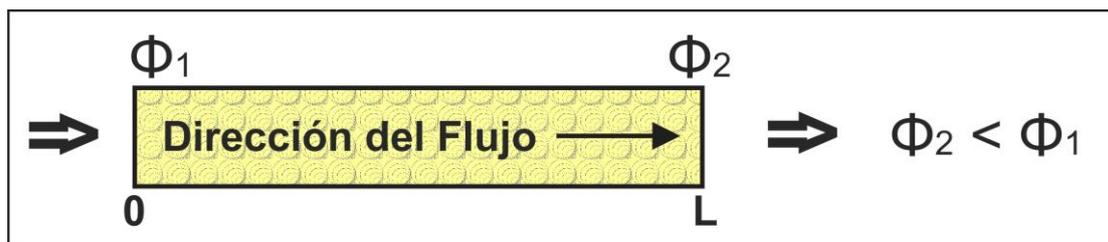


Figura 2.3: Flujo lineal

$$u = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} \quad \text{Ec. 2.16}$$

b. Flujo radial

Nótese en la figura 2.4 que ahora r aumenta en dirección contraria al flujo, de la misma manera que Φ . También, en la dirección de flujo el potencial disminuye al igual que lo hace el radio, y por lo tanto, $d\Phi/dr$ tendrá signo positivo y,

$$u = \frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{Ec. 2.17}$$

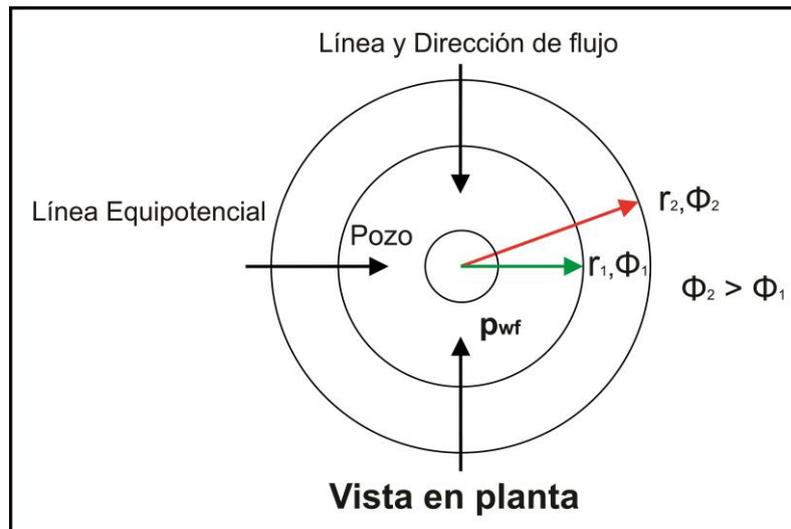


Figura 2.4: Flujo radial.

Es importante notar que q es asumida constante (fluido incompresible) a cualquier sección en la trayectoria de flujo. (En las Figs. 2.1 y 2.2, el flujo es lineal, la velocidad constante y el área transversal a las líneas de flujo es la misma a cualquier distancia). Pero, en el flujo radial como el de la figura 2.4, la tasa de flujo es asumida constante pero, las secciones o áreas transversales a las líneas de flujo (áreas laterales de los diferentes cilindros concéntricos que se forman con cada radio) disminuyen como uno se acerca al pozo. Esto tiene como resultado que las velocidades se incrementan conforme nos acercamos al pozo por reducción de A_r ($u_r = q/A_r$).

2.5. UNIDADES DE CONVERSIÓN

En cualquier set de unidades absolutas, la ecuación de Darcy para flujo lineal es:

$$u = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} \quad \text{Ec. 2.16}$$

Donde:

$$u \equiv L/t$$

$$\rho \equiv M/L^3$$

$$\mu \equiv M/(L.t)$$

$$L \equiv L$$

$$\Phi \equiv L^2/t^2 \text{ (energía potencial / unidad de masa. También } F \times L/M)$$

Entonces:

$$k = \left| \frac{u\mu dL}{\rho d\Phi} \right| = \frac{(L/t)(M/L.t)L}{(M/L^3)(L^2/t^2)} = [L^2]$$

Lo que revela que las unidades de permeabilidad son unidades de longitud al cuadrado como cm^2 en el sistema cgs y m^2 en el SI.

Habíamos visto que (prescindiendo por ahora del signo):

$$u = \frac{K d(hg)}{g dL} = \frac{K d\Phi}{g dL} \quad \text{y} \quad u = \frac{k\rho d\Phi}{\mu dL}$$

Es decir:

$$\frac{K}{g} = \frac{k\rho}{\mu}$$

En el sistema cgs, K viene dado en unidades de velocidad, cm/seg , $g \equiv cm/seg^2$, $\rho \equiv gm/cm^3$ y $\mu \equiv gm/cm\text{-seg}$, entonces la permeabilidad k será:

$$k = \frac{K\mu}{g\rho} = \frac{(cm/seg)(gm/cm\text{-seg})}{(cm/seg^2)(gm/cm^3)} = [cm^2]$$

Aún el cm^2 es una unidad impracticablemente grande para su empleo en ingeniería de yacimiento-pruebas de pozos. Las permeabilidades de las rocas reservorio son del orden de 1×10^{-10} a $2 \times 10^{-8} cm^2$. Entonces, se ha desarrollado un sistema denominado “*unidades Darcy*”, en el cual la unidad de permeabilidad es el *Darcy*.

$$1 \text{ Darcy} \approx 1 \times 10^{-8} cm^2$$

a. Unidades Darcy

Flujo lineal, horizontal,
Fluido incompresible.

$$u = -\frac{k dp}{\mu dL} \quad \text{Ec. 2.18}$$

Cuando tenemos que: $u = 1 [cm/seg]$; $\mu = 1 [cp]$, *centipoise*; $dp/dL = 1 [atm/cm]$.

Entonces, $k = \text{permeabilidad} = 1 \text{ darcy}$.

Nota: $1 \text{ centipoise (cp)} = 10^{-2} \frac{gm}{cm\text{-seg}}$; $1 \text{ poise (p)} = 1 \frac{gm}{cm\text{-seg}}$

La ecuación generalizada de Darcy, flujo a cualquier ángulo, en unidades Darcy viene a quedar¹:

$$u = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dL} + \frac{\rho g}{1.0133 \times 10^6} \frac{dz}{dL} \right) \quad \text{Ec. 2.19}$$

Donde $u = \frac{q}{A}$. Por lo tanto,

$$q = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{dp}{dL} + \frac{\rho g}{1.0133 \times 10^6} \frac{dz}{dL} \right) \quad \text{Ec. 2.20}$$

Utilizando unidades Darcy, el primer término de los sumandos dentro del paréntesis de ecuación 2.20 está en atm/cm. Entonces, el segundo término también debe estar en las mismas unidades. Debido a que ρg está dado en $\frac{\text{dinas/cm}^2}{\text{cm}}$ entonces para convertirlo en atm/cm utilizamos el factor de conversión $1.0133 \times 10^6 \frac{\text{dinas/cm}^2}{\text{atm}}$.

Entonces el término $\frac{\rho g}{1.0133 \times 10^6} \frac{dz}{dL}$ estará dado por $\left[\frac{\text{atm}}{\text{cm}} \right]$.

La ecuación generalizada de Darcy, en unidades darcy, también puede tomar la siguiente forma ⁴:

$$u = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dL} + 9.67 \times 10^{-4} \rho \cdot \text{sen} \phi \right) \quad \text{Ec. 2.21}$$

$u = \text{cm/seg}$, a la presión y temperatura que ocurre el flujo.

El ángulo ϕ en ecuación 2.21 es el indicado en la figura 2.5.

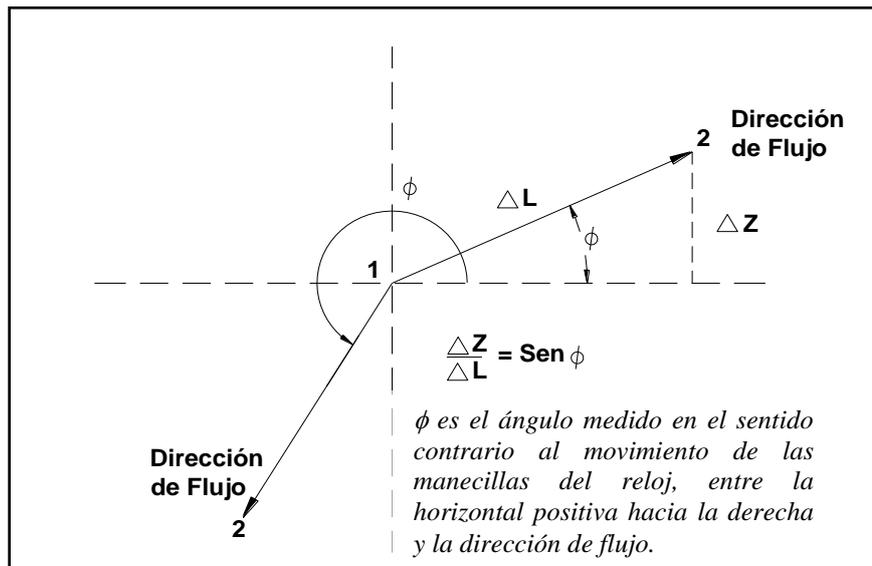


Figura 2.5: Ángulo ϕ de ecuación 2.21

b. Unidades de campo

Las unidades Darcy han sido ampliamente utilizadas en pruebas de laboratorio. Pero, cuando se tratan los aspectos más prácticos de ingeniería de yacimientos/evaluación de formaciones, tales como los de “pruebas de pozos”, es conveniente cambiar a las unidades llamadas prácticas o de campo. La palabra prácticas es aplicada a tales sistemas porque todas las unidades empleadas son de una magnitud conveniente. No hay reglas que gobiernen a las unidades de campo las cuales por lo tanto varían entre países y compañías. Las unidades de campo son aún empleadas en EE.UU, Ecuador y en varios otros países. Sin embargo, cada vez está más generalizado el empleo del sistema SI (Sistema Internacional de unidades).

TABLA 2.1.- SISTEMAS DE UNIDADES

PARÁMETRO	U. DE CAMPO	U. DARCY	UNIDADES CGS
longitud	pies	cm	Cm
masa	lbm	gm	Grm
tiempo	seg	seg	Seg
velocidad	pie/seg	cm/seg	cm/seg
tasa	Stb/d (<i>líquido</i>) Mscf/d o scf/d (<i>gas</i>)	cm ³ /seg	cm ³ /seg
presión	psia	atm	dinas/cm ²
densidad	lbm/pie ³	gm/cm ³	gm/cm ³
viscosidad	cp	cp	gm/cm-seg (<i>poise</i>)
permeabilidad	md	darcy	cm ²

Stb/d o bbl/d \equiv del inglés stock tank barrel/ day (barriles normales, barriles fiscales, barriles stock tank o barriles estándares por día)

Mscf/d \equiv millar of standard cubic feet per day (miles de pies cúbicos estándares por día)

Condiciones estándares o normales en este texto: 14.696 psia, 60 °F. Estas condiciones estándares pueden cambiar de un país o estado a otro.

Psia \equiv Pound per square inch absolute (libras por pulgadas absolutas)

Problemas de conversión:

Problema 2.2.- Conversión de la ecuación 2.18 de unidades Darcy a unidades de campo.

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dL} \quad \text{Ec. 2.18}$$

Puesto que $q = u \text{ [cm/seg]} \times A \text{ [cm}^2\text{]}$, la ecuación puede expresarse de la siguiente forma:

$$q(\text{cm}^3/\text{seg}) = -\frac{k(d)A(\text{cm}^2)}{\mu(\text{cp})} \frac{dp}{dL} (\text{atm/cm}), \text{ en unidades Darcy.} \quad \text{Ec. 2.18A}$$

La que convertida a unidades de campo tendrá la forma:

$$q(\text{stb/d}) = -(\text{constante}) \frac{k(\text{md})A(\text{pie}^2)}{\mu(\text{cp})} \frac{dp}{dL} (\text{psi/pie}) \quad \text{Ec. 2.18B}$$

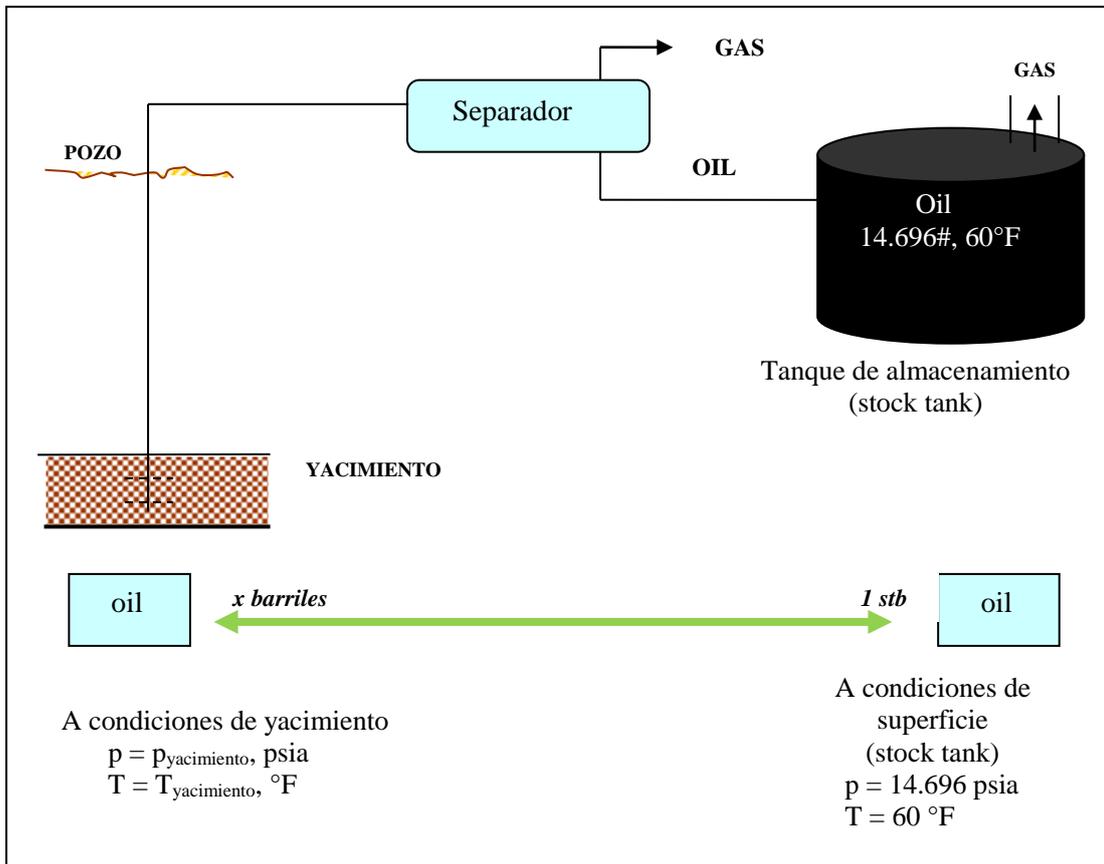


Figura 2.6: Encogimiento del petróleo de condiciones del reservorio a condiciones estándares.

Antes de evaluar la constante de ecuación 2.18B, definiremos el factor de formación del petróleo. En la figura 2.6 se aprecia que un volumen de petróleo que es todo líquido a condiciones de reservorio, libera su gas disuelto al pasar en superficie por el separador y

el tanque de almacenamiento, encogiéndose así su volumen. Esto da como resultado que el volumen del petróleo del reservorio sea mayor que el volumen del petróleo a condiciones estándares. Para considerar este fenómeno, las compañías envían sus petróleos de los distintos yacimientos a laboratorios especializados para hacer estas mediciones. El laboratorio reporta los barriles del petróleo a condiciones del reservorio que se requieren para obtener 1 barril de petróleo a condiciones estándares, es decir, β_o bblres/stb o rb/stb, conocido como “factor de formación del petróleo”.

$$1stb = xrb / \beta_o$$

$$\beta_o = xrb / stb \text{ (Barriles a condiciones de reservorio / barril stock tank).}$$

$$\beta_o \geq 1 \text{ Para los petróleos; } \beta_o \approx 1 \text{ para el agua incompresible, no gas disuelto.}$$

Factores de conversión convenientes:

$$1 \text{ atm} = 14.7 \text{ psi}$$

$$30.48 \text{ cm} = 1 \text{ pie}$$

$$86400 \text{ seg} = 1 \text{ día}$$

$$3600 \text{ seg} = 1 \text{ hr}$$

$$1 \text{ darcy} = 1000 \text{ md}$$

$$1 \text{ bbl} = 5.6146 \text{ pie}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 \text{ o } 1 \text{ cc (del inglés cubic centimeter)} = 6.2898 \text{ E-6 bbl}$$

bbl o stb: barriles estándares

rb o bblres: barriles de reservorio

Para evaluar la constante en ecuación 2.18 B, se debe recordar que las ecuaciones deben estar balanceadas. Así, si q en la ecuación Darcy es, digamos 200 cm^3 a condiciones de reservorio/seg, entonces el lado izquierdo de la ecuación de campo debe también tener el valor numérico de 200, aun cuando q en este caso está en stb/d, esto es:

$$q(stb/d) \times [\text{factor de conversión}] = q(cm^3 res/seg)$$

lo cual es satisfecho por:

$$q(stb/d) \times \left[\frac{cm^3 res/seg}{stb/d} \right] = q(cm^3 res/seg)$$

Esto preserva el balance del lado izquierdo de ambas ecuaciones. El factor de conversión podemos expandirlo como:

$$\left[\frac{cm^3 res/seg}{stb/d} \right] = \left[\frac{cm^3 res/seg}{rb/d} \right] \left(\frac{rb}{stb} \right) = \left(\frac{10^6 cm^3}{6.2898rb} \right) \left(\frac{1dia}{86400seg} \right) \beta_0 \left(\frac{rb}{stb} \right) = 1.84\beta_0$$

Aplicando el método a todos los términos evaluaremos los factores de conversión pertinentes y finalmente obtendremos el valor de la constante en Ec. 2.18B. Entonces,

$$q \frac{stb}{d} \left[\frac{cm^3 res/seg}{bbl/d} \right] \left[\frac{rb}{stb} \right] = - \frac{k(md) \left[\frac{d}{md} \right] \times A(pie^2) \left[\frac{cm^2}{pie^2} \right]}{\mu(cp)} \times \frac{dp}{dL} \left(\frac{psi}{pie} \right) \left[\frac{atm/psi}{cm/pie} \right]$$

Las expresiones dentro de los paréntesis rectos son factores de conversión que debemos introducir. Además de $1,84\beta$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{md} \right] &= \frac{1}{1000} \\ \left[\frac{cm}{pie} \right] &= 30.48 \quad y \\ \left[\frac{atm}{psi} \right] &= \frac{1}{14.7} \end{aligned}$$

La ecuación en unidades de campo viene a quedar:

$$q \frac{stb}{d} = - \frac{\left(\frac{1}{1000} \right) (30.48^2) \left(\frac{1}{14.7} \right) k(md) A(pie^2) dp}{(1.84\beta_0)(30.48) \mu(cp) dL pie} \frac{psi}{pie}$$

$$q = -1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu\beta_0} \frac{dp}{dL}, (stb/d) \quad \text{Ec. 2.22}$$

Problemas de conversión:

Problema 2.3

1.- Cual es el factor de conversión entre k , expresada en darcies, y en cm^2 y m^2 , respectivamente ¹.

2.- Convierta la ecuación 2.20 a unidades de campo ¹

$$q = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{dp}{dL} + \frac{\rho g}{1.0133 \times 10^6} \frac{dz}{dL} \right) \quad \text{Ec. 2.20}$$

Solución:

1. Para poder responder la pregunta 1 partamos del flujo horizontal, lineal, de un fluido incompresible, en unidades Darcy,

$$q(\text{cc / seg}) = -\frac{k(D)A(\text{cm}^2)}{\mu(\text{cp})} \frac{dp}{dL} \left(\frac{\text{atm}}{\text{cm}} \right), \quad \text{Unidades Darcy}$$

y

$$q(\text{cc / seg}) = -\frac{k(\text{cm}^2)A(\text{cm}^2)}{\mu(\text{poise})} \frac{dp}{dL} \left(\frac{\text{dinas/cm}^2}{\text{cm}} \right), \quad \text{Unidades cgs absolutas}$$

La primera de estas ecuaciones (en unidades Darcy) puede ser convertida a unidades cgs balanceado ambos lados de la ecuación resultante, como sigue:

$$q(\text{cc / seg}) = -\frac{k(\text{cm}^2) \left[\frac{D}{\text{cm}^2} \right] A(\text{cm}^2)}{\mu(\text{poise}) \left[\frac{\text{cp}}{\text{poise}} \right]} \frac{dp}{dL} \left(\frac{\left(\frac{\text{dinas/cm}^2}{\text{cm}} \right) \left[\frac{\text{atm}}{\text{dinas/cm}^2} \right]}{\text{cm}} \right)$$

y evaluando los factores de conversión

$$q = -\frac{k(\text{cm}^2) \left[\frac{D}{\text{cm}^2} \right] A(\text{cm}^2)}{\mu(\text{poise}) 100 \frac{\text{cp}}{\text{poise}}} \frac{dp}{dL} \left[\frac{\left(\frac{\text{dinas/cm}^2}{\text{cm}} \right) \left(\frac{1}{1.0133 \times 10^6} \right) \left(\frac{\text{atm}}{\text{dinas/cm}^2} \right)}{\text{cm}} \right]$$

de donde,

$$q = -\frac{k \left[\frac{D}{\text{cm}^2} \right] A}{1.0133 \times 10^{-8} \mu} \frac{dp}{dL}$$

El único factor de conversión que no conocemos es el de Darcy a cm^2 y para que esta ecuación quede en unidades cgs, la conversión debe ser:

$$\left[1.0133 \times 10^8 \frac{D}{\text{cm}^2} \right]$$

Al sustituir este factor de D/cm^2 en la última ecuación, se obtendrá:

$$q(\text{cc} / \text{seg}) = - \frac{k(\text{cm}^2) A(\text{cm}^2)}{\mu(\text{poise})} \frac{dp}{dL} \left(\frac{\text{dinas} / \text{cm}^2}{\text{cm}} \right), \text{ en unidades cgs}$$

¿Cuántos cm^2 hacen un Darcy?

$$1.0133 \times 10^8 \text{ darcy} \leftrightarrow 1 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ darcy} \leftrightarrow X$$

$$X = \frac{1}{1.0133 \times 10^8} \cong 1 \times 10^{-8} \text{ cm}^2$$

Así pues, $1 \text{ darcy} \approx 1 \times 10^{-8} \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2$

2. La conversión de unidades Darcy a unidades de campo de la primera parte de la ecuación de flujo (ec. 2.20) ya fue deducida y es:

$$q = -1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu B_o} \frac{dp}{dL} \quad \text{Ec. 2.22}$$

Convertir la segunda parte que tiene el término de la gravedad, usando la manera convencional descrita anteriormente, es algo tedioso pero, puede fácilmente lograrse de una manera intuitiva. El segundo término, $(\rho g / 1.0133 \times 10^6) dz/dL$, debe, luego de la conversión a unidades de campo, tener las unidades de psi/pie. La única variable involucrada en este último término es ρ , la densidad del fluido. Si ésta es expresada como una gravedad específica γ , entonces, puesto que el agua tiene un gradiente de presión vertical de 0.4335 psi/pie, el término de gravedad puede expresarse como:

$$0.4335 \gamma \frac{dz}{dL} \left(\frac{\text{psi}}{\text{pie}} \right)$$

El término $0,4335\gamma$ representa el gradiente del fluido. Adicionalmente, adoptando la convención de signo la cual será utilizada en este texto, si z es medido positivamente en la dirección vertical, hacia arriba, como se muestra en la figura 2.2, y si θ es el ángulo

medido en contra el movimiento de las manecillas del reloj desde la horizontal hasta la dirección de flujo, entonces:

$$\frac{dz}{dL} = \text{sen}\theta$$

y la ecuación completa, en unidades de campo, viene a quedar ⁴:

$$q = -1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu B_o} \left(\frac{dp}{dL} + 0.4335 \gamma \text{sen}\theta \right) \quad \text{Ec. 2.23}$$

2.6. POTENCIAL REAL DEL GAS

La función del potencial del fluido fue definida, en unidades absolutas, como ¹

$$\Phi = \int_0^p \frac{dp}{\rho} + gz \quad \text{Ec. 2.24}$$

y para un fluido incompresible ($\rho = \text{constante}$) como

$$\Phi = \frac{p}{\rho} + gz \quad \text{Ec. 2.25}$$

Se considera generalmente que los líquidos tienen poca compresibilidad, lo mismo no puede sostenerse para los gases y por lo tanto, es importante investigar la aplicación de la función potencial a la descripción del flujo de gas.

La densidad de un gas real puede expresarse (en unidades absolutas) como:

$$\rho = \frac{Mp}{ZRT}$$

y sustituyendo esto en la ec. 2.24 se obtiene el potencial del gas como:

$$\Phi = \frac{RT}{M} \int_0^p \frac{Z}{p} dp + gz$$

Pero, ya que

$$d\Phi = \frac{RT}{M} \frac{Z}{p} dp + g dz = \frac{dp}{\rho} + g dz$$

Entonces, el gradiente del potencial del gas en la dirección de flujo es:

$$\frac{d\Phi}{dL} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dL} + g \frac{dz}{dL}$$

y la ecuación de Darcy para flujo lineal es,

$$u = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dL} + g\rho \frac{dz}{dL} \right) \quad \text{Ec. 2.26}$$

Lo de arriba nuevamente indica que el flujo de gas real puede describirse usando precisamente la misma forma de ecuaciones que para un líquido incompresible.

2.7. PRESIÓN AL PLANO DE REFERENCIA O DATUM

Una manera alternativa de expresar el potencial de cualquier fluido es:

$$\Psi = \rho\Phi = p + \rho gz \quad \text{Ec. 2.27}$$

Donde Ψ es el potencial-psi y tiene unidades de potencial por unidad de volumen.

Usando esta función, la ley de Darcy se convierte en:

$$q = -\frac{kA\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} = -\frac{kA}{\mu} \frac{d\Psi}{dL} \quad \text{Ec. 2.28A}$$

El potencial Ψ también es frecuentemente referido como la “presión al datum”, ya que la función representa la presión a cualquier punto en el yacimiento referida al plano datum o plano de referencia, como se ilustra en la figura 2.7.

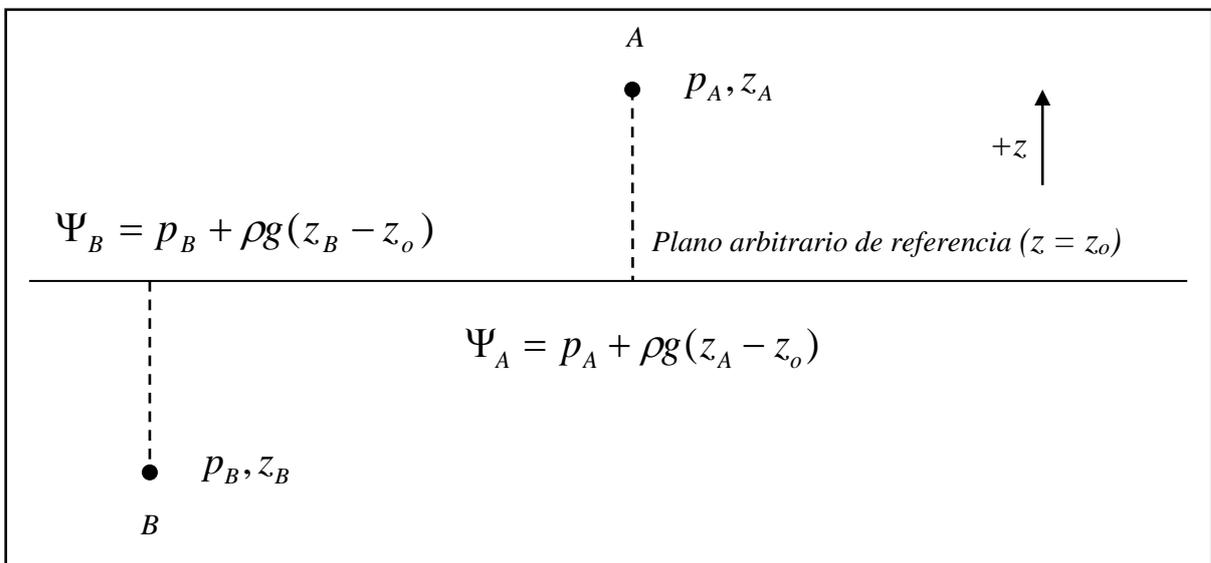


Figura 2.7: Presión al Datum ¹

Suponga que las presiones son medidas en dos pozos, A y B, en un yacimiento en el cual un plano arbitrario de referencia ha sido seleccionado a $z = z_0$. Si las presiones son medidas con respecto a una presión datum de cero, entonces como es mostrado en la

figura, los valores calculados de Ψ_A y Ψ_B son simplemente las presiones observadas en los pozos referidas al plano datum, esto es:

$$\Psi_A = (\text{presión absoluta})_A + (\text{cabeza de la gravedad})_A \quad \text{Ec. 2.28B}$$

En un sentido práctico es muy útil referir las presiones medidas en los pozos a un nivel datum y mapear la distribución de las presiones al datum del yacimiento entero. De esta manera la distribución del potencial y por lo tanto la dirección del movimiento del fluido en el yacimiento puede apreciarse de un vistazo puesto que la distribución de la presión datum es equivalente a la distribución del potencial.

Problema 2.4

Este problema, adaptado de Craft and Hawkins⁵ y aquí extendido, ilustra muy bien la aplicación teórica de las ecuaciones de flujo arriba indicadas. Cálculo de las presiones referidas al nivel del datum, gradientes de presión y flujo en el yacimiento, a partir de mediciones de presión estática en los pozos.

Dados:

- Distancia entre pozos (figura 2.8) = 1320 pies
- Espesor verdadero del estrato = 20 pies
- Buzamiento del estrato entre los pozos = 8° 37'
- Nivel arbitrario del datum del yacimiento = 7600 pies SS (debajo del mar, del inglés SubSea).
- Gravedad específica del fluido en el yacimiento = 0.693 (agua = 1.0)
- Permeabilidad del yacimiento = 145 md
- Viscosidad del fluido en el yacimiento = 0.32 cp

Desarrollo

Un dibujo del problema con los datos proporcionados siempre es útil para la comprender y facilitar la solución del problema.

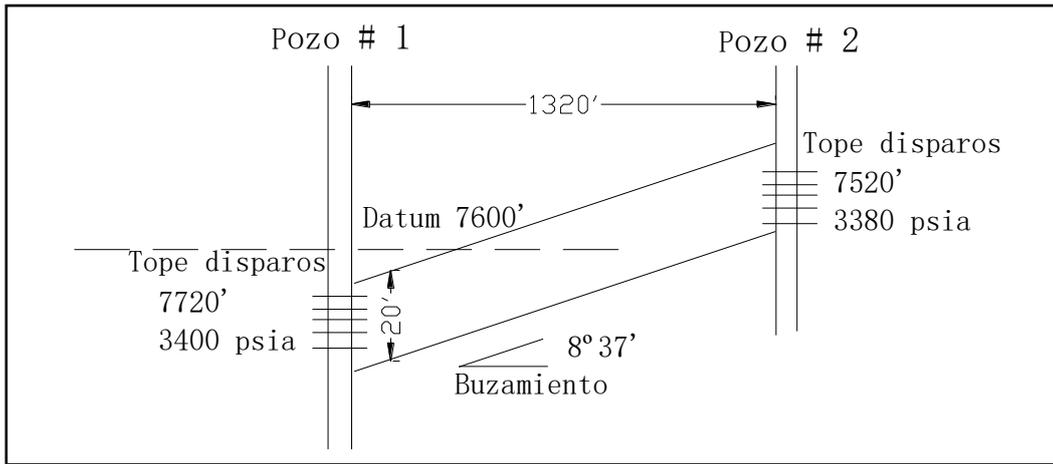


Figura 2.8: Gráfico de Datos del problema 2.4

Presión estática pozo # 1 = 3400 psia @ 7720' SS

Presión estática pozo # 2 = 3380 psia @ 7520' SS

Gradiente del fluido en el yacimiento = 0.693 (0.433) = 0.300 psi/pie

Nótese que en la figura 2.7 que trata sobre el plano de referencia, z es positiva para arriba. En este problema la profundidad ha sido asumida positiva hacia abajo. En este caso en la expresión del cálculo de la presión al datum, el signo del segundo término del lado derecho de la ecuación 2.28B debe ser negativo.

$$p_1 \text{ al datum de } 7600' = 3400 - 0.300(7720 - 7600) = 3364 \text{ psia} \quad \text{Ec. 2.28B}$$

$$p_2 \text{ al datum de } 7600' = 3380 - 0.300(7520 - 7600) = 3404 \text{ psia}$$

La diferencia de presión de 40 psi al datum en favor del pozo p₂ indica que el fluido está moviéndose buzamiento abajo desde el pozo 2 hacia el pozo 1, no obstante la presión estática en pozo 1 es mayor que en pozo 2.

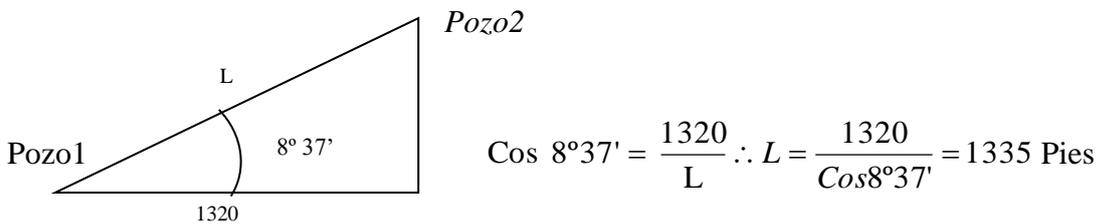


Fig. 2.8A. Muestra el eje de flujo (hipotenusa L)

El gradiente efectivo promedio a lo largo del eje de flujo es

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = 40/1335 = 0.030 \text{ psi/pie.}$$

La velocidad es entonces:

$$v = 1.127 \frac{k \Delta p}{\mu \Delta L} = 1.127 \frac{0.145}{0.32} (0.030)$$

$$v = 0.0153 \text{ Bblres/día/pie}^2,$$

$$v = 5.615(0.0153) = 0.086 \text{ pie/día, a condiciones de reservorio.}$$

Solución alternativa usando la Ec. 2.23. Inicialmente no conozco cual sería la dirección de flujo, así que asumo que esta es desde pozo 1 al pozo 2. Entonces $\theta = 8^\circ 37'$ (Nótese que si asumiera que el flujo ocurre desde pozo 2 a pozo 1, el ángulo sería de $188^\circ 37'$)

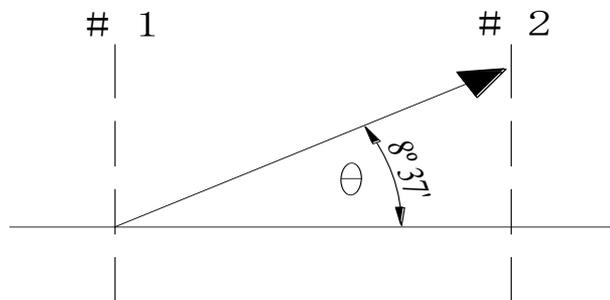


Fig. 2.8B. Ilustración del ángulo Θ

$$v = -1.127 \times 10^{-3} \frac{k}{\mu \beta_o} \left(\frac{dp}{dL} + 0.4335 \gamma \text{Sen} \theta \right), \text{ a condiciones de estándares}$$

$$v = -1.127 \times 10^{-3} \frac{145}{0.32} \left(\frac{3380 - 3400}{1335} + 0.4335 \times 0.693 \times 0.1498 \right), \text{ condiciones de}$$

reservorio

$$v = -0.511(-0.015 + 0.045)$$

$$v = -0.0153 \text{ Bblres/día/pie}^2$$

$$v = -5.615(0.0153) = -0.086 \text{ pie/día}$$

El signo negativo indica que el fluido está fluyendo en la dirección contraria a la asumida, esto es, está fluyendo desde el pozo # 2 al pozo # 1.

Otros análisis del problema son:

La tasa de flujo a través de una superficie transversal a la dirección de flujo, de 1320' de ancho x 20 de espesor del modelo de prisma con base rectangular del yacimiento es:

$$q = vA = (0.0153)(1320 \times 20) = 404 \text{ bblres/día}$$

Si la k hubiera sido 290 md, el doble, y la viscosidad 0.64 cp, también el doble, la velocidad y la tasa de flujo permanecerían sin cambiar, debido a que la razón $\frac{k}{\mu}$ no varía. En otras palabras la velocidad y el gradiente de presión están relacionados por la “movilidad” la cual es la razón de permeabilidad a viscosidad, $\frac{k}{\mu}$, símbolo λ .

El factor $\left(\frac{dp}{dL} + 0.4335\gamma \text{Sen}\theta \right)$ es la fuerza de empuje, compuesta del gradiente de presión del fluido, $\frac{dp}{dL}$ y el gradiente gravitacional o hidráulico, $0.4335\gamma \text{Sen}\theta$.

Nótese que $\frac{dp}{dL}$ debería ser igual a 0.045 psi/pie en valor absoluto, para que no exista flujo. Si $\frac{dp}{dL} > 0.045$ psi/pie en valor absoluto, el flujo se invertirá, y será desde pozo # 1 hacia pozo # 2. También, si el ángulo de buzamiento cambiara, puede que también cambie la dirección de flujo.

2.8. SISTEMAS DE FLUJO CONTINUO

En sistemas de estado continuo (steady state), la tasa de flujo y la presión en cada punto del sistema se ajustan instantáneamente a un cambio en la presión o tasa de flujo en cualquier parte del sistema, de modo que $q(r,t) = \text{cte}$ y $\frac{dp}{dt} = 0$ a cualquier radio.

En las figuras 2.9, 2.10 y 2.11 se puede apreciar el comportamiento de p vs r y p vs t , para una tasa constante.

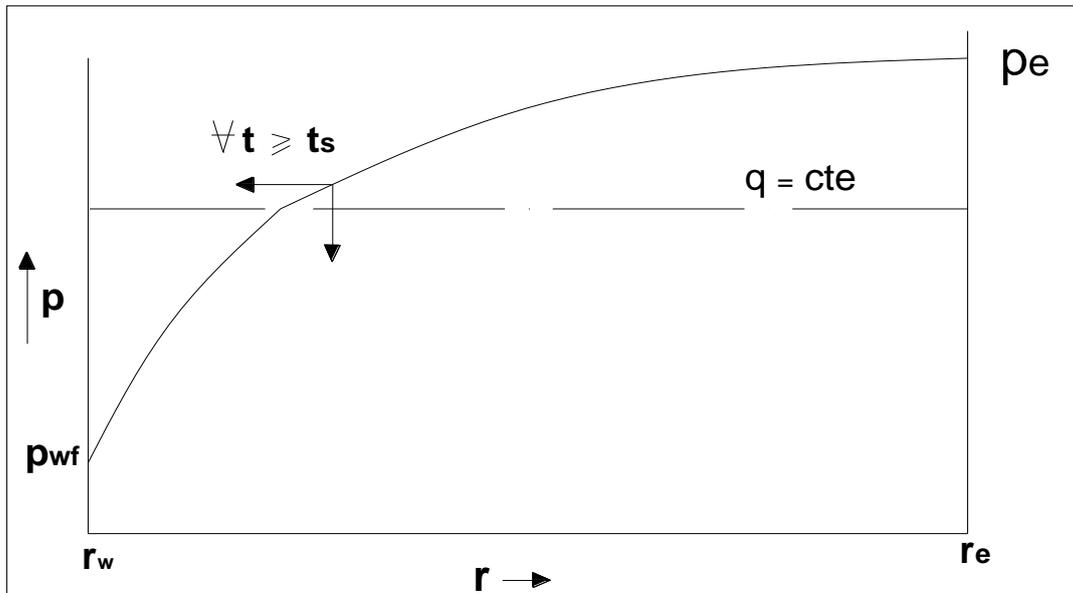


Figura 2.9: Comportamiento ideal de la p y q vs radio, flujo de estado continuo.

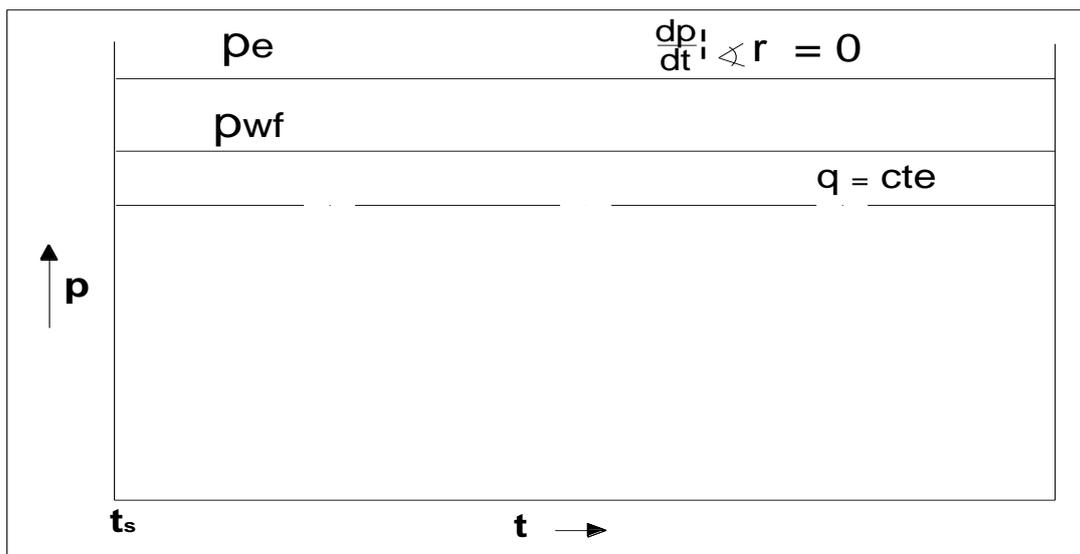


Figura 2.10: Comportamiento ideal de p y q con tiempo, flujo de estado continuo

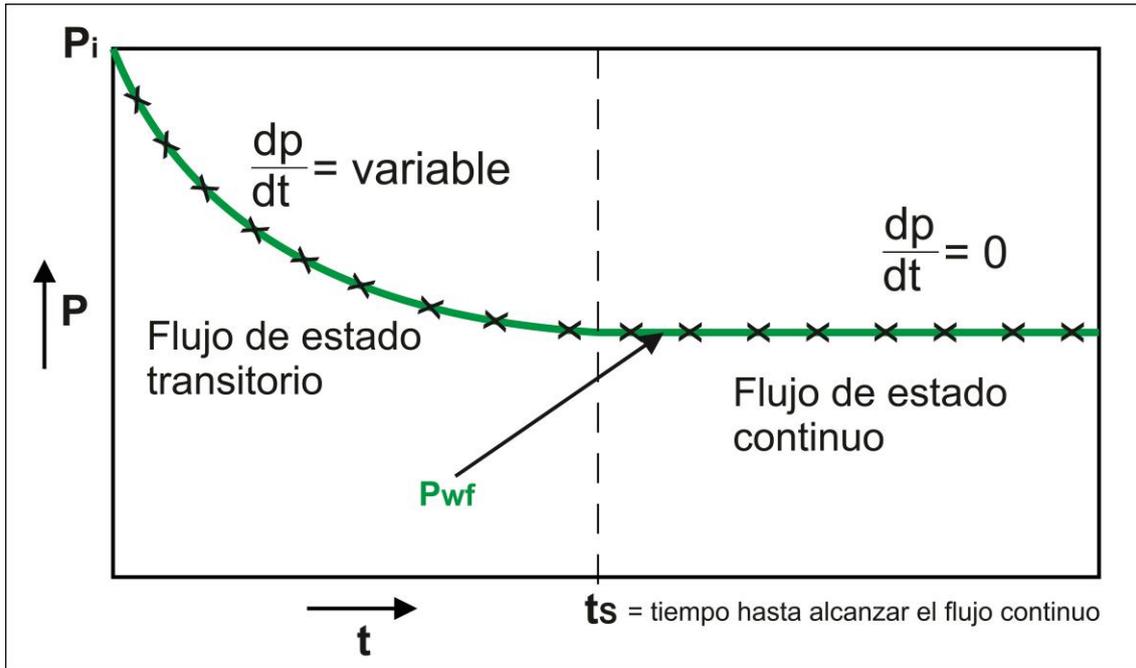


Figura 2.11: Comportamiento de un fluido ligeramente compresible con influjo fuerte al contorno (frontera) exterior.

En resumen, el comportamiento de un fluido, compresible o incompresible, que exhibe presión constante en función del tiempo y q también constante a cualquier radio o tiempo, corresponde a un flujo de estado continuo (steady state). Es importante tener en cuenta que si bien estamos hablando de $p(t) = \text{constante}$, la presión en función del radio no puede ser la misma porque si así fuera no habría caída de presión y por lo tanto, no habría flujo.

En la práctica, en un yacimiento de petróleo o gas que produce bajo el empuje de un acuífero natural o inyección de agua para mantenimiento de presión, el flujo se aproxima a uno de estado continuo.

En los capítulos siguientes desarrollaremos las ecuaciones para flujo de estado transitorio, que aparece temprano sea el yacimiento cerrado o abierto.

2.9. ECUACIÓN DE FLUJO PARA FLUIDO INCOMPRESIBLE, FLUJO CONTINUO ⁴

A. FLUJO LINEAL.

$$u = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} \quad \text{Ec. 2.16}$$

$u = \text{velocidad} = q/A$

$q = \text{tasa volumétrica de flujo, } L^3/t$. Tratándose de un fluido incompresible, q es igual en cualquier parte del yacimiento, es decir, $q(L) = \text{cte}$.

$A = \text{área transversal al flujo, } L^2$

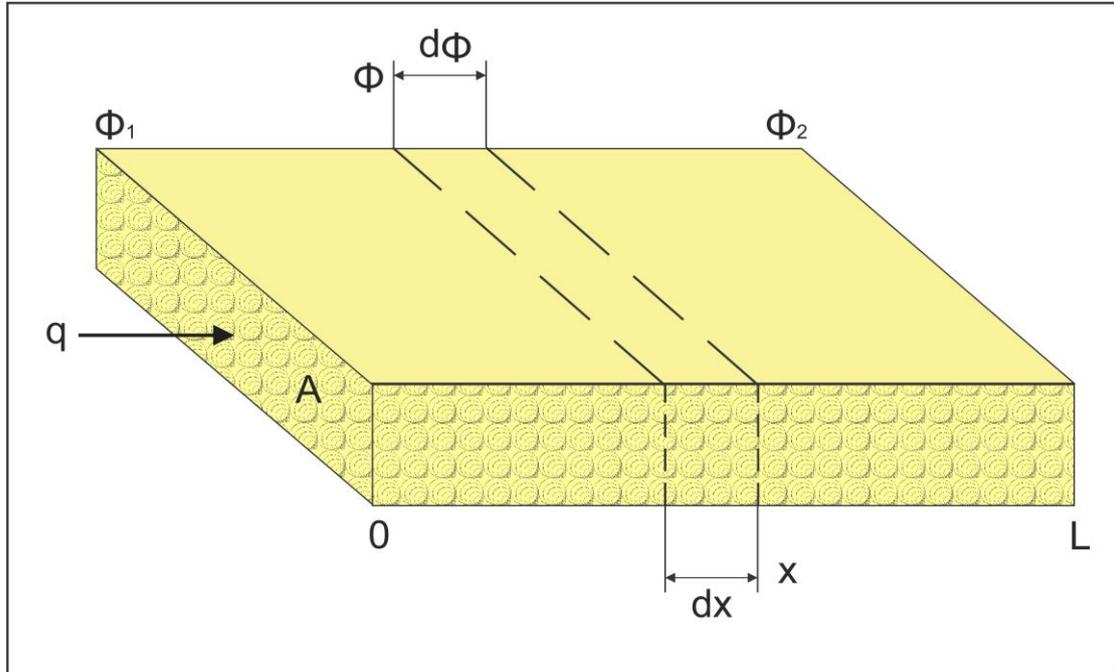


Figura 2.12: Flujo de fluido incompresible, flujo continuo.

$$\frac{q}{A} = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dL} \quad \text{Ec. 2.29}$$

Si el fluido es incompresible y $\Phi = \int_{p_b}^p \frac{dp}{\rho} + g(z - z_b)$

$$d\Phi = \frac{dp}{\rho} + g(dz) \quad \text{Ec. 2.30}$$

Si $p_b = \text{presión base}$ y z_b altura de la referencia base, z positivo hacia arriba,

$$q = -\frac{kA\rho}{\mu} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dL} + \frac{g(dz)}{dL} \right)$$

Para flujo inclinado: $q = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{dp}{dL} + \frac{g\rho(dz)}{dL} \right)$ Ec. 2.31

Para flujo horizontal: $\frac{dz}{dL} = 0$

$$q = -\frac{kA}{\mu} \frac{dp}{dL} \quad \text{Ec. 2.32}$$

$$q \int_0^L dL = \int_{p_1}^{p_2} -\frac{kA}{\mu} dp$$

$$q(L-0) = -\frac{kA}{\mu} (p_2 - p_1), \text{ asumiendo } k \text{ y } \mu \text{ constantes}$$

$$q = -\frac{kA}{\mu} \frac{(p_2 - p_1)}{L}$$

$$q = -1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu \beta_o} \frac{p_2 - p_1}{L}, \text{ en unidades de campo}$$

ó

$$q = -1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu \beta_o} \frac{dp}{dL} \quad \text{Ec. 2.22}$$

B. FLUJO RADIAL

$$u = \frac{k\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{Ec. 2.33}$$

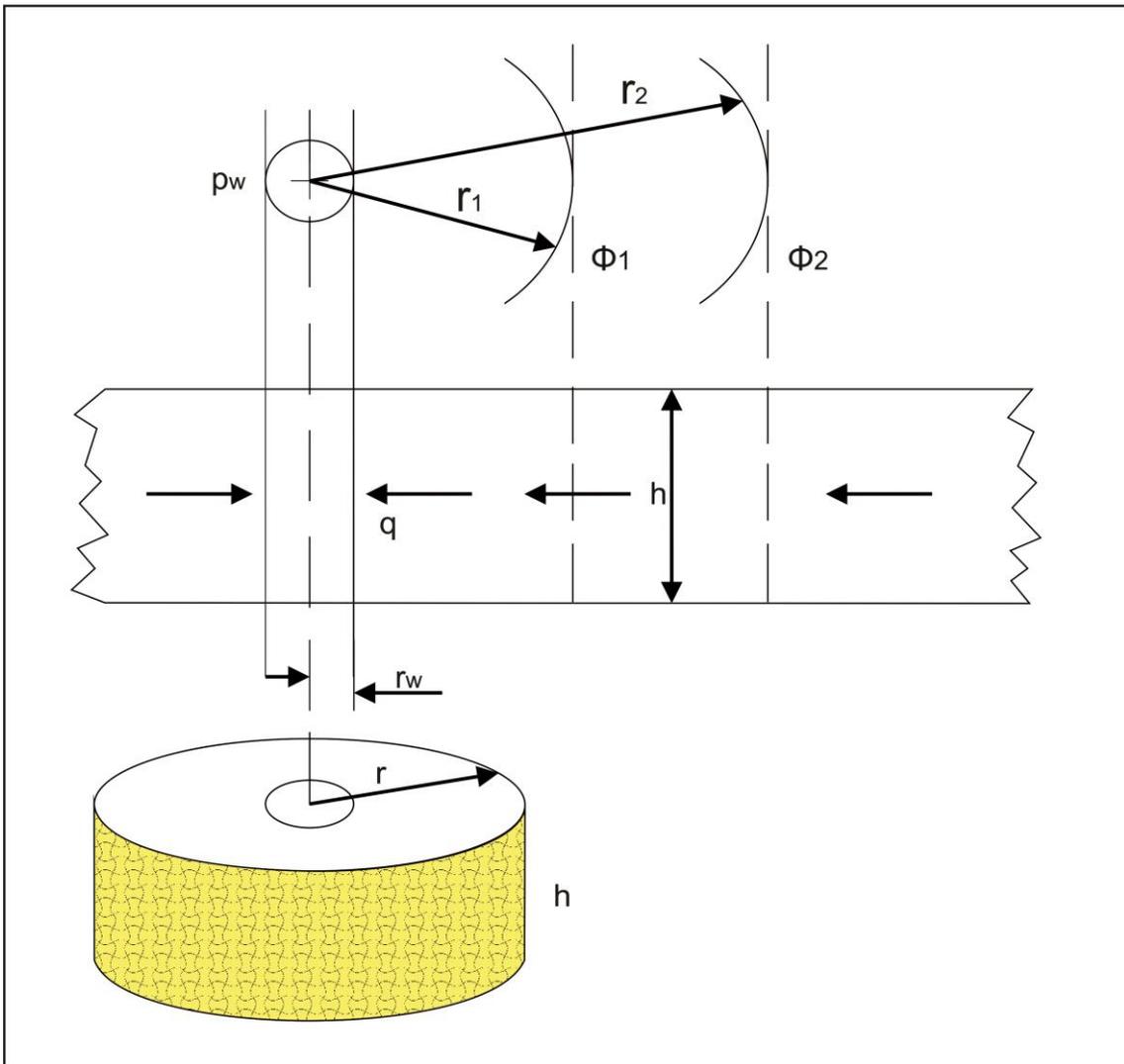


Fig. 2.13: Flujo radial, horizontal, fluido incompresible

$$q = \frac{kA\rho}{\mu} \frac{d\Phi}{dr} \quad \text{Ec. 2.34}$$

Para flujo inclinado: $q = k(2\pi rh) \frac{\rho}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\rho \partial r} + g \frac{dz}{dr} \right]$

Para flujo horizontal: $\frac{dz}{dr} = 0$, flujo horizontal y

$$q = k(2\pi rh) \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\rho \partial r}$$

$$q \frac{dr}{r} = \frac{2\pi hk}{\mu} \partial p$$

$$q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{2\pi hk}{\mu} \int_{p_1}^{p_2} \partial p$$

$$q \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi hk}{\mu} (p_2 - p_1)$$

$$q = \frac{2\pi hk}{\mu} \frac{(p_2 - p_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad \begin{array}{l} \text{Fluido incompresible} \\ \text{(Flujo de estado} \\ \text{continuo),} \\ \text{Flujo horizontal} \end{array} \quad \text{Ec. 2.35}$$

$$q = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k(2\pi h)}{\mu\beta} \frac{(p_2 - p_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \text{ en unidades de campo} \quad \text{Ec. 2.36}$$

$$q = 7.08 \times 10^{-3} \frac{kh}{\mu\beta} \frac{(p_2 - p_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \text{Ec. 2.37}$$

$$q = \frac{kh}{141.2\mu\beta} \frac{(p_i - p_{wf})}{\ln \frac{r_e}{r_w}} \quad \text{Ec. 2.37A}$$

donde

- p_i = presión inicial, psia
- p_{wf} = presión de flujo al pozo, psia
- r_e = radio externo del yacimiento, pies
- r_w = radio del pozo, pies

$$p_i - p_{wf} = 141.2 \frac{q\mu\beta}{kh} \ln \frac{r_e}{r_w}, \quad \begin{array}{l} \text{Flujo radial, continuo, horizontal,} \\ \text{fluido incompresible.} \end{array} \quad \text{Ec. 2.37B}$$

Y,

$$p = p_i - 141.2 \frac{q\mu\beta}{kh} \ln \frac{r_e}{r_w}, \quad \text{Ec. 2.37C}$$

A continuación veremos que esta misma ecuación será aplicable para fluido ligeramente compresible.

2.10. APLICACION DE LA ECUACIÓN DE DARCY A UN LÍQUIDO LIGERAMENTE COMPRESIBLE, FLUJO CONTINUO.

Un líquido compresible es algunas veces definido como uno cuyo cambio de volumen con presión es bien pequeño. La ecuación del volumen de líquido a una presión p dada es posible partiendo de la definición de la compresibilidad c :

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right)_{T=cte} \quad \text{Ec. 2.38}$$

Integrando los diferenciales de volumen y presión entre sus límites y asumiendo una compresibilidad promedio en el rango de presiones de interés, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{p_i}^p -c dp &= \int_{V_i}^V \frac{dV}{V} \\ c(p_i - p) &= \ln V - \ln V_i \\ c(p_i - p) &= \ln \left(\frac{V}{V_i} \right) \\ e^{c(p_i - p)} &= \frac{V}{V_i} \\ V &= V_i e^{c(p_i - p)} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.39}$$

Pero e^x puede representarse como la serie:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Cuando x es pequeña, los primeros dos términos, $1 + x$, serán suficientes; y cuando el exponente x es $c(p_i - p)$, se tiene que:

$$V = V_i [1 + c(p_i - p)] \quad \text{Ec. 2.40}$$

También

$$q\beta = q_R [1 + c(p_R - p)] \quad \text{Ec. 2.41}$$

donde $q = stb / día$,

$\beta = rb / stb$, $q\beta =$ tasa de flujo a la presión p (y temperatura T del yacimiento).

$q_R =$ tasa de flujo a la presión p_R de referencia (y temperatura T del yacimiento).

En unidades de campo, para líquidos incompresibles, flujo horizontal y lineal se tiene:

$$q = -1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu\beta_o} \frac{dp}{dL} \quad \text{Ec. 2.21}$$

Y para flujo radial,

$$q = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k(2\pi hr)}{\mu\beta} \frac{dp}{dr} \quad \text{Ec. 2.21A}$$

Reemplazando en esta expresión de q la expresión del lado derecho de ec. 2.41 que toma en cuenta el cambio de volumen por efecto de la compresibilidad del fluido, se tiene que para un líquido ligeramente compresible (y de compresibilidad promedia en el rango de presiones):

$$q_R [1 + c(p_R - p)] = -1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu} \frac{dp}{dL}$$

$$\frac{q_R}{A} \int_0^L dL = \frac{-1.127 \times 10^{-3} k}{-c} \frac{1}{\mu} \int_{p_1}^{p_2} \frac{(-c) dp}{1 + c(p_R - p)}$$

$$q_R = 1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu L c} \ln \frac{1 + c(p_R - p_2)}{1 + c(p_R - p_1)} \quad \text{Ec. 2.42}$$

Esta integración asume una compresibilidad constante en toda la caída de presión. Por ejemplo ⁴, bajo una presión diferencial de 100 psi para una permeabilidad de 250 md, una viscosidad del fluido de 2.5 cp, una longitud de 450 pies, un área seccional de 45 pies², una compresibilidad de 65x 10⁻⁶ psi⁻¹, y escogiendo la presión p₁ como la presión de referencia, la tasa de flujo es:

$$q_1 = \frac{1.127 \times 10^{-3} (250)(45)}{(2.5)(450)(65 \times 10^{-6})} \ln \left[\frac{1 + 65 \times 10^{-6} (p_1 - p_2)}{1} \right]$$

$$q_1 = 1.123 \text{ bbl res/día, a la presión } p_1$$

Cuando se compara con el cálculo de la tasa de flujo para líquido incompresible que sigue la ecuación 2.22, con $\beta = 1.127 \text{ rb/stb}$ se tiene:

$$q_1 = \frac{1.127 \times 10^{-3} (250)(45)(100)}{(2.5)(1.127)(450)} = 1.0 \text{ stb/d}$$

Resulta que q₁ es algo diferente debido a la asunción de un fluido ligeramente compresible en los cálculos en vez de un fluido incompresible.

Si escogiéramos p_2 como la presión de referencia, entonces:

$$q_2 = 1.131 \text{ bbl/día, a la presión } p_2$$

Los cálculos demuestran que q_1 y q_2 no son muy diferentes, lo que confirma que para fluidos ligeramente compresibles el volumen no es una marcada función de presión y pueden, por consiguiente, ser representados por la ecuación para fluidos incompresibles, siempre que las presiones se mantengan constantes en el tiempo $dp/dt = 0$.

Problema 2.5

Un pozo produce petróleo a una tasa de flujo constante de 20 m³ stock tank por día (stm³/d). Usar los siguientes datos para calcular la permeabilidad en mili Darcy (mD).

Datos:

- Porosidad, ϕ = 20 %
- Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o = 1.28 rm³/stm³ (m³ res. por m³ stock tank o estándares)
- Espesor neto de formación, h = 35 m
- Viscosidad del petróleo, μ = 21x10⁻³ Pa.s
- Radio de pozo, r_w = 0,15 m
- Radio externo, r_e = 340 m
- Presión externa del yacimiento, P_e = 96.00 bar (constante)
- Presión fluuyente al pozo, P_{wf} = 91.00 bar

Solución:

Asumiendo flujo continuo (Steady State), la ecuación de Darcy empleando la presión externa del yacimiento y unidades en un solo sistema (S.I.) es:

$$q = \frac{2\pi kh(P_e - P_{wf})}{\beta\mu \cdot \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} \quad \text{Ec. 2.35}$$

$$k = \frac{q\beta\mu}{2\pi(P_e - P_{wf})h} \cdot \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)$$

$$k = \frac{(2.314 \times 10^{-4})(1.28)(21 \times 10^{-3})}{2\pi(96 - 91)(10^5)(35)} \cdot \ln\left(\frac{340.00}{0.15}\right)$$

$$k = 437 \times 10^{-15} m^2$$

$$k = 437 mD$$

- $q = 20 \frac{stm^3}{día}$

$$q = 20 \frac{stm^3}{día} \times \frac{1día}{24h} \times \frac{1h}{3600seg} = 2.314 \times 10^{-4} \frac{stm^3}{seg}$$

- $1bar = 10^5 Pa$

$$P_i = 96bar = 96 \times 10^5 Pa$$

$$P_{wf} = 91bar = 91 \times 10^5 Pa$$

Problema 2.6

Un pozo de petróleo produce con una tasa de flujo de $10 \text{ stm}^3/\text{día}$, en un yacimiento con una presión promedio de 130.00 bar . Usar los siguientes datos para calcular la permeabilidad del yacimiento.

Datos:

- Porosidad, ϕ = 22 %
- Factor volumétrico de formación = $1.34 \text{ rm}^3/\text{stm}^3$ (m^3 de del petróleo, β_o reservorio por m^3 stock tank o estándares)
- Espesor neto de formación, h = 20 m
- Viscosidad del petróleo, μ = $12 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$
- Radio de pozo, r_w = 0,15 m
- Radio externo, r_e = 200 m
- Presión promedio del yacimiento, \bar{P} = 133.00 bar (constante)
- Presión de fondo fluyente, P_{wf} = 126.00 bar

Solución:

Asumiendo que el yacimiento es abierto y el tipo de flujo que se produce es de estado continuo, empleando la presión promedio del yacimiento \bar{P} , la ecuación de Darcy que representa el flujo en el yacimiento es la ecuación 4.97 que se presenta en el Capítulo 4 del texto y que en unidades SI es escrita a continuación

$$q = \frac{2\pi kh(\bar{P} - P_{wf})}{\beta\mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} \right)}, \quad \text{Ec. 4.97 en unidades SI.}$$

$$k = \frac{q\beta\mu}{2\pi(\bar{P} - P_{wf})h} \cdot \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} \right)$$

$$k = \frac{(1.157 \times 10^{-4})(1.34)(12 \times 10^{-3})}{2\pi(133.00 - 126.00)(10^5)(20)} \cdot \left(\ln \frac{200}{0.15} - \frac{1}{2} \right)$$

$$k = 141.5 \times 10^{-15} m^2$$

$$k = 141.5 \text{ mD}$$

- $q = 10 \frac{stm^3}{día}$

$$q = 10 \frac{stm^3}{día} \times \frac{1día}{24h} \times \frac{1h}{3600seg} = 1.157 \times 10^{-4} \frac{stm^3}{seg}$$

- $1bar = 10^5 Pa$

$$\bar{P} = 133bar = 133 \times 10^5 Pa$$

$$P_{wf} = 126bar = 126 \times 10^5 Pa$$

Problema 2.7

Un yacimiento circular y pozo en el centro con las siguientes características, produce con una presión de fondo fluyente $P_{wf} = 1088 \text{ psi}$. Asumir que la presión del yacimiento se encuentra soportada por un acuífero (flujo continuo).

Porosidad, ϕ	=	28 %
Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o	=	1.35 rb/STB
Espesor neto de formación, h	=	49 pies
Viscosidad del petróleo, μ	=	21 cp
Radio de pozo, r_w	=	0,49 pies
Radio externo, r_e	=	820 pies
Presión inicial del yacimiento, P_i	=	1204 psi
Permeabilidad, k	=	125 mD

a) Calcular el caudal de flujo q en STB/día.

- b) Calcular y graficar la presión del yacimiento a diferentes distancias r con respecto al pozo (P vs r), asumiendo que la presión de fondo fluyente P_{wf} se mantiene constante. Emplear intervalos de 50 pies.
- c) ¿En qué sección del yacimiento ocurre la mayor caída de presión? Justifique el motivo de su respuesta.

Solución:

- a) Para un yacimiento abierto con empuje hidráulico, la ecuación de flujo en unidades de campo es:

$$q = 1.127 \times 10^{-3} \frac{2 \pi k h}{\mu \beta_o \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} (P_e - P_{wf}) \quad \text{Ec. 2.36}$$

$$q = 1.127 \times 10^{-3} \frac{2 \pi (125 \text{ md})(49 \text{ ft})}{(21 \text{ cp}) \left(1.35 \frac{rb}{STB}\right) \ln\left(\frac{820}{0.49}\right)} (1204 \text{ psi} - 1088 \text{ psi})$$

$$q = 23.91 \frac{STB}{\text{día}}$$

- b) En flujo continuo, las presiones se mantienen constantes a cualquier tiempo ($dp/dt = 0$). Recordando que las soluciones de las ecuaciones de flujo son para tasa flujo al pozo constante y que en este caso es $q = 23,91$ STB / día, entonces,

$$q = 1.127 \times 10^{-3} \frac{2 \pi k h}{\mu \beta_o \ln\left(\frac{r_e}{r}\right)} (P_e - P)$$

$$\frac{q \mu \beta_o}{2 \pi k h} = \frac{P_e - P}{\ln\left(\frac{r_e}{r}\right)}$$

$$P = P_e - \frac{q \mu \beta_o}{2 \pi k h} \left(\ln\left(\frac{r_e}{r}\right) \right)$$

$$P = P_e - \frac{q \mu \beta_o}{1.127 \times 10^{-3} (2 \pi k h)} \left(\ln\left(\frac{r_e}{r}\right) \right)$$

$$P = P_e - \frac{q \mu \beta_o}{7.08 \times 10^{-3} k h} \left(\ln\left(\frac{r_e}{r}\right) \right)$$

$$P = P_e - \frac{141.2(q\mu\beta_o)}{k h} \left(\ln \left(\frac{r_e}{r} \right) \right) \quad \text{Ec. 2.37C}$$

La presión P al radio de 50 ft es:

$$P = 1204\text{ psi} - 141.2 \times \frac{(23.91\text{ STB/día})(21\text{ cp})(1.35\text{ rb/STB}) \ln(80\text{ ft}/50\text{ ft})}{(125\text{ md})(49\text{ ft})}$$

$$P = 1160.29\text{ psi}$$

La presión P al radio de 100 ft es:

$$P = 1204\text{ psi} - 141.2 \times \frac{(23.91\text{ STB/día})(21\text{ cp})(1.35\text{ rb/STB}) \ln(820\text{ ft}/100\text{ ft})}{(125\text{ md})(49\text{ ft})}$$

$$P = 1171.12\text{ psi}$$

La presión se calcula del mismo modo para los diferentes radios medidos desde el centro del pozo. En la Tabla 2.2. se muestra los resultados tabulados:

Tabla 2.2. Valores de P vs. r, calculados.

r (ft)	P (Psi)	r (ft)	P (Psi)
0,49	1088,00	450	1194,62
50	1160,29	500	1196,27
100	1171,12	550	1197,76
150	1177,46	600	1199,12
200	1181,95	650	1200,37
250	1185,44	700	1201,53
300	1188,29	750	1202,61
350	1190,70	800	1203,61
400	1192,78	820	1204,00

Con estos valores así calculados se ha elaborado la Figura 2.13A,

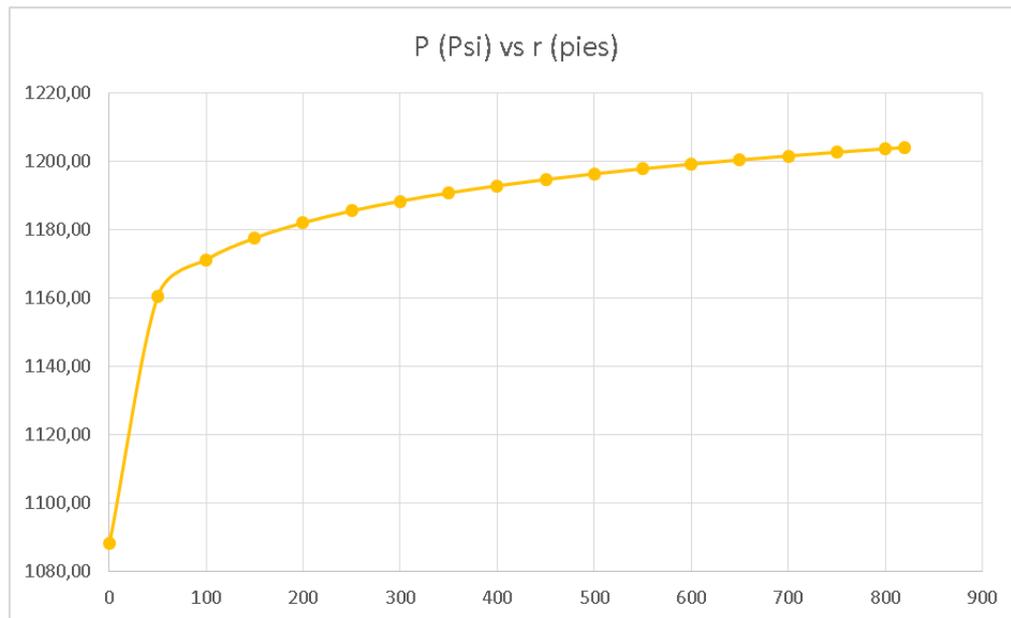


Figura 2.13A. Perfil de presión en el yacimiento apoyado por un acuífero activo (flujo continuo).

Como se puede apreciar la presión con respecto al radio no es lineal sino que varía logarítmicamente debido a la expresión matemática de la ecuación 2.37C.

c) ¿En qué parte del yacimiento ocurre la mayor caída de presión?

El cambio de presión con respecto al radio viene a ser la tangente a un punto cualquiera de la figura 2.13A. Al calcular el cambio de presión, ΔP , entre dos puntos consecutivos, Δr , de un yacimiento se puede observar que a medida que la distancia o radio al pozo, r , disminuye, la variación de presión, $\Delta p/\Delta r$ aumenta. Por consiguiente, el mayor gradiente de presión ocurre al pozo mismo, como puede observarse en la Tabla 2.3. La velocidad del fluido en el yacimiento es $u = q/A$ y en flujo radial el área A es la superficie lateral del cilindro transversal al flujo, $A = 2\pi r h \phi$. El cilindro de menor radio ocurre al pozo y el área A será la menor y como resultado, la velocidad al pozo, la mayor, provocando así una mayor caída de presión (ecuación 2.33, para flujo horizontal).

Tabla 2.3. Gradientes de presión a diferentes puntos en el yacimiento.

r (ft)	P (Psi)	ΔP (Psi)	dP/dr	r (ft)	P (Psi)	ΔP (Psi)	dP/dr
0,49	1088,00	72,29	1,460	450	1194,62	1,65	0,033
50	1160,29	10,83	0,217	500	1196,27	1,49	0,030
100	1171,12	6,34	0,127	550	1197,76	1,36	0,027
150	1177,46	4,50	0,090	600	1199,12	1,25	0,025
200	1181,95	3,49	0,070	650	1200,37	1,16	0,023
250	1185,44	2,85	0,057	700	1201,53	1,08	0,022
300	1188,29	2,41	0,048	750	1202,61	1,01	0,020
350	1190,70	2,09	0,042	800	1203,61	0,39	0,019
400	1192,78	1,84	0,037	820	1204,00		

2.11. ECUACIONES DE FLUJO PARA FLUIDO COMPRESIBLE (GAS), FLUJO CONTINUO.

A. FLUJO LINEAL, HORIZONTAL (NO TURBULENCIA, SI CUMPLE LA LEY DE DARCY)

La tasa de flujo de gas expresada en pies cúbicos estándares por día es la misma en todas las secciones transversales al flujo, durante el flujo continuo, sistema lineal. Sin embargo, debido a que el gas se expande como la presión cae, la velocidad es mayor al extremo aguas abajo que al extremo aguas arriba, y consecuentemente el gradiente de presión incrementa hacia el extremo aguas abajo. El flujo a cualquier sección x de la Fig. 2.12, donde la presión es p para flujo horizontal, puede ser expresado en términos de *pies cúbicos estándares por día*, q, sustituyendo la definición del factor volumétrico

de formación del gas, ($\beta_g \frac{bbl}{scf}$):

$$\frac{bbl}{scf} \frac{V_R}{V_{sc}} = \beta_g = \frac{q_R}{q_g} \therefore q_g \beta_g = q_R$$

el subíndice R indica a condiciones de reservorio y en

barriles de gas/d. Como estamos tratando con gas natural, el subíndice g puede prescindirse.

$$\left(\frac{pV}{zT} \right)_{sc} = \left(\frac{pV}{zT} \right)_R = \text{cte para misma cantidad de masa o moles de gas, n}$$

$$\frac{p_{sc}q}{T_{sc}} = \frac{pq_R}{zT_R}; \text{ aquí } q \text{ esta en scf/d y } q_R \text{ pies}^3\text{res/d}$$

$$q_R = \frac{qp_{sc}zT_R}{T_{sc}p}, \text{ pies}^3\text{res/d de gas}$$

$$q_R = \frac{qp_{sc}zT}{5.615T_{sc}p}, \text{ bblres/d de gas.}$$

Donde,

$$\beta_g = \frac{p_{sc}zT}{5.615T_{sc}p}, \text{ bblres/scf} \quad \text{Ec.2.43A}$$

Se ha suprimido el subíndice de R en la temperatura del yacimiento ya que queda explícito, así como en p y z.

$$q_R = q\beta_g = \frac{qp_{sc}Tz}{5.615T_{sc}p}, \text{ bblres/d} \quad \text{Ec. 2.43B}$$

Sustituyendo en la ecuación de la Ley de Darcy, en unidades de campo (asumimos que al cambio de presión el producto $\mu \cdot z = cte$, evaluado a condiciones promedias,)

$$\frac{q_R}{A} = \frac{qp_{sc}Tz}{5.615T_{sc}pA} = -0.001127 \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad \text{Ec. 2.44}$$

Separando variables e integrando:

$$\frac{qp_{sc}Tz\mu}{5.615(0.001127)kT_{sc}A} \int_0^L dx = - \int_{p_1}^{p_2} pdp = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) \quad \text{Ec. 2.45}$$

$z\mu = cte$, evaluados a \bar{p} .

Finalmente,

$$q = \frac{3.164 \times 10^{-3} T_{sc} A k (p_1^2 - p_2^2)}{p_{sc} T z L \mu}, \text{ pie}^3\text{std/día} \quad \text{Ec. 2.46}$$

Por ejemplo, cuando $T_{sc} = 60$ °F, $A = 45$ pie², $k = 125$ md, $p_1 = 1000$ psia, $p_2 = 500$ psia, $p_{sc} = 14.7$ psia, $T = 140$ °F, $z = 0.92$, $L = 450$ pies y $\mu = 0.015$ cp.

$$q = \frac{3.164 \times 10^{-3} (460 + 60)(45)(125)(1000^2 - 500^2)}{14.7(460 + 140)(0.92)(450)(0.015)}$$

$$q = 0.16897(1000^2 - 500^2)$$

$$q = 126.7 \text{ Mscf/día}$$

Aquí T , k y el producto $\mu \cdot z$ han sido sacados del integral como si estos fueran invariantes con presión, y en este caso, valores promedios pueden usarse. Es importante analizar una observación realizada por Wattenbarger y Ramey⁶ acerca del comportamiento del producto $\mu \cdot z$ como función de presión. La Fig. 2.14 es un gráfico típico de $\mu \cdot z$ vs presión para un gas real. Nótese que el producto, $\mu \cdot z$, es casi constante para presiones menores que 2000 psia aproximadamente. Arriba de 2000 psia, el producto $\mu \cdot z/p$ es constante. No obstante la forma de la curva varía levemente para gases diferentes a diferentes temperaturas, la dependencia de presión es representativa de la mayoría de los gases naturales de interés. La presión a la cual la curva cambia de giro varía desde cerca de 1500 psia a 2000 psia para diferentes gases naturales. Esta variación sugiere que la Ec. 2.46 es válida solo para presiones menores a 1500-2000 psia, dependiendo de las propiedades del gas natural que fluye.

Arriba de este rango de presión, es decir para $p > 4000$ psia, sería más preciso asumir que el producto $\mu \cdot z/p$ es constante. Para el caso $\mu \cdot z/p$ constante, se obtiene:

$$\frac{qp_{sc}T(\mu z/p)}{5.615(0.001127)kT_{sc}A} \int_0^L dx = - \int_{p_1}^{p_2} dp = p_1 - p_2$$

$$q = \frac{6.328 \times 10^{-3} T_{sc} A k (p_1 - p_2)}{p_{sc} T (\mu z / p) L} \quad \text{Ec. 2.47}$$

Al aplicar esta ecuación, el producto $\mu z/p$ debe ser evaluado a la presión promedio entre p_1 y p_2 .

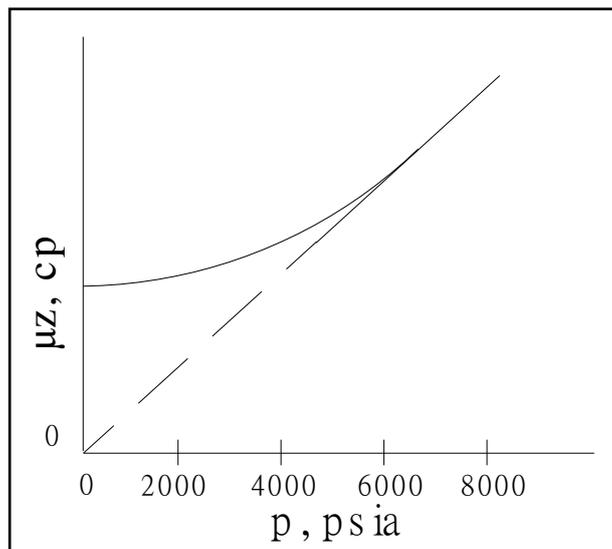


Fig. 2.14: Variación isotérmica del producto $\mu \cdot z$ con presión.

B. FLUJO RADIAL, HORIZONTAL

En términos de $q = \text{pie}^3 \text{ std/día}$:

$$q\beta_g = \frac{qp_{sc}Tz}{5.615T_{sc}p}, \text{ q scf/d y } q\beta_g \text{ bblres/d}$$

Sustituyendo en la forma radial de la ley de Darcy, flujo horizontal

$$\frac{qp_{sc}Tz}{5.615T_{sc}p(2\pi rh)} = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}$$

$$\frac{qp_{sc}Tdr}{5.615T_{sc}(2\pi kh)r} = 1.127 \times 10^{-3} \frac{p}{\mu z} dp$$

Asumiendo el producto $\mu \cdot z = \text{cte}$ con variación de presión y, separando variables e integrando obtenemos Ec. 2.48:

$$\frac{qp_{sc}Tz\mu}{5.615(0.001127)(2\pi)T_{sc}kh} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \int_{p_1}^{p_2} p dp = \frac{1}{2}(p_2^2 - p_1^2)$$

$$q = \frac{0.01988T_{sc}kh}{p_{sc}Tz\mu \ln \frac{r_2}{r_1}} (p_2^2 - p_1^2) \quad \text{Ec. 2.48}$$

En cambio, para $\mu z / p$ asumido constante se tiene:

$$q = \frac{0.03976T_{sc}kh}{p_{sc}T(z\mu/p) \ln \frac{r_2}{r_1}} (p_2 - p_1), \text{ scf/d} \quad \text{Ec. 2.49}$$

$$q = \frac{0.03976T_{sc}kh}{p_{sc}T(z\mu/p) \ln \frac{r_e}{r_w}} (p_e - p_{wf}), \text{ scf/d} \quad \text{Ec. 2.50}$$

2.12. ESTRATOS EN SERIE, FLUJO CONTINUO

A. FLUJO LINEAL

Considere dos o más estratos de igual sección transversal pero de diferente longitud L y permeabilidad k , Fig. 2.15, en los cuales existe el mismo flujo lineal q de un fluido ligeramente compresible.

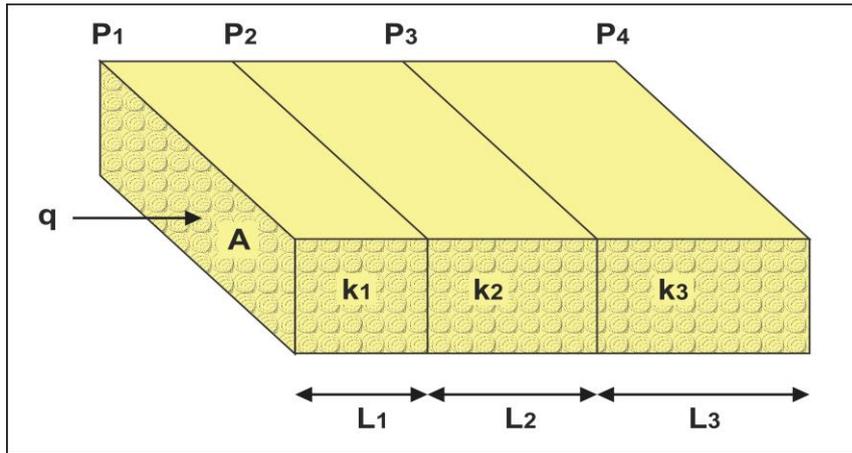


Fig. 2.15: Flujo lineal sobre estratos en serie.

Para estratos en serie, la caída de presión total es igual a la suma de los Δp en cada uno de los estratos, así:

$$\Delta p_t = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 \quad \text{Ec. 2.51}$$

$$(p_4 - p_1) = (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + (p_4 - p_3)$$

Sustituyendo estas caída de presión con el equivalente de la Ley de Darcy, ecuación 2.32A:

$$\frac{q_t \mu \beta L_t}{-1.127 \times 10^{-3} k_{avg} A_{avg}} = \frac{q_t \mu \beta L_1}{-1.127 \times 10^{-3} k_1 A_1} + \frac{q_t \mu \beta L_2}{-1.127 \times 10^{-3} k_2 A_2} + \frac{q_t \mu \beta L_3}{-1.127 \times 10^{-3} k_3 A_3} \quad \text{Ec. 2.51A}$$

Pero puesto que el caudal de flujo q , la sección transversal A , el factor volumétrico de formación β y la viscosidad μ , son iguales en todos los estratos:

$$\frac{L_t}{k_{avg}} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3} \quad \text{Ec. 2.51B}$$

$$k_{avg} = \frac{L_t}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2} + \frac{L_3}{k_3}} = \frac{\sum L_i}{\sum \frac{L_i}{k_i}} \quad \text{Ec. 2.52}$$

La permeabilidad promedio (average) es definida por la Ec. 2.52 como la permeabilidad de una formación en la cual un número de estratos en serie cambia de longitud y permeabilidad, manteniendo el mismo caudal q .

Esta ecuación fue derivada usando la ecuación para un fluido incompresible o ligeramente compresible, flujo lineal y horizontal. Como la permeabilidad es una propiedad de la roca y no del fluido que fluye a través de ella, excepto para gases a baja presión, esta permeabilidad promedio debe ser igualmente aplicable para gases.

B. FLUJO RADIAL

En este caso se hace un análisis similar al anterior y se obtiene:

$$k_{avg} = \frac{k_1 k_2 k_3 \ln(r_3 / r_w)}{k_1 k_2 \ln(r_3 / r_2) + k_1 k_3 \ln(r_2 / r_1) + k_2 k_3 \ln(r_1 / r_w)}, \quad \text{Ec. 2.53}$$

$$k_{avg} = \frac{\ln(r_n / r_w)}{\sum_{j=1}^n \ln(r_j / r_{j-1}) / k_j}, \quad r_0 = r_w \quad \text{Ec. 2.53A}$$

Nótese que r_0 es en este caso radio con subíndice cero en la sumatoria.

2.13. ESTRATOS EN PARALELO, FLUJO CONTINUO

A. FLUJO LINEAL

Considere dos o más estratos de igual longitud pero diferentes área de sección transversal y permeabilidad, fluyendo el mismo fluido bajo la misma caída de presión ($p_1 - p_2$) como se muestra en la Fig. 2.11.

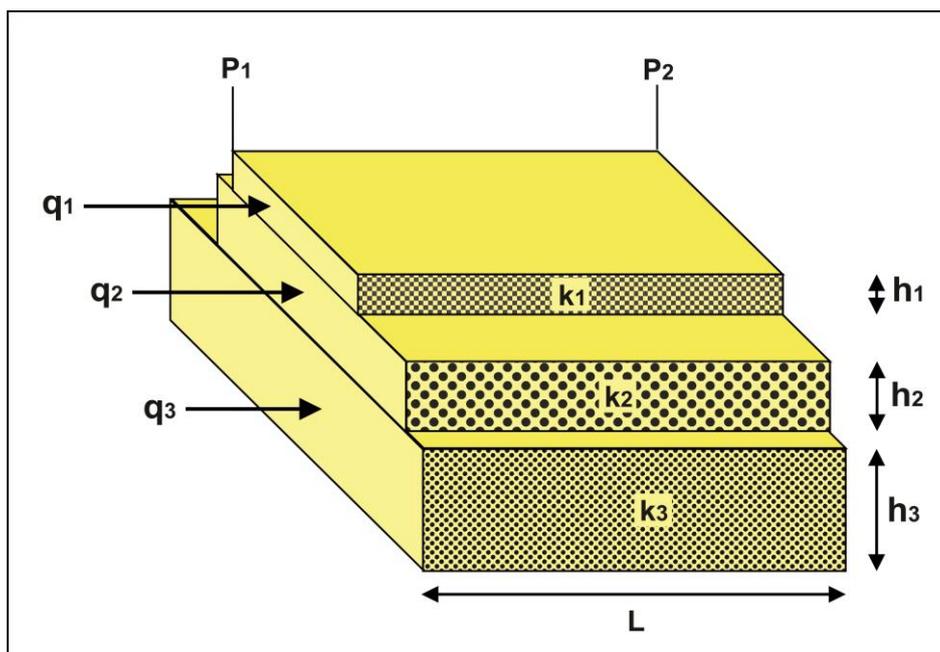


Fig. 2.16: Flujo lineal en estratos en paralelo.

Como el flujo total es igual a la suma de los flujos individuales:

$$q_t = q_1 + q_2 + q_3$$

Entonces,

$$\frac{-1.127 \times 10^{-3} k_{avg} A_t (p_2 - p_1)}{\mu BL} = \frac{-1.127 \times 10^{-3} k_1 A_1 (p_2 - p_1)}{\mu BL} + \frac{-1.127 \times 10^{-3} k_2 A_2 (p_2 - p_1)}{\mu BL} + \frac{-1.127 \times 10^{-3} k_3 A_3 (p_2 - p_1)}{\mu BL}$$

Simplificando términos iguales:

$$k_{avg} A_t = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3$$

$$k_{avg} = \frac{\sum k_i A_i}{\sum A_i} \quad \text{Ec. 2.54}$$

Y, cuando todos los estratos son del mismo ancho, las áreas son proporcionales al espesor h ,

$$A = h \times a, \text{ siendo } a \text{ el ancho}$$

$$A_t = h_t \times a \quad A_2 = h_2 \times a$$

$$A_1 = h_1 \times a \quad A_3 = h_3 \times a$$

$$k_{avg} = \frac{\sum k_i h_i}{\sum h_i} \quad \text{Ec. 2.55}$$

B. FLUJO RADIAL

En este caso se hace un análisis similar al anterior y se obtiene:

$$k_{avg} = \frac{\sum k_i h_i}{\sum h_i} \quad \text{Ec. 2.56}$$

2.14. EFECTO DE PIEL (SKIN EFFECT) O EFECTO DE DAÑO

Este es un efecto de caída de presión que ocurre cerca del pozo (a unos cuantos pies). Cuando el pozo es perforado, el filtrado de lodo entra en la formación que contiene petróleo y agua de formación y, ocurren reacciones químicas y físicas que alteran la permeabilidad en la zona invadida por el filtrado. Las figuras 2.17 y 2.18 muestran un esquema de este efecto.

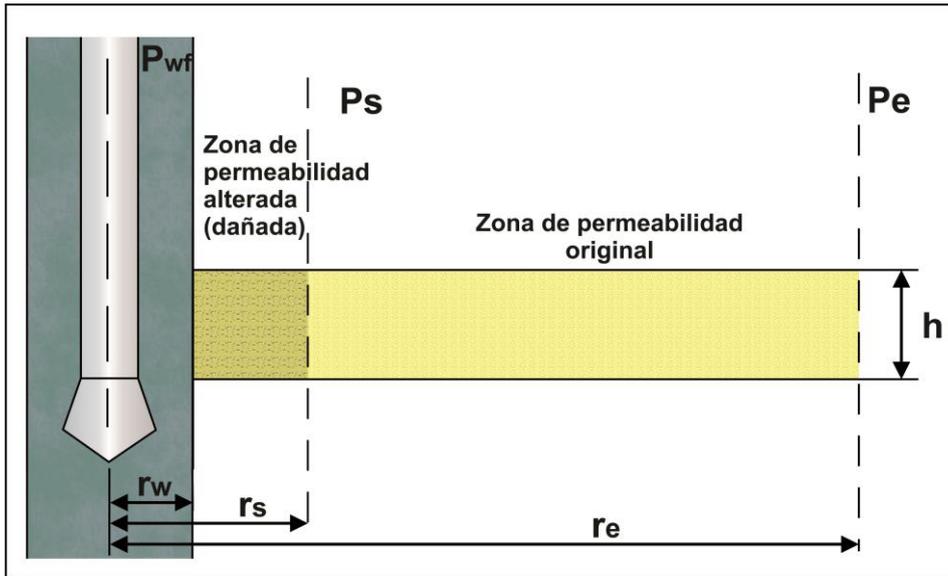


Fig. 2.17: Representación del pozo con presencia de daño. Se muestra los radios y las respectivas presiones de interés.

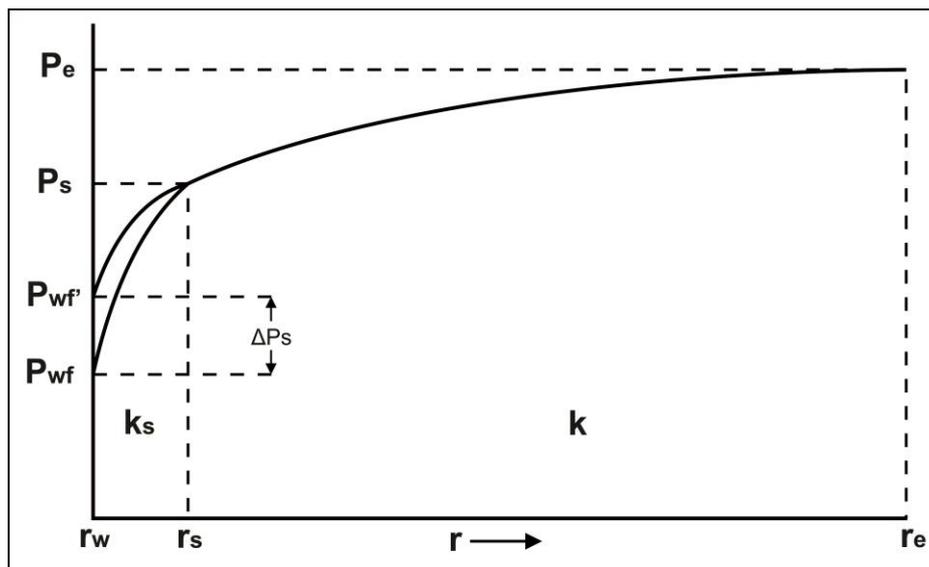


Fig. 2.18: Modelo de P vs. r con efecto de piel. Obsérvese que al pie del pozo se asume que ocurre una caída adicional de presión ΔP_s .

donde:

r_s = radio de la zona dañada.

k_s = permeabilidad de la formación dañada

P_s = Presión al extremo del r_s

$P_{wf'}$ = Presión al pozo en ausencia de daño.

P_{wf} = Presión al pozo cuando hay daño.

$$\Delta P_s = P_{wf'} - P_{wf}$$

$P_e - P_{wf}$ = Caída de presión total en presencia de daño.

$P_e - P_{wf}'$ = Caída de presión total en ausencia de daño.

Considerando estratos en serie de diferentes permeabilidades, se tendría:

$$\Delta p_t = \Delta p_1 + \Delta p_2 \quad \text{Ec. 2.57}$$

$$p_e - p_{wf} = (p_e - p_s) + (p_s - p_{wf}) \quad \text{Ec. 2.58}$$

Pero, de la Figura 2.18 también se tiene:

$$p_e - p_{wf} = (p_e - p_{wf}') + (p_{wf}' - p_{wf}) \quad \text{Ec. 2.59}$$

$$p_e - p_{wf} = (p_e - p_{wf}') + \Delta p_s \quad \text{Ec. 2.60}$$

donde: Δp_s = caída de presión adicional (a la caída sin daño, $p_e - p_{wf}'$) que ocurre por efecto del daño. Esto equivale a suponer que esta caída ocurre alrededor del mismo pozo, como si el daño estuviera concentrado en un estrato en serie próximo al pozo de espesor pelicular, $(r_s - r_w) \approx 0$. De ahí que al efecto de daño es llamado también “efecto de piel” (del inglés: *skin effect*).

Reemplazando Ec 2.37B en $(p_e - p_{wf}')$ de la ecuación 2.60, se tiene:

$$p_e - p_{wf} = \frac{q\beta\mu}{7.08 \times 10^{-3} kh} \ln \frac{r_e}{r_w} + \Delta p_s \quad \text{Ec. 2.61}$$

$$q = \frac{7.08 \times 10^{-3} kh}{\ln \frac{r_e}{r_w} \beta\mu} \times (p_e - p_{wf} - \Delta p_s) \quad \text{Ec. 2.62}$$

Para evaluar Δp_s , podemos asumir que:

P_s = Presión al radio r_s , hasta donde existe daño.

P_e = Presión al radio externo (r_e).

k_s = permeabilidad de la zona dañada.

k = permeabilidad de la zona virgen.

$$\Delta p_s = (p_s - p_{wf}) - (p_s - p_{wf}') = p_{wf}' - p_{wf} \quad \text{Ec. 2.63}$$

Reemplazando la caída de presión en cada zona con el equivalente de la Ley de Darcy:

$$\Delta p_s = \frac{q\mu\beta \ln(r_s / r_w)}{7.08 \times 10^{-3} k_s h} - \frac{q\mu\beta \ln(r_s / r_w)}{7.08 \times 10^{-3} kh}$$

Extrayendo factor común y ordenando,

$$\Delta p_s = \frac{q\mu\beta}{7.08 \times 10^{-3} h} \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \left(\frac{1}{k_s} - \frac{1}{k}\right)$$

o,

$$\Delta p_s = \frac{q\mu\beta}{7.08 \times 10^{-3} kh} \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \left(\frac{k}{k_s} - 1\right)$$

Donde,

$$\ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \left(\frac{k}{k_s} - 1\right) = S \quad \text{Ec. 2.64}$$

S = factor de piel, término adimensional

$$\Delta p_s = \frac{q\mu B}{7.08 \times 10^{-3} kh} S$$

$$\Delta p_s = 141.2 \frac{q\mu B}{kh} S \quad \text{Ec. 2.65}$$

Sustituyendo la Ec. 2.65 en la Ec. 2.62, se tiene:

$$q = \frac{7.08 \times 10^{-3} kh}{\beta\mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} + S \right)} \times (p_e - p_{wf}) \quad \text{Ec. 2.66}$$

Nótese una vez más que Δp_s no es la caída de presión real en la zona dañada sino la caída de presión adicional a la caída $p_e - p_{wf}'$, que se necesita para obtener q en presencia daño. La caída de presión en la zona dañada es $p_s - p_{wf}$ que es igual a $(p_e - p_{wf}) - (p_e - p_s)$. La caída de presión en la zona virgen, entre r_e y r_s , es $(p_e - p_s)$.

Siguiendo estos conceptos, la caída de presión adicional $\Delta p_s = p_{wf}' - p_{wf}$, tomaría lugar en el pozo mismo, entre $r_w + dr$ y r_w , una zona de espesor pelicular, de ahí el nombre efecto pelicular o skin effect.

Inclusión de S en ecuación para Fluido Compresible (Gas)

Tomando en cuenta que $p_{sc} = 14.7$ psia y $T_{sc} = 520^\circ R$ y, considerando que el daño ocurre en la vecindad del pozo, podemos incorporar S en la ecuación 2.48 y considerando que q sin daño es:

$$q = \frac{0.01988(520)kh}{(14.7)Tz\mu \ln \frac{r_e}{r_w}} (p_e^2 - p_{wf}^2) \quad \text{Ec. 2.67}$$

El daño puede ser representado por:

$$p_{wf}^2 - p_{wf}^2 = \Delta(p^2)_{skin} = 1.422 \frac{\bar{\mu} z T_f q_g}{kh} S' \quad \text{Ec 2.68}$$

Entonces, q con daño será:

$$q_g = \frac{0.703 kh [p_e^2 - p_{wf}^2 - \Delta(p^2)_{skin}]}{\bar{\mu} z T_f \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} \quad \text{Ec. 2.69}$$

O,

$$q_g = \frac{kh(p_e^2 - p_{wf}^2)}{1.422 \bar{\mu} z T_f \left[\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) + S' \right]} \quad \text{Ec 2.70}$$

$S' \equiv$ Incluye daño y turbulencia.

Otra forma de expresar el daño es:

$$\ln \frac{r_e}{r_w} + S = \ln \frac{r_e}{r_{wa}} \therefore \ln \frac{r_e}{r_w} + \ln e^S = \ln \frac{r_e}{r_w e^{-S}} \therefore r_{wa} = r_w e^{-S} \quad \text{Ec 2.71}$$

r_{wa} : Radio aparente que tendría un pozo sin daño, equivalente al mismo pozo con r_w pero con daño.

Análisis del signo de S

En la Ec 2.67 se presentó el factor de piel, S, el cual es igual a:

$$S = \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \left(\frac{k}{k_s} - 1\right) \quad \text{Ec. 2.67}$$

Analizando el signo de S se tiene:

- Si $k_s < k$, como ocurre cuando hay daño, S será positivo.
- Si S fuera negativo, significará que $k_s > k$ lo que implicará que la permeabilidad cerca del pozo se haya mejorado, como ocurre en una estimulación.
- Si $S = 0$, entonces $k_s = k$, no hay daño, ni estimulación.

Para ilustrar la aplicación de las ecuaciones vistas anteriormente, a continuación se presentan algunos problemas planteados por Sliders H.C.⁷ y resueltos aquí.

Problema 2.8

Un pozo está produciendo a la tasa de 748 stb/d de petróleo sin agua a la presión de fondo de 900 psia de un yacimiento con un muy fuerte empuje hidráulico (asuma flujo de estado continuo). ¿Cuál es el espesor de la formación si un análisis de una prueba de drawdown de presión en el pozo indica que Δp_{skin} a esta tasa es 115 psia?

- Diámetro del pozo = 8”
- Distancia entre los pozos = 600 pies
- Presión estimada a mitad de camino entre pozos = 1200 psia
- Viscosidad del petróleo en el yacimiento = 2.5 cp
- Factor volumétrico de formación = 1.25 rb/stb
- $k_a = 300$ md
- $k_o = 285$ md

Desarrollo:

$$q = \frac{7.08kh}{\mu\beta} \frac{(p_1 - p_2 - \Delta p_{skin})}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \quad k = \text{Darcy} \quad \text{Ec. 2.62}$$

$$h = \frac{q\mu\beta \ln \frac{r_e}{r_w}}{7.08k(p_e - p_{wf} - \Delta p_{skin})}$$

$$h = \frac{748 \times 2.5 \times 1.25 \ln \frac{300 \times 12}{8/2}}{7.08 \times 0.285 (1200 - 900 - 115)}$$

$$h = 42.6 \text{ pies}$$

Problema 2.9

Retrabaje el problema 2.8 asumiendo que se trata de un yacimiento de gas en vez de yacimiento de petróleo y que está produciendo 100 MMscfd. El Δp_{skin} y la caída de presión adicional y la causada por turbulencia totalizan 200 psia. No se produce agua.

- Factor de desviación del gas en el yacimiento = 0.9
- Viscosidad del gas en el yacimiento = 0.01 cp
- Temperatura del yacimiento = 120 °F

Desarrollo:

La ecuación para gas que utilizaremos es:

$$q_g = \frac{0.703kh(p_e^2 - p_{wf}^2 - \Delta(p^2)_{skin})}{\bar{\mu}zT \ln \frac{r_e}{r_w}}, \quad k = \text{darcies} \quad \text{Ec. 2.69}$$

$$q_g = \text{Mscf}/D$$

O,

$$k = md$$

$$q_g = \text{scf}/D$$

Calculamos primero a caída de presión adicional por efecto del daño,

$$\Delta(p^2)_{skin} = p_{wf}^{\prime 2} - p_{wf}^2 = (p_{wf}^{\prime} - p_{wf})(p_{wf}^{\prime} + p_{wf})$$

$$p_{wf}^{\prime} - p_{wf} = 200\#; \text{ Si } p_{wf} = 900\#, \text{ entonces, } p_{wf}^{\prime} = 1100$$

y

$$\Delta(p^2)_{skin} = (200)(2000) = 400000$$

De ecuación 2.69 podemos despejar h,

$$h = \frac{q_g \bar{\mu}zT \ln \frac{r_e}{r_w}}{0.703kh(p_e^2 - p_{wf}^2 - \Delta(p^2)_{skin})}$$

$$h = \frac{100 \times 10^3 (0.01)(0.9)(460 + 120) \ln \frac{300 \times 12}{8/2}}{0.703(0.300)(1200^2 - 900^2 - 400000)}, \quad \begin{array}{l} q_g = \text{Mscfd} \\ T = ^\circ R \\ k = \text{darcies} \end{array}$$

$$h = 73.2 \text{ pies}$$

En este caso, asumimos que la permeabilidad absoluta dada es prácticamente igual a la permeabilidad efectiva al gas en presencia de una saturación irreductible de agua. A falta de un valor disponible para la permeabilidad efectiva, esta suposición es válida generalmente.

Problema 2.10

El pozo 1 en la Fig. 2.19 está localizado cerca de la falla y está balanceado en todas las otras direcciones por pozos similares a una distancia de 600 pies. Encuentre el producto promedio permeabilidad-espesor para el área de drenaje del pozo 1 con base en la permeabilidad absoluta. Los cálculos de balance de materiales indican que las saturaciones son: $S_o = 0.565$, $S_{wc} = 0.300$ y $S_g = 0.135$.

- Tasa de producción del pozo 1 = 750 stb/d
- Factor volumétrico de formación, petróleo = 1.20 rb/stb
- Presión a mitad de camino entre los pozos (del análisis de una prueba de buildup) = 1000 psia
- Viscosidad del petróleo en el yacimiento = 2.5 cp
- Presión de flujo al fondo de pozo = 800 psia
- Radio del pozo = 0.3 pies

Los datos de permeabilidad relativa obtenida del lab. son presentados en la Fig. 2.20. Asuma no daño al pozo y flujo steady-state (continuo).

Desarrollo:

El término q_o' es la tasa de flujo que el pozo produjera si de todo el cilindro alrededor de este se extrajera el fluido y la tasa se calcula con la ecuación 2.62. Pero, en este caso, q_o es solo la mitad de la tasa completa q_o' . La tasa q_o es lo que el pozo produce debido a la falla a la espalda del pozo. Entonces,

$$q_o = \frac{1}{2} \left[\frac{7.08k_o h (p_e - p_{wf} - \Delta p_{skin})}{\mu\beta \ln \frac{r_e}{r_w}} \right], \quad k_o = \text{Darcy} \quad \text{Esta es la Ec.2.62 dividida para 2}$$

debido a que el pozo solo produce de la mitad del área circular.

Tomando en cuenta que $k_o = k k_{ro}$, entonces

$$2q_o = \frac{7.08khk_{ro} (p_e - p_{wf} - \Delta p_{skin})}{\mu\beta \ln \frac{r_e}{r_w}}$$

$$kh = \frac{2q_o \mu\beta \ln \frac{r_e}{r_w}}{7.08k_{ro} (p_e - p_{wf})}, \quad \text{para } \Delta p_{skin} = 0$$

De figura 2.20, utilizando la figura de la derecha dado que tenemos tres fases en el yacimiento, para una saturación de líquido de 0,865 (= $S_o + S_{wc}$), obtenemos k_{ro} es 0,48 aproximadamente.

$$kh = \frac{2(750)(2.5)(1.20) \ln \frac{300}{0.3}}{7.08(0.48)(1000 - 800)}$$

$$kh = 45.7 \text{ Darcy-pie}$$

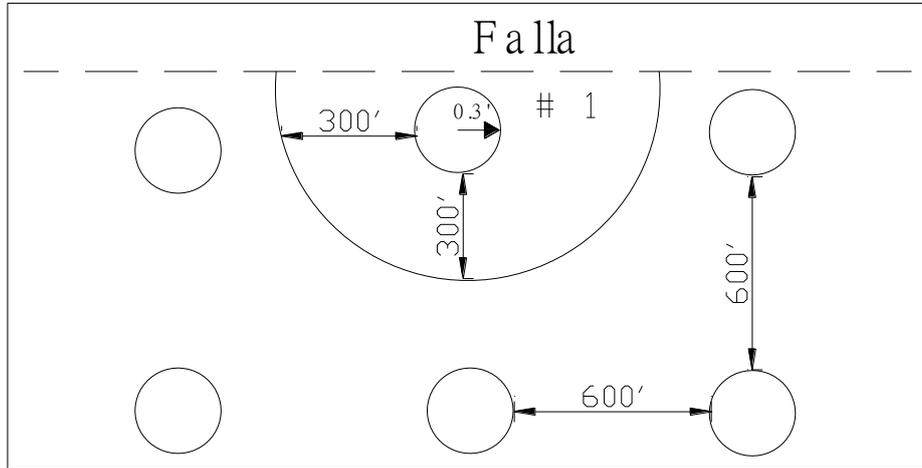


Fig. 2.19: Patrón de espaciamento de pozos para el problema 2.10.

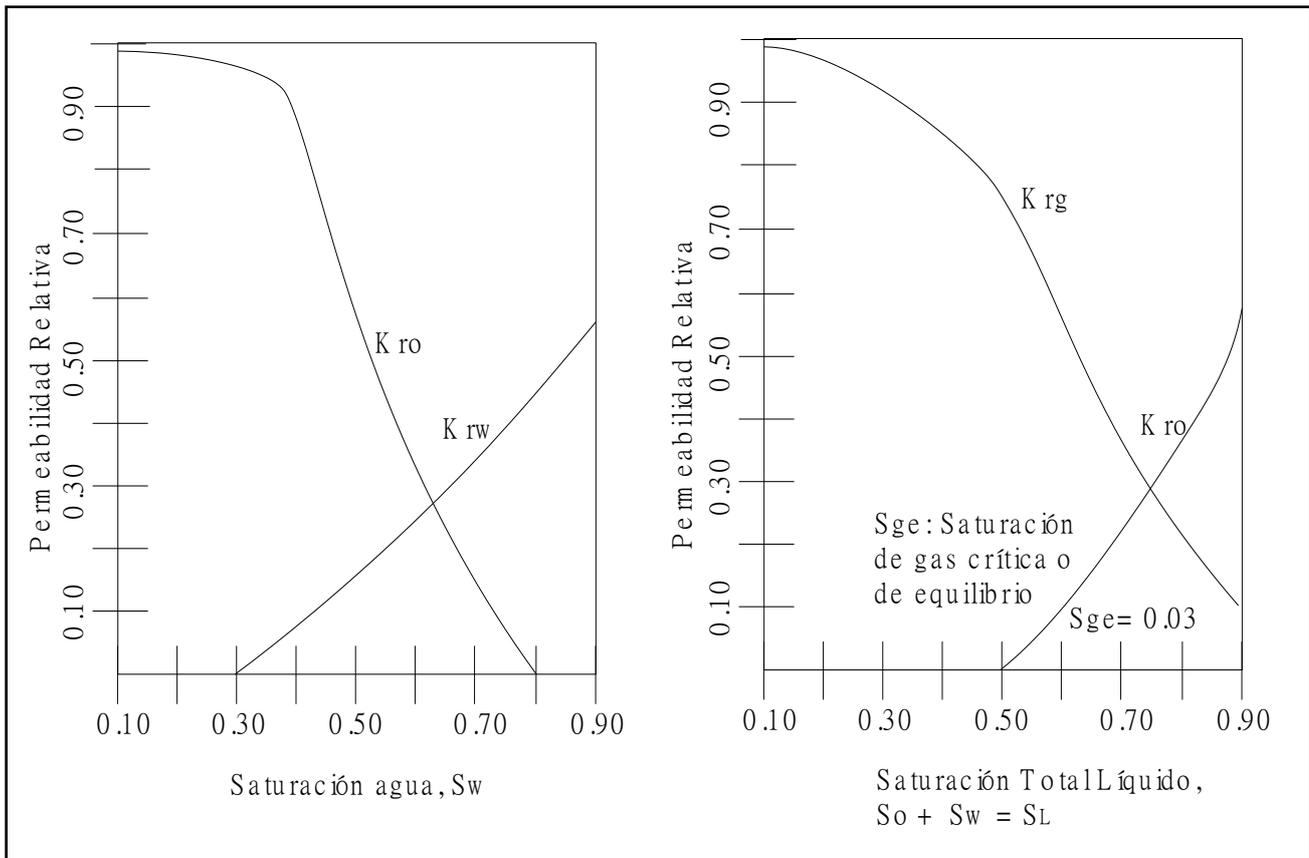


Fig. 2.20: Datos de permeabilidad relativa (sintético)⁷ para problemas 2.10 y 2.12

Problema 2.11

Un pozo descubridor de un yacimiento de petróleo con gorro o capa de gas produce a una relación inicial gas/petróleo (GOR) de 2000 scf/stb desde un yacimiento cuya presión es 2000 psia y temperatura de 120 °F. Asumiendo que la zona de petróleo no contiene gas libre y la zona de gas no contiene petróleo, estime el espesor del intervalo de la zona de gas, en el pozo, dados:

- Gas de solución = 500 scf/stb
- $\beta_o = 1.25$ rb/stb
- $k_g/k_o = 1.0$ (asuma que la permeabilidad relativa del gas y del petróleo son ambas 1.0)
- $\mu_o = 1.2$ cp
- $\mu_g = 0.02$ cp
- Intervalo productor = 30'

Desarrollo:

Este interesante problema amerita ser comprendido bien antes de intentar resolverlo.

Según los datos del problema y la interrogante que plantea, se tiene:

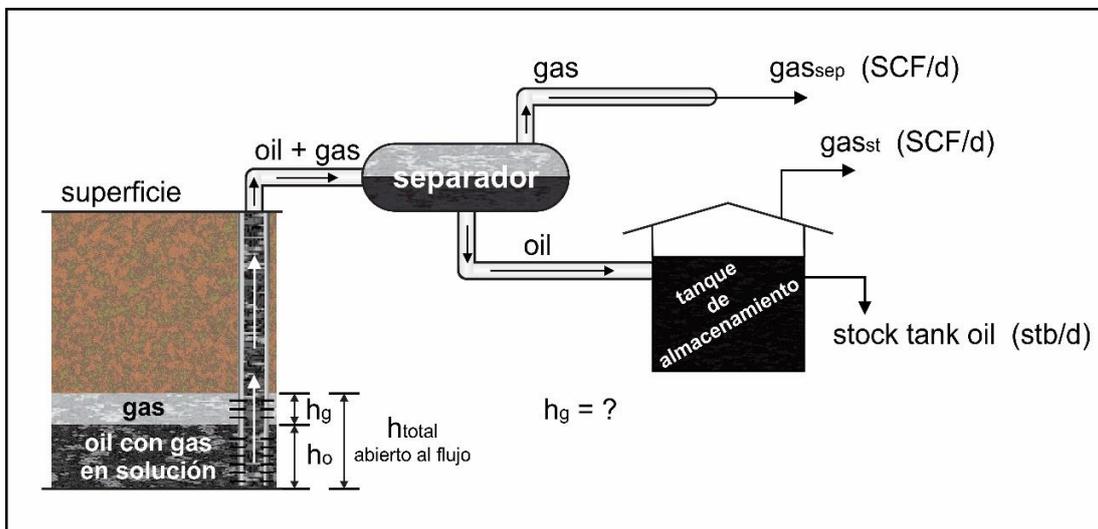


Fig. 2.21. Representación esquemática del problema 2.11

1. En concordancia con la figura 2.11, la relación gas/petróleo GOR (gas-oil ratio) de producción es definida como los pies cúbicos de gas a condiciones estándares que es obtenido en superficie por cada barril estándar (stb) de petróleo también obtenido en superficie. Esto es,

$$\frac{(\text{gas sep} + \text{gas st})}{1 \text{ stk oil}} = 2000 \frac{\text{SCF gas}}{\text{stb oil}}$$

Pero, de estos 2000 SCF/stb obtenidos en superficie, 500 SCF/stb provienen del gas que estaba en solución en el petróleo en el yacimiento y, la diferencia 1500 SCF/stb proviene del gorro o capa de gas.

2. La Ley de Darcy la cumplen todos los fluidos que fluyen en un medio poroso y permeable, siempre que no haya turbulencia. Esta Ley expresada en ecuación para flujo horizontal, radial, sin turbulencia y en unidades de campo es:

$$q(\text{bblres}/d) = 1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu} \frac{dP}{dr}$$

3. Para flujo de petróleo en el yacimiento,

$$q_o(\text{bblres}/d) = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k_o A_o}{\mu_o} \frac{\Delta P}{\Delta r}$$

También, expresando la tasa q a condiciones estándares

$$q_o(\text{stb}/d) = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k_o A_o}{\beta_o \mu_o} \frac{\Delta P}{\Delta r} \quad \text{Ec. 2.22}$$

En este caso, precisamos que el área transversal al flujo de petróleo es $A_o = 2\pi r h_o$, en función al espesor efectivo del reservorio a través del cual fluye el petróleo, h_o .

Para el flujo de gas en el yacimiento, procedemos de manera similar y de la ecuación 2.43B obtenemos 2.44 para flujo radial,

$$q_g \beta_g(\text{bblres}/d) = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k_g A_g}{\mu_g} \frac{\Delta P}{\Delta r} \quad \text{Ec. 2.44}$$

$\frac{\Delta P}{\Delta r}$, gradiente de presión, es el mismo en ambos casos porque están sometidos al

mismo sistema de presión que moviliza fluido hacia el pozo.

También,

$$q_g(\text{SCF}/d) = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k_g A_g}{\beta_g \mu_g} \frac{\Delta P}{\Delta r}$$

Recordemos que $\beta_g = \text{bblres}/\text{SCF}$ y $\beta_o = \text{bblres}/\text{stb}$ y q_o es stb/d y q_g scf/d, entonces relacionando las ecuaciones para gas y petróleo, se obtiene

$$\frac{q_g}{q_o} \left(\frac{SCF}{stb} \right) = \frac{k_g}{k_o} \frac{h_g}{(30 - h_g)} \frac{\mu_o}{\mu_g} \frac{\beta_o}{\beta_g}$$

$\frac{q_g}{q_o}$ es la relación gas-petróleo en que fluyen en el yacimiento, 1500 SCF/stb.

Los otros 500 SCF/stb no están libres a las condiciones del yacimiento. Están en solución en el petróleo. Sustituyendo valores,

$$1500 \frac{SCF}{stb} = 1.0 \frac{h_g}{(30 - h_g)} \frac{1.2}{0.02} \frac{1.25rb/stb}{\beta_g}$$

$$\beta_g \left(\frac{bbblres}{stb} \right) = \frac{P_{sc} T z}{5.615 T_{sc} p} = 5.04 \times 10^{-3} \frac{zT}{p}$$

$$\beta_g = 5.04 \times 10^{-3} \frac{(1)(460 + 120)}{2000}$$

$$\beta_g = 1.462 \times 10^{-3} \text{ bblres/SCF}$$

Reemplazando en la ecuación $\frac{q_g}{q_o}$ de arriba, tenemos:

$$1500 = 51300 \frac{h_g}{30 - h_g}$$

$$h_g = 0.85 \text{ pies}$$

Problema 2.12

Un calentador de fondo de pozo es usado en un pozo que tiene una zona dañada con el propósito de disminuir la viscosidad del petróleo.

- A. Cuál será la tasa de producción si el efecto del calentador es equivalente a reducir la viscosidad en un radio de 7' alrededor del pozo de 7.08 a 0.708 cp.
- B. Encuentre Δp_{skin} . Asuma flujo de estado continuo y los datos de yacimiento siguientes:

- Presión a la frontera externa = 2000 psia
- Presión al pozo = 950 psia

- Factor volumétrico de formación del petróleo = 1.5 rb/stb
- k_o sin daño = 100 md
- k_o con daño = 10 md
- Radio de la zona dañada = 10 pies
- Espesor del yacimiento = 10 pies
- Radio de drenaje = 700 pies
- Radio del pozo = 0.7 pies

Desarrollo:

a). Para resolver la pregunta A, utilizamos la ecuación para flujo radial, flujo continuo, asumiendo daño a la formación,

$$q = \frac{7.08kh}{\mu\beta} \frac{(p_1 - p_2)}{(\ln \frac{r_1}{r_2} + S)}, \text{ k = Darcy} \quad \text{Ec. 2.66}$$

Para visualizar el problema, dibujamos las diferentes regiones alrededor del pozo y, la figura 2.21 muestra los radios de las diferentes zonas.

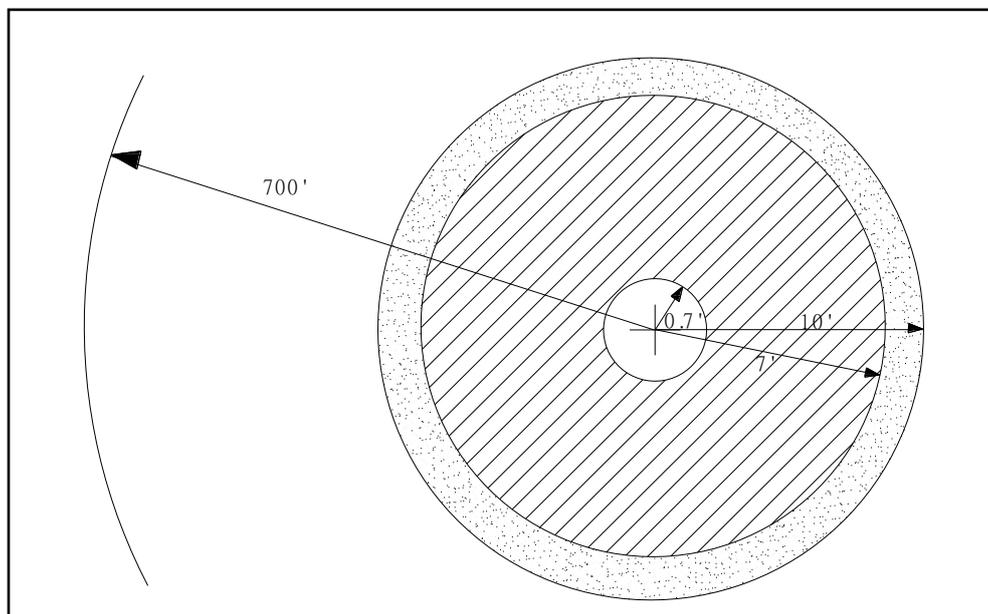


Figura 2.21: Radios de las diferentes zonas.

**Tabla 2.4. Permeabilidad y viscosidad de las regiones concéntricas:
(Tomando en cuenta efectos del calentador y zona dañada)**

	k_o (md)	μ (cp)
Entre 0.7' y 7'	10	0.708
Entre 7' y 10'	10	7.08
Entre 10' y 700'	100	7.08

En la tabla 2.4 se muestra las diferentes zonas en serie en el yacimiento, con sus respectivas permeabilidades y viscosidades.

Zonas en serie:

$$\Delta p_T = p_e - p_w = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 \quad \text{Ec. 2.51}$$

$$p_e - p_w = (p_e - p_{10}) + (p_{10} - p_7) + (p_7 - p_w)$$

$$\Delta p_1 = p_e - p_{10} = \frac{q\mu\beta \ln(700/10)}{7.08(kh)} = \frac{q(7.08)(1.5) \ln 700/10}{7.08(0.100)(10)} = 6.37q$$

$$\Delta p_2 = p_{10} - p_7 = \frac{q\mu\beta \ln(10/7)}{7.08(kh)} = \frac{q(7.08)(1.5) \ln 10/7}{7.08(0.01)(10)} = 5.35q$$

$$\Delta p_3 = p_7 - p_w = \frac{q\mu\beta \ln(7/0.7)}{7.08(kh)} = \frac{q(0.708)(1.5) \ln 7/0.7}{7.08(0.01)(10)} = 3.45q$$

$$\Delta p_T = 2000 - 950 = 6.37q + 5.35q + 3.45q \quad \text{Ec. 2.51A}$$

$$q = 69.2 \text{ stb/d}$$

b). Para hallar Δp_s podemos utilizar la siguiente relación que relaciona la caída de presión con daño ($p_e - p_{wf}$) y la caída de presión sin daño ($p_e - p_{wf}'$), en ambos casos, requeridas para producir los 69.2 stb/d.

$$(p_e - p_{wf}) - (p_e - p_{wf}') = \Delta p_s$$

$$p_e - p_{wf} = 2000 - 950 = 1050 \text{ psia.}$$

Pero, no conocemos $(p_e - p_{wf}')$. Esto es, cual es la caída de presión que demandaría una producción de 69.2 stb/d, si la formación no estuviere dañada. Es de esperar que esta caída sea menor a 1050 psia.

$$q = \frac{7.08kh(p_e - p_{wf}')}{\mu\beta \ln \frac{r_e}{r_w}}, \quad k = \text{Darcy} \quad \text{Ec. 2.37}$$

$$69.2 = \frac{7.08(0.1)(10)(p_e - p_{wf}')}{7.08(1.5) \ln \frac{700}{0.7}}$$

$$p_e - p_{wf}' = \frac{(69.2)(7.08)(1.5) \ln \left(\frac{700}{0.7}\right)}{(7.08)(0.1)(10)} = 717$$

$$\Delta p_{skin} = 1050 - 717 = 333 \text{ psia}$$

También podría resolverse utilizando

$$q = \frac{7.08kh(p_e - p_w - \Delta p_{skin})}{\mu\beta \ln \frac{r_e}{r_w}}, \quad k = \text{darcy}$$

y despejando Δp_{skin} .

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 2.1

Verifique la constante 1.127 en la ecuación siguiente

$$q = -1.127 \frac{kA \Delta p}{\mu \Delta x}, \quad \text{Ec.2.22}$$

1. Considerando las siguientes unidades,

$$q = \text{bbblres/d};$$

$$k = \text{darcy.}$$

$$A = \text{pie}^2$$

$$dp/dx = \text{psi/pie}$$

$$\mu = \text{cp}$$

2. Encuentre el valor de la nueva constante de ecuación 2.22 si,

$$A = m^2$$

$$dp/dx = atm/m$$

Ejercicio 2.2

Un yacimiento en contacto con un acuífero activo produce con una presión de fondo fluyente (P_{wf}) de 900 psi. Usar los siguientes datos del yacimiento para calcular la tasa de flujo en STB por día. (STB/día).

Datos:

- Porosidad, ϕ = 25 %
- Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o = 1.25 rb/STB
- Espesor neto de formación, h = 30 pies
- Viscosidad del petróleo, μ = 19 cp
- Radio de pozo, r_w = 0,49 pies
- Radio externo, r_e = 1000 pies
- Presión externa del yacimiento, P_e = 1110 psi
- Permeabilidad, k = 130 mD

Asumiendo que el yacimiento es abierto y el régimen de flujo es continuo, la ecuación de Darcy en unidades de campo, empleando la presión externa del yacimiento es:

$$q = \frac{1.127 \times 10^{-3} \cdot 2\pi kh(P_e - P_{wf})}{\beta_o \mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} \right)}, \quad \text{Ec 2.36}$$

Ejercicio 2.3

Un yacimiento produce con una presión de fondo fluyente (P_{wf}) de 1088 psi. Usar los siguientes datos del yacimiento para calcular la tasa de flujo en stb por día (STB/día).

Datos:

- Porosidad, ϕ = 28 %
- Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o = 1.4 rb/STB
- Espesor neto de formación, h = 49 pies
- Viscosidad del petróleo, μ = 21 cp
- Radio de pozo, r_w = 0,49 pies
- Radio externo, r_e = 820 pies

- Presión promedio del yacimiento, \bar{P} = 1204 psi
- Permeabilidad, k = 125 mD

Asumiendo que el yacimiento es abierto y el régimen de flujo es continuo, la ecuación de Darcy en unidades de campo, empleando la presión promedio del yacimiento es:

$$q = \frac{1.127 \times 10^{-3} \cdot 2\pi kh(\bar{P} - P_{wf})}{\beta_o \mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} \right)}, \quad \text{Ec. 4.97}$$

Ejercicio 2.4

Un yacimiento circular y pozo en el centro con las siguientes características, produce con una presión de fondo fluyente $P_{wf} = 1100$ Psi. Asumir que la presión del yacimiento se encuentra soportada por un acuífero (flujo continuo).

Datos:

Porosidad, ϕ	= 25 %
Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o	= 1.28 rb/STB
Espesor neto de formación, h	= 60 pies
Viscosidad del petróleo, μ	= 21 cp
Radio de pozo, r_w	= 0,49 pies
Radio externo, r_e	= 1000 pies
Presión inicial del yacimiento, P_i	= 1250 psi
Permeabilidad, k	= 125 mD

- Calcular el caudal de flujo Q en STB/día.
- Calcular y graficar la presión del yacimiento a diferentes distancias r con respecto al pozo (P vs r), asumiendo que la presión de fondo fluyente P_{wf} se mantiene constante. Emplear intervalos de 50 pies.
- ¿En qué sección del yacimiento ocurre la mayor caída de presión? Justifique el motivo de su respuesta.

Ejercicio 2.5

Usando la ecuación de Wyllie, calcule los datos de permeabilidad relativa para una muestra de núcleo cuyos datos de saturación constan en la tabla 2.5. Asuma que el núcleo es una arenisca bien cementada y que el agua irreductible satura 30% a la muestra.

(Slider, H.C.: *Worldwide Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods*, 1983, PennWell Books.

- $S_{wi} = 0.30$
- *Ec. de Wyllie para k_{ro} y k_{rg} :* $S^* = \frac{S_o}{1 - S_{wi}}$

Tabla 2.5 Permeabilidades relativas en distintos tipos de arenas en función de saturación.

	k_{ro}	k_{rg}
Arena no consolidada – bien clasificada	$(S^*)^{3.0}$	$(1 - S^*)^3$
Arena no consolidada – pobremente clasificada	$(S^*)^{3.5}$	$(1 - S^*)^2(1 - S^{*1.5})$
Arena cementada, caliza oolítica y caliza vulgar	$(S^*)^{4.0}$	$(1 - S^*)^2(1 - S^{*2})$

- *Ec. de Wyllie para k_{ro} y k_{rw} :* $S^* = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi}}$

	k_{ro}	k_{rw}
Arena no consolidada – bien clasificada	$(1 - S^*)^3$	$(S^*)^{3.0}$
Arena no consolidada – pobremente clasificada	$(1 - S^*)^2(1 - S^{*1.5})$	$(S^*)^{3.5}$
Arena cementada, caliza oolítica y caliza vulgar	$(1 - S^*)^2(1 - S^{*2.0})$	$(S^*)^{4.0}$

Tabla 2.6 Cálculo de las permeabilidades para el ejercicio 2. 5 propuesto.

Saturación			k_{rw}	k_{ro}
Water	oil	S^*	$S^{*4.0}$	$(1-S^*)^2(1-S^{*2})$
100	0	1	1	-
90	10	0.857	0.539	0.0054
80	20	0.714	0.26	0.04
60	40	0.429	0.034	0.266
40	60	0.143	0.0004	0.719
30	70	-	0	1

Ejercicio 2.6

Un pozo drena un yacimiento radial que consiste de dos capas (“camas” del inglés beds) con permeabilidades absolutas sin daño de 100 y 75 md. Cerca del pozo la formación está dañada lo cual afecta a ambas zonas hasta un radio de 33 pies, resultando en una reducción de la permeabilidad absoluta a 60 y 30 md, respectivamente. Si el radio del pozo es 0.33 pies y no existe movimiento (flujo) vertical de los fluidos, cuál es la tasa de flujo continuo (steady state) de gas cuando la saturación de agua es 30% y p_e y p_w son 1000 y 800 psia, respectivamente. Asuma que no existe caída presión adicional ocasionada por la turbulencia. Los espesores de las capas son 2 y 3 pies, respectivamente. El radio externo de drenaje es 3300 pies, y la Fig. 2.15 es aplicable. ($k_{ro}=k_{rw}$, en la Fig.) No fluye agua.

(Slider, H.C.: Worldwide Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods, 1983, PennWell Books.)

- *Viscosidad del gas = 0.01 cp*
- *Factor de desviación del gas = 0.97*
- *Temperatura del yacimiento = 140 °F*

NOTA: Antes de empezar a resolver haga un dibujo de la distribución de las capas, con sus permeabilidades y espesores.

Capítulo 2.
REFERENCIAS

1. Dake, L.P.: *Fundamentals of Reservoir Engineering*, Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (1978). 100-112.
2. Muskat, M.: *The Flow is Homogeneous Fluid Through Porous Media*, J.W. Edwards, Inc. (1946). 55-56, 127-128.
3. Raghavan, R.: Well Test Analysis, Prentice Hall Petroleum Engineering Series (1993). 12-15
4. Craft, B.C. and Hawkins, M., Revised by Terry, Ronald E.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, second edition, Prentice Hall Inc. (1991). 210-225
5. Craft, B.C. and Hawkins, M.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, first edition, Prentice Hall Inc. (1959). 261-263.
6. Wattenbarger, R.A: and Ramey, H.J. Jr.: “Gas Well Testing with Turbulence, Damage and Wellbore Storage”. JPE (Aug. 1968) 877-887
7. Slider, H.C.: *Worldwide Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods*, PennWell Books (1983). 61-64

CAPITULO III

LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD PARA LÍQUIDO LIGERAMENTE COMPRESIBLE

En este capítulo se desarrollará la ecuación de difusividad que describe el flujo de fluidos en el yacimiento bajo condiciones previamente establecidas y se presentará sus soluciones exactas.

3.1. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL RADIAL BÁSICA DE FLUJO EN MEDIOS POROSOS EN UNIDADES DE CAMPO, USADA PARA MODELAR SISTEMAS DE FLUJO DEPENDIENTES DE TIEMPO.

Para la deducción de la ecuación de difusividad partimos de un balance de flujo de masa en un volumen elemental del modelo de celda radial de flujo en el yacimiento, como el que se ilustra en figura 3.1. Se introduce la ecuación de flujo de Darcy en el balance y se obtiene la ecuación de continuidad ^{1,2,3,4,5}

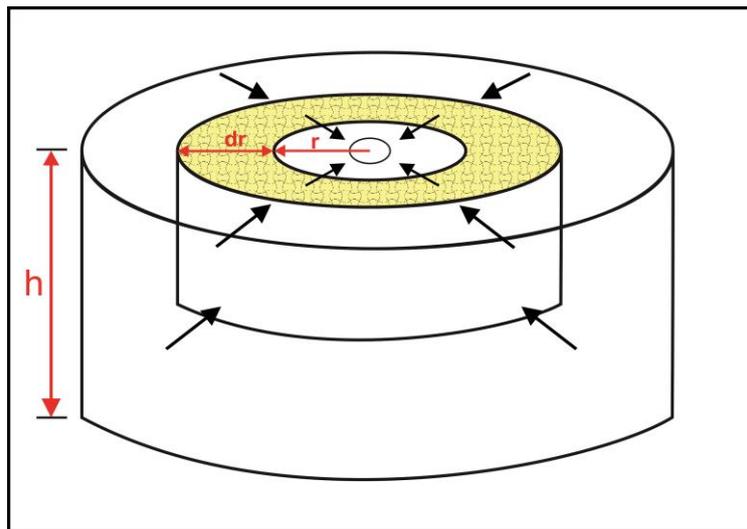


Fig. 3.1: Modelo de celda radial de flujo.

Para ello suponemos:

1. Sea V_E = un volumen elemental poroso efectivo de la roca lleno con fluidos (zona sombreada de la figura 3.1 cuyo volumen es desarrollado en figura 3.1A. El volumen elemental se encuentra exagerado para una mejor percepción). Este volumen elemental poroso efectivo es igual al volumen de fluidos en los poros, referido su volumen a condiciones de yacimiento. Las condiciones generales del proceso de flujo en medios

porosos que desarrollaremos son que tanto la roca como los fluidos no son del todo incompresibles: la tasa de flujo q ; la densidad de los fluidos en la roca ρ ; y, la porosidad efectiva de la roca ϕ son todos funciones de presión $f(p)$.

2. Con relación a la figura 3.2, el $V_E = 2\pi r dr h \phi$

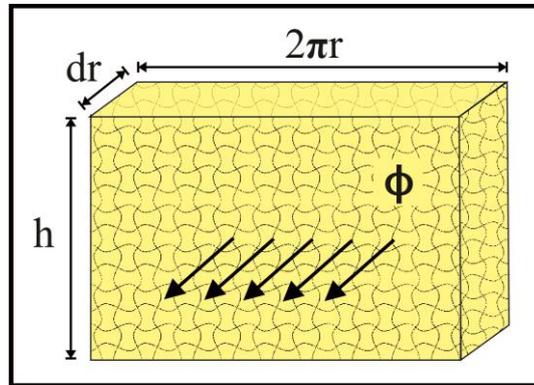


Fig. 3.2. Desarrollo del volumen elemental poroso correspondiente al cilindro sombreado de figura 3.1.

3. La tasa de flujo de masa puede expresarse así,

$$q\rho = \frac{L^3}{t} \times \frac{M}{L^3} \rightarrow q\rho = \frac{M}{t} \left(\frac{\text{masa}}{\text{tiempo}} \right), \text{ tasa de flujo de masa.}$$

q = tasa o caudal volumétrico del fluido

ρ = densidad del fluido

4. Al hacer un balance de masa balance de masa a la celda radial (volumen elemental), asumimos que solo un fluido se mueve en el yacimiento; en el presente caso: petróleo. El agua y/o gas pueden estar presentes en el espacio poroso pero, ser inmóviles (saturaciones críticas).

5. Recordando que el flujo es hacia el pozo, es decir se trata de un pozo de producción, aplicamos un balance de masa en el volumen elemental, como se ilustra en la figura 3.3:

Masa del fluido que entra al V_E en una unidad de tiempo, a la distancia $r+dr$ desde el pozo, $(q\rho)_{r+dr}$	-	Masa del fluido que sale del V_E en una unidad de tiempo, a la distancia r desde el pozo, $(q\rho)_r$	=	Cambio de masa del fluido dentro del V_E en una unidad de tiempo, $\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_E)$
---	---	---	---	---

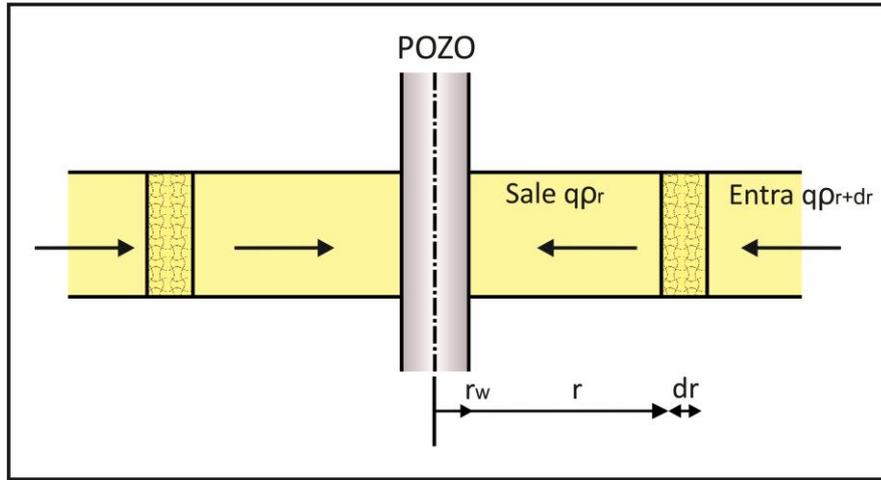


Fig. 3.3: Flujo de masa que atraviesa el V_E (sección sombreada) en el yacimiento¹

6. En términos de caudal y densidad, el balance de flujo de masa viene a quedar:

$$(q\rho)_{r+dr} - (q\rho)_r = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V_E)$$

$$(q\rho)_r + \frac{\partial}{\partial r}(q\rho)dr - (q\rho)_r = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot 2\pi r dr h \phi)$$

Derivadas parciales por cuanto q, ρ, ϕ varían con presión y esta, con distancia r y tiempo t .

$$\frac{\partial}{\partial r}(q\rho)dr = 2\pi r dr h \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)$$

En cualquier sistema conocido de unidades consistentes (cgs, mks, SI). Ec. 3.1

Si q viene dado en rb/d , ρ en lbm/pie^3 , r & h en pies, $t = \text{horas}$, entonces, en unidades consistentes de campo la ecuación de balance es:

$$\left[\frac{\text{rb}}{\text{dias}} \cdot \frac{\text{lbm}}{\text{pie}^3} \cdot \frac{\text{pie}^3}{\text{bbl}} \cdot \frac{\text{dias}}{\text{hr}} \cdot \frac{\text{pie}}{\text{pie}} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left(q\rho \cdot \frac{5.615}{24} \right) dr = 2\pi r dr h \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \left[\text{pie}^3 \frac{\text{lbm}}{\text{hr}} \right]$$

Como se puede observar, las unidades son lbm/hr a cada lado de la ecuación.

Simplificando dr que aparece a ambos lados de la ecuación, tenemos

$$\text{ec. de continuidad: } \frac{\partial}{\partial r} \left(q\rho \cdot \frac{5.615}{24} \right) = 2\pi r h \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) \quad \text{Ec. 3.2}$$

Aquí q, ρ y ϕ son variables que dependen de presión, la que cambia con tiempo de producción y espacio o posición dentro del yacimiento.

A efectos de encontrar una ecuación diferencial que pueda resolverse analíticamente en términos de presión cuya solución sea $p = f(r,t)$, es necesario hacer unas sustituciones y

asunciones de modo de presentar la ecuación diferencial expresada en términos de presión.

Darcy puede aplicarse para sustituir q en la ecuación de continuidad. En unidades de campo y considerando q en bbl/d, la ecuación de Darcy para flujo radial horizontal es:

$$q = 1.127 \times 10^{-3} \frac{kA}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{Ec. 2.21A}$$

$$q = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k(2\pi rh)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \text{ flujo radial horizontal}$$

Unidades:

$$\begin{aligned} q &= \text{rb/d} & r &= \text{pies} \\ k &= \text{md} & \mu &= \text{cp} \\ h &= \text{pies} & p &= \text{psia} \end{aligned}$$

Sustituyendo q en la ecuación de continuidad por esta última ecuación, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(1.127 \times 10^{-3} \frac{k(2\pi rh)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \times \rho \frac{5.615}{24} \right) = 2\pi rh \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi)$$

$$1.127 \times 10^{-3} \times \frac{5.615}{24} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \rho \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi)$$

Simplificando y arreglando obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \rho \right) = \frac{1}{0.0002637} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi)$$

Asumiendo k y μ constantes,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \rho \right) = \frac{\mu}{k} \frac{1}{0.0002637} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) \quad \text{Ec. 3.2A}$$

Esta ecuación 3.2A es el resultado de combinar la ecuación de continuidad con la ecuación de Darcy, en procura de expresar la ecuación de flujo en términos de presión como función de r y t . Aún tenemos en la ecuación a ρ y ϕ que también son funciones de presión y que procederemos a sustituirlos utilizando para ello una ecuación de estado (EOS del termino en inglés).

3.2. COMPRESIBILIDAD Y ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD

En esta sección presentaremos una ecuación de estado, EOS, que nos permite relacionar ρ y ϕ con la presión, hacer sustituciones en la ecuación de continuidad (ecuación 3.2A) y establecer la ecuación de difusividad. Hacemos uso de la ecuación de compresibilidad como la ecuación de estado que relaciona las compresibilidades con la densidad de los

fluidos y la porosidad de la formación. La figura 3.4 muestra el comportamiento del volumen versus presión para diferentes tipos de fluidos, cuya relación es inversamente proporcional. Mayor presión, menor volumen. Por consiguiente, el cambio de volumen con presión será negativo. Para volver positiva la compresibilidad, a la ecuación de la compresibilidad de los fluidos, ecuación 3.3, se le acompaña el signo negativo.

La compresibilidad c , en términos de la densidad ρ y presión puede relacionarse como sigue.

$$\rho = \frac{m}{V} \therefore V = \frac{m}{\rho},$$

$$c = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p}, \text{ a temperatura constante.} \quad \text{Ec. 3.3}$$

$$\frac{\rho}{m} \frac{\partial \left(\frac{m}{\rho} \right)}{\partial p} = \frac{\rho}{m} \left(-\frac{m}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$$

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \text{ a temperatura constante.} \quad \text{Ec. 3.3A}$$

$$c \partial p = \frac{1}{\rho} \partial \rho \rightarrow c dp = \frac{1}{\rho} d\rho, \text{ derivadas totales por T cte.} \quad \text{Ec. 3.3B}$$

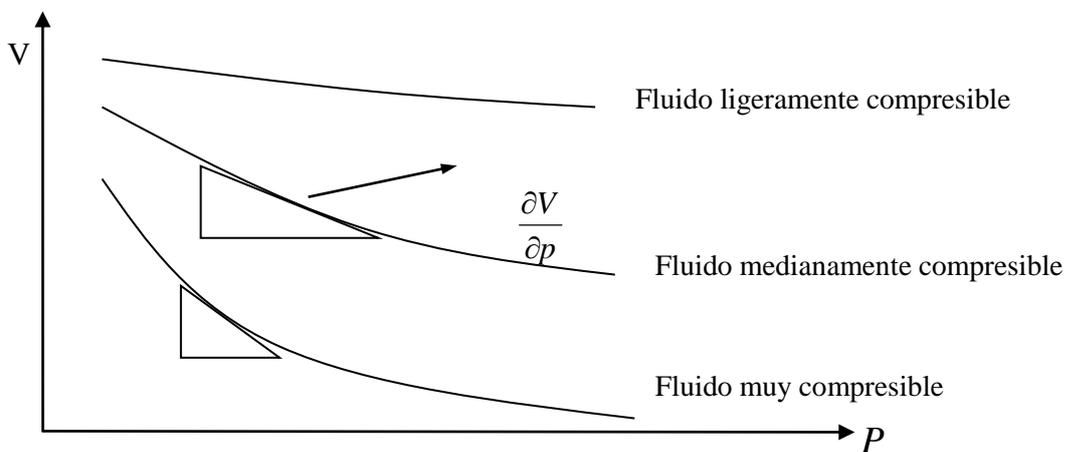


Fig. 3.4. Variación del volumen con presión distintos fluidos

Para un fluido de compresibilidad pequeña y constante, asumiendo ρ_b como la densidad a una presión base p_b , podemos integrar y obtener,

$$c \int_{p_b}^p dp = \int_{\rho_b}^{\rho} \frac{1}{\rho} d\rho,$$

$$c(p - p_b) = \ln\left(\frac{\rho}{\rho_b}\right)$$

$$\rho = \rho_b e^{c(p-p_b)} = \rho_b \exp[c(p - p_b)] \quad \text{Ec 3.3C}$$

Esta es una EOS, que asume c pequeña y constante. (p.e.: $c = 5 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1}$)

Arreglando Ec 3.3B, podemos obtener,

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = c\rho, \text{ para un solo fluido presente en el medio.} \quad \text{Ec 3.3D}$$

Por otro lado, el efecto de reducir la presión hace que la presión dentro del poro decaiga y el poro se contraiga, es decir, disminuya su volumen, como muestra la figura 3.5. A diferencia de los fluidos, el cambio de volumen de los poros es del mismo sentido que la presión y, la ecuación de la compresibilidad de signo positivo, como se muestra en la ecuación 3.4.

Llamamos compresibilidad del volumen poroso a c_f , cuya definición es:

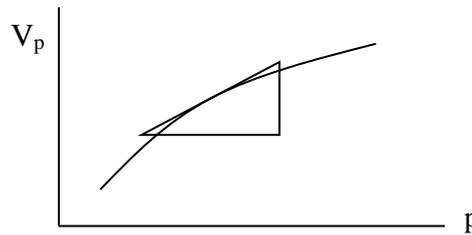


Fig. 3.5 Variación del volumen poroso con presión

$$c_f = \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial p} = \frac{1}{\phi V_b} \frac{\partial(\phi V_b)}{\partial p} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad \text{Ec. 3.4}$$

La compresibilidad total entonces queda definida así,

$$c_t = c + c_f \quad \text{Ec. 3.5}$$

Donde c es la compresibilidad del fluido en el medio. Si hubiere más de un fluido en los poros, c es calculada como la compresibilidad de cada fluido presente ponderada por su respectiva saturación. Para un medio poroso saturado genéricamente con petróleo, gas y agua, la “compresibilidad del fluido” es igual a:

$$c = c_o S_o + c_g S_g + c_w S_w \quad \text{Ec. 3.5A}$$

Ahora, expandiendo el lado izquierdo y derecho de la ecuación 3.2A, derivando por partes, usando la regla de cadena e, introduciendo la EOS de la compresibilidad, obtenemos

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{0.0002637k} \phi \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \frac{\mu}{0.0002637k} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{Ec. 3.2B}$$

El cálculo del término c_t en ecuación 3.2B es ilustrado en el problema 3.1.

Asumiendo que para flujo radial de un fluido de compresibilidad pequeña y constante,

$c \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2$ es insignificante comparado con los otros términos de la ecuación 3.2B (ver problema 3.1), podemos eliminar ese término y obtener finalmente la ecuación de difusividad,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Ecuación de difusividad para flujo de líquidos

Ec. 3.6

O,

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}$$
Ec. 3.6A

donde:

$$\eta = 0.0002637 \frac{k}{\phi \mu c_t}, \frac{p i e^2}{h r}$$

Constante de difusividad hidráulica

Ec. 3.6B

$\eta = eta$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{0.0002637k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Ecuación de difusividad en unidades de campo

Ec. 3.6C

Notas sobre la compresibilidad

Razones de compresibilidades típicas de los principales componentes de los yacimientos:

Tabla 3.1. Compresibilidad típica de los fluidos en el yacimiento⁶.

Símbolos	(kg/cm ²) ⁻¹	psi ⁻¹
c_f	4 – 14x10 ⁻⁵	2.8 – 9.8x10 ⁻⁶
c_o	7 – 140x10 ⁻⁵	4.9 – 98.4x10 ⁻⁶
c_w	3 – 6x10 ⁻⁵	2.1 – 4.2x10 ⁻⁶
c_g (p = 70 kg/cm²)	1300 – 1800x10 ⁻⁵	9.1 – 12.7x10 ⁻⁴
c_g (p = 350 kg/cm²)	70 – 300x10 ⁻⁵	0.5 – 2.1x10 ⁻⁴

Problema 3.1.- Cálculo de la compresibilidad⁷.

A.- Para el caso de un yacimiento gasífero con $c_f = 5.1 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$, $S_g = 85\%$ y $S_{wi} = 15\%$, $c_g = 2 \times 10^{-4} \text{ psi}^{-1}$ y $c_w = 3.2 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$. Encuentre la compresibilidad total.

Desarrollo:

$$c_t = c_g S_g + c_w S_{wi} + c_f \quad \text{Ec. 3.5A}$$

$$c_t = 2 \times 10^{-4} (0.85) + 3.2 \times 10^{-6} (0.15) + 5.1 \times 10^{-6} = 175.6 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$$

Nota: S_{wi} = saturación de agua inmóvil.

B.- Suponga que $\partial p / \partial r$ en un yacimiento petrolífero sin gas libre en el yacimiento (petróleo subsaturado) sea 0.57 psi/pie y que $c_o = 12.4 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$, $c_w = 3.2 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$, $S_o = 0.85$ y $S_{wi} = 0.15$. Calcule: $c(\partial p / \partial r)^2$. Encuentre $c(\partial p / \partial r)^2$.

Desarrollo:

$$c = c_o S_o + c_w S_{wi} \quad \text{Ec. 3.5A}$$

$$c = 12.4 \times 10^{-6} (0.85) + 3.2 \times 10^{-6} (0.15) = 11.02 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$$

$$c(\partial p / \partial r)^2 = 11.02 \times 10^{-6} (0.57)^2 = 3.58 \times 10^{-6} \text{ psi/pie}^2,$$

Este valor es bien pequeño, que puede despreciarse, como se hizo al derivar la ecuación de difusividad.

C.- Suponga que del laboratorio se obtuvieron los siguientes datos:

Tabla 3.2. Expansión del volumen del crudo hasta el punto de burbujeo (Reporte de laboratorio)

P (psig)	Volumen del petróleo relativo al volumen a la presión de burbuja (V/V_b)
5000	0.97390
4400	0.97979
3800	0.98624
3400	0.99090
3000	0.99594
2800	0.99858
2695	1.00000

Encuentre la compresibilidad promedio de este petróleo:

- a) Entre 5000 y 4400 psig
- b) Entre 4400 y 3400 psig
- c) Entre 3400 y 2695 psig, presión de burbujeo.

Desarrollo:

Compresibilidad promedio

$$c_o = -\frac{1}{V} \frac{V_1 - V_2}{p_1 - p_2} \quad \text{Ec. 3.7}$$

V o V₁ es el volumen anterior, es decir, el volumen a la mayor presión; así es comúnmente reportado.

- a) $c_o = ?$ entre 5000 y 4400 psig

$$p_1 = 5000 \# \quad V_1 = 0.97390$$

$$p_2 = 4400 \# \quad V_2 = 0.97979$$

$$c_o = -\frac{1}{0.97390} \left(\frac{0.97390 - 0.97979}{5000 - 4400} \right) = 10.08 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$$

- b) $c_o = ?$ entre 4400 y 3400 psig

$$p_1 = 4400 \# \quad V_1 = 0.97979$$

$$p_2 = 3400 \# \quad V_2 = 0.99090$$

$$c_o = -\frac{1}{0.97979} \left(\frac{0.97979 - 0.99090}{4400 - 3400} \right) = 11.34 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$$

- c) $c_o = ?$ entre 3400 y 2695 psig

$$p_1 = 3400 \# \quad V_1 = 0.99090$$

$$p_2 = 2695 \# \quad V_2 = 1.00000$$

$$c_o = -\frac{1}{0.99090} \left(\frac{0.99090 - 1.00000}{3400 - 2695} \right) = 13.03 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$$

Como se puede apreciar, la compresibilidad varía según el rango de presión que prevalece.

Una compresibilidad de $13.03 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$ significa que el volumen de 1 millón de barriles de fluido en el yacimiento incrementará en 13.03 barriles por cada psi de reducción de la presión.

También se lo expresa como:

$$13.03 \frac{\text{bbl}}{\text{MMbbl}} / \text{psi}$$

Generalmente la compresibilidad de los petróleos subsaturados varia de 5 a $100 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$, siendo mayor para petróleos de más alta gravedad API, de más elevada cantidad de gas en solución y a más alta temperatura.

3.3. SOLUCIONES EXACTAS DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD RADIAL

Planteamiento del problema.

Es importante tener en cuenta las asunciones hechas en la derivación de la Ecuación de Difusividad, toda vez que estas condicionarán (limitarán) las aplicaciones que se pueden hacer de su solución. Estas asunciones son⁸:

1. Medio poroso de comportamiento homogéneo e isotrópico: El medio poroso tiene una permeabilidad y compresibilidad constante. No hay daño a la formación
2. La tasa de flujo, q , es medida a boca de pozo en superficie. (stb/día).
3. Apenas el pozo es abierto a producción la tasa de producción en el yacimiento pasa inmediatamente de cero a $q\beta$ bbl/d, constante, sin considerar aun los llamados efectos de almacenamiento de pozo, fenómeno que será considerado posteriormente (Capítulo 5) para hallar una nueva solución.
4. Una sola fase fluye en el yacimiento. (Yacimiento de petróleo con presión arriba de la presión de burbujeo. Si existiera gas libre en el yacimiento de petróleo o, petróleo libre en el yacimiento de gas, la saturación de la fase minoritaria debe ser igual o menor a la saturación de gas o de petróleo crítica, respectivamente).

5. El flujo es radial. (Todo el espesor de la sección productiva, h , ha sido disparado y expuesto al flujo. Barreras impermeables al topo y fondo del yacimiento: $k_{\text{tope}} = k_{\text{fondo}} = 0$).
6. El flujo es laminar. (No hay turbulencia en el yacimiento; el flujo es tipo Darcy).
7. Los efectos de gravedad son despreciables. (Yacimiento horizontal).
8. Las condiciones de flujo son isotérmicas. (Capacidad calorífica del fluido \ll que capacidad calorífica de la roca).
9. El fluido tiene una compresibilidad pequeña y constante.
10. El producto compresibilidad \times gradiente al cuadrado de presión, es despreciable. ($c (\partial p / \partial r)^2 \rightarrow 0$)

La Tabla 3.3 presenta un resumen de las soluciones que presentaremos, según el tipo de yacimiento y el tiempo de flujo transcurrido. Las soluciones más útiles son para: a) yacimientos cilíndricos cerrados (régimen de flujo transitorio y pseudo continuo) y, b) yacimientos cilíndricos abiertos (régimen de flujo transitorio y continuo).

Tabla 3.3. Soluciones de la ecuación de difusividad para diferentes tipos de yacimiento y tiempos.

TIPO DE YACIMIENTO	SOLUCIONES	
	A tiempos tempranos	A tiempos más tardes
Yacimiento cilíndrico Cerrado	Solución para la condición de flujo transitorio	Solución para la condición de flujo pseudocontinuo
Yacimiento cilíndrico abierto	Solución para la condición de flujo transitorio	Solución para la condición de flujo continuo

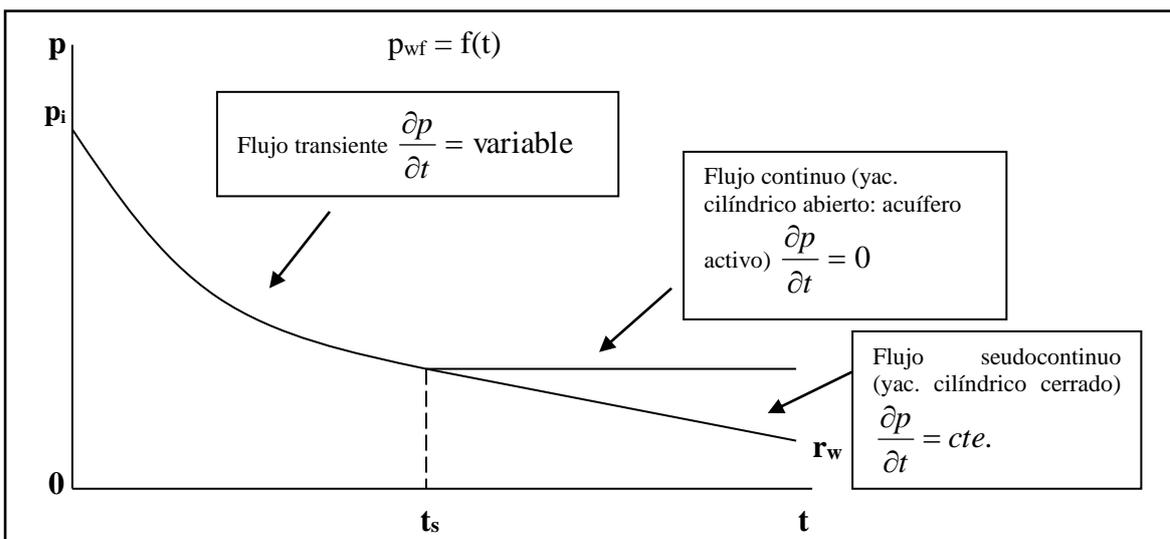


Fig. 3.5 Comportamiento de la presión vs tiempo para yacimiento cilíndrico cerrado y yacimiento cilíndrico abierto.⁹

Como se ha dicho, en el yacimiento la tasa de flujo al pozo, $q\beta$, es constante.

$$q\beta = \frac{stb}{d} \times \frac{rb}{stb} = \frac{rb}{d}, \text{ a condiciones de } p \text{ y } T \text{ de flujo al pozo.}$$

En la práctica β es evaluada a condiciones promedias del yacimiento y por consiguiente q (stb/d) también resulta ser constante. Esta situación indicaría que en la operación de pruebas de pozos la tasa de flujo en superficie debe ser mantenida constante.

A. YACIMIENTOS CILÍNDRICOS CERRADOS, CON q AL POZO CONSTANTE¹.

A1. Condiciones de frontera e inicial

Para este caso, el problema a resolver es representado por el siguiente modelo matemático que ya fue desarrollado en la Sección 3.2 y que se presenta aquí como ecuación 3.8,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{Ec. de difusividad (con todas sus asunciones) \quad Ec. 3.8}$$

Esta es una ecuación de derivadas parciales de segundo grado en r y de primer grado en t . Para encontrar una solución de esta ecuación es necesario especificar sus condiciones inicial y de frontera.

Para el caso de yacimientos cilíndricos cerrados con caudal del pozo q constante, la ecuación de derivadas parciales estará sujeta a la condición inicial y de fronteras siguientes:

$$1. \quad p(r,0) = p_i \quad \text{cond. inicial } t = 0, \forall r \quad \text{Ec. 3.9}$$

$$2. \quad r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = 141.2 \frac{q\mu B}{kh} \quad \text{cond. de frontera interior } r = r_w, t > 0: \\ (q|_{r=r_w} = \text{cte}) \quad \text{Ec. 3.10}$$

$$3. \quad \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_e} = 0 \quad \text{cond. de frontera exterior } r = r_e, t \geq 0: \\ (q|_{r=r_e} = 0, \text{ no hay flujo – yacimiento cerrado) \quad Ec. 3.11}$$

1. La presión al tiempo $t = 0$, es decir antes de empezar la producción, es $p = p_i$ en cualquier parte del yacimiento. No hay flujo.

2. Tasa al pozo = constante. ($q_{\text{pozo}} = \text{cte.}$) a cualquier $t > 0$.

En figura 3.6 puede apreciarse esta condición.

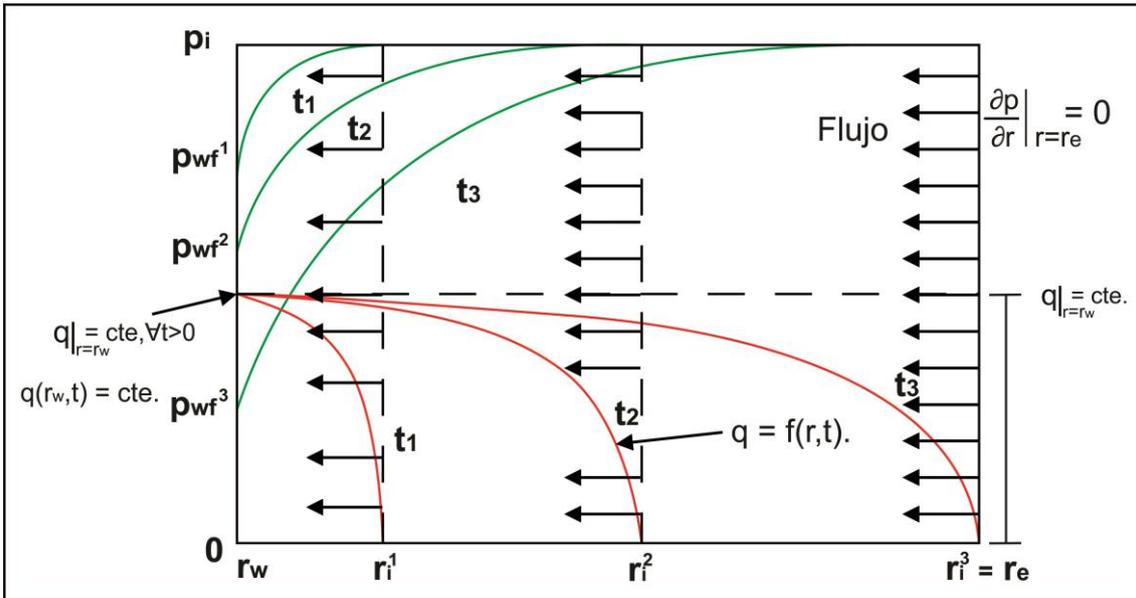


Fig. 3.6: Perfiles de presión y tasa de flujo en el yacimiento para $t > 0$. Yacimiento cerrado.

$$q_{pozo} = 1.127 \times 10^{-3} \frac{k(2\pi rh)}{\mu B} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w}$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = 141.2 \frac{q_{well} \mu \beta}{kh} = cte. \quad \text{Ec. 3.10}$$

Nota: al tiempo t un infinitésimo mayor a cero, instantáneamente la tasa al pozo, $q(r_w, t)$, salta de cero a q_{pozo} , y se mantiene constante en el tiempo.

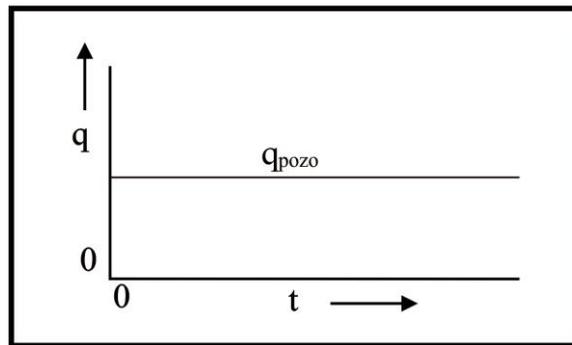


Fig. 3.7. Salto instantáneo de tasa 0 a q_{pozo} para $t > 0$

3. No existe flujo al radio exterior r_e (yac. cerrado), $\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_e} = 0$ Ec. 3.11

Esto es, al radio $r = r_e$, no hay flujo porque no hay caída de presión. El yacimiento no se prolonga más allá de r_e .

Nótese: La ecuación de difusividad viene expresada en términos de la variación de la presión p y describe el comportamiento de la presión en función del radio r y el tiempo t . La solución es de tipo:

$$p = f(r,t)$$

De ahí que necesitemos especificar las condiciones inicial y de fronteras.

A.2. Variables Adimensionales ³

Por varias razones, que más adelante serán explicadas, es mucho más conveniente expresar la ecuación de difusividad radial y sus soluciones, en términos de las variables adimensionales siguientes:

En unidades de campo

- r_D = radio adimensional,

definido como:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad \text{Ec. 3.12}$$

$$r_{eD} = \frac{r_e}{r_w} \quad \text{Ec. 3.13}$$

- t_D = tiempo adimensional,

Definido como:

$$t_D = \frac{0.0002637kt}{\phi\mu c_t r_w^2} \quad \text{Ec. 3.14}$$

$$t_{DA} = \frac{0.0002637kt}{\phi\mu c_t A} = t_D \frac{r_w^2}{A} \quad \text{Ec. 3.15}$$

A = área de drenaje del pozo, vista en planta = πr_e^2 (no es el área perpendicular al flujo que en unos casos también usa el símbolo A).

- p_D = presión adimensional,

Definido como:

$$p_D = \frac{kh}{141.2qB\mu}(p_i - p) \quad \text{Ec. 3.16}$$

Al sustituir estas variables en la ecuación de difusividad y sus condiciones inicial y de contornos, se tendrá el problema expresado en términos adimensionales.

De ecuación 3.16, por definición:

$$p = p_i - \frac{141.2qB\mu}{kh} p_D$$

Obteniendo la primera y segunda derivadas,

$$\text{a) } \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{\partial p_D}{\partial r} = -\frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} = -\frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{1}{r_w} \frac{\partial p_D}{\partial r_D}$$

$$\text{b) } \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = -\frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{1}{r_w} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \frac{\partial r_D}{\partial r} = -\frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{1}{r_w^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2}$$

$$\text{c) } \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \frac{\partial t_D}{\partial t} = -\frac{141.2qB\mu}{kh} \times \frac{0.0002637k}{\phi\mu c_t r_w^2} \frac{\partial p_D}{\partial t_D}$$

Y, reemplazando en la ecuación de difusividad, se tiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\mu}{0.0002637k} \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \text{Ec. de difusividad} \quad \text{Ec. 3.6C}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\mu\phi c_t}{0.0002637k} \frac{\partial p}{\partial t} \\ -\frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{1}{r_w^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} - \frac{1}{r_w r_D} \frac{141.2qB\mu}{kh} \frac{1}{r_w} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} &= \frac{\mu\phi c_t}{0.0002637k} \left(-\frac{141.2qB\mu}{kh} \times \frac{0.0002637k}{\phi\mu c_t r_w^2} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \right) \\ \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} &= \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.17}$$

Sujeta a la condición inicial y condiciones de fronteras para yacimiento cilíndrico cerrado, las cuales son:

$$1. \quad p_D = 0, \quad \text{a } t_D = 0 \quad \text{Ec. 3.18}$$

$$2. \quad \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1, \quad \text{para } r_D = 1 \quad \text{Ec. 3.19}$$

$$3. \quad \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_{eD}} = 0, \quad \text{para } r_D = r_{eD} \quad \text{Ec. 3.20}$$

La forma de la ecuación 3.17 y su condición inicial y condiciones de fronteras (ecuaciones 3.18, 3.19 y 3.20) permite encontrar una solución analítica a la ecuación de difusividad mediante el conocido procedimiento matemático de la transformada de Laplace, ampliamente utilizado en problemas de flujo de calor e hidrogeología.

A.3. Solución analítica

Llamada por algunos autores como la ecuación de van Everdingen y Hurst¹⁰ (1949), Matthews y Russell¹ (1967) han presentado la solución analítica a la ecuación de difusividad radial para un yacimiento cilíndrico cerrado, como:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2}{r_{eD}^2 - 1} \left(\frac{r_D^2}{4} + t_D \right) - \frac{r_{eD}^2 \ln r_D}{r_{eD}^2 - 1} - \frac{3r_{eD}^4 - 4r_{eD}^4 \ln r_{eD} - 2r_{eD}^2 - 1}{4(r_{eD}^2 - 1)^2} \tag{Ec. 3.21}$$

$$+ \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t_D} J_1^2(\alpha_n r_{eD}) [J_1(\alpha_n) Y_0(\alpha_n r_D) - Y_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n r_D)]}{\alpha_n [J_1^2(\alpha_n r_{eD}) - J_1^2(\alpha_n)]}$$

Donde α_n son las raíces o valores eigenes de la ecuación:

$$J_1(\alpha_n r_{eD}) Y_1(\alpha_n) - J_1(\alpha_n) Y_1(\alpha_n r_{eD}) = 0$$

y J_0, J_1, Y_0 y Y_1 son funciones de Bessel.

La ecuación 3.21 es para obtener la presión a cualquier radio, r , y tiempo, t .

Para $r_{eD} \gg 1$ y $r_D = 1$ es decir, la solución a $r = r_w$, al pozo, se tiene:

$$p_D(r_D = 1, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 t_D} J_1^2(\alpha_n r_{eD})}{\alpha_n^2 [J_1^2(\alpha_n r_{eD}) - J_1^2(\alpha_n)]} \tag{Ec. 3.22}$$

Debe resaltarse que las ecuaciones 3.21 y 3.22 son una solución global que contienen todos los períodos o regímenes de flujo para un yacimiento cilíndrico cerrado, a saber:

- El transitorio temprano
- El transitorio tardío (se presenta con más acento cuando el pozo no está en el centro del área de drenaje o las fronteras no son equidistantes al pozo).

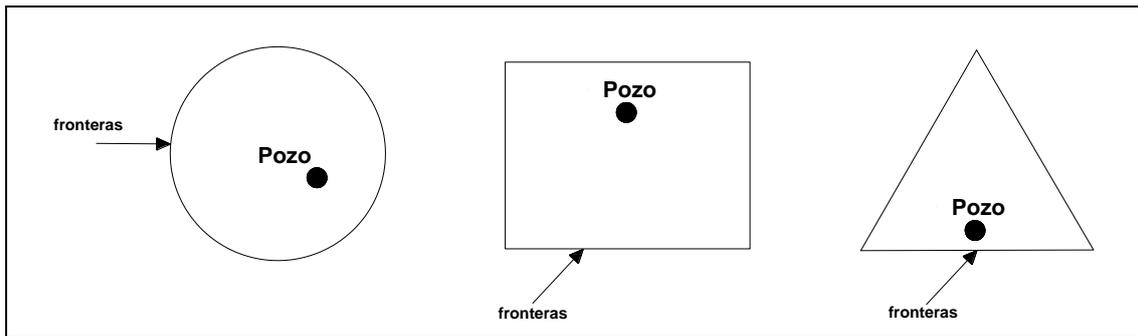


Fig. 3.8. Posiciones excéntricas del pozo dentro de su área de drenaje

- El de estado pseudo-continuo

Estos regímenes de flujo aparecen en el pozo de manera secuencial en función del tiempo en que la perturbación de presión provocada en el yacimiento al cambiar la tasa de flujo se difunde en el yacimiento.

Las razones para usar variables adimensionales en el análisis del comportamiento de la presión, son¹¹:

1. No importa la naturaleza del fluido, la solución es la misma.

Las variables adimensionales llevan tanto a una simplificación como a una generalización de las matemáticas involucradas. Esto implica que si el flujo radial de cualquier fluido puede ser descrito por la ecuación de difusividad, entonces las soluciones serán idénticas sin importar la naturaleza del fluido (sea petróleo, gas u otro).

2. No importa el sistema de unidades, las ecuaciones son las mismas.

Puesto que las variables son adimensionales entonces las ecuaciones expresadas en términos de ellas son invariantes en la forma, sin importar el sistema de unidades usado (darcy, cgs, de campo u otro). Lo mismo es válido para la graficación adimensional de p_D vs. t_D ; las escalas tienen el mismo valor numérico sean que se expresen en unidades darcy, de campo o SI.

3. La literatura técnica especializada viene ordinariamente en variables adimensionales.

La mayoría de la literatura sobre análisis de presión generalmente tiene todas sus ecuaciones expresadas en forma adimensional.

B. YACIMIENTOS CILINDRICOS ABIERTOS¹.

B.1. Condiciones de frontera e inicial

Para este caso, el problema de valor inicial y de frontera a resolverse es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t}, \text{ Ecuación de difusividad (con todas sus asunciones)} \quad \text{Ec.3.8}$$

sujeta a:

$$1. \quad p(r,0) = p_i, \quad \text{condición inicial} \quad \text{Ec. 3.23}$$

$$2. \quad r \frac{\partial p}{\partial r}_{r=r_w} = 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh}, \quad \text{cte., condición de frontera interior} \quad \text{Ec. 3.24}$$

$$3. \quad p(r_e, t) = p_i, \quad \text{condición de frontera exterior: la presión al radio } r_e \text{ es mantenida a } p_i \text{ durante todo el tiempo.} \quad \text{Ec. 3.25}$$

En forma adimensional viene a quedar:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \text{Ec. 3.17}$$

sujeta a:

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad \text{Ec. 3.26}$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial r_D} = -1 \quad \text{a} \quad r_D = 1 \quad \text{Ec. 3.27}$$

$$p_D(r_{eD}, t_D) = 0 \quad \text{a} \quad r_D = r_{eD} \quad \text{Ec. 3.28}$$

B.2. Solución Analítica

Puede demostrarse que la solución exacta de la ecuación de difusividad sujeta a estas condiciones inicial y de contorno es¹:

$$p_D(r_D, t_D) = \ln r_{eD} - \ln r_D + \sum C_n [J_o(\lambda_n r_D) Y_o(\lambda_n r_{eD}) - Y_o(\lambda_n r_D) J_o(\lambda_n r_{eD})] e^{-\lambda_n^2 t_D} \quad \text{Ec. 3.29}$$

donde:

$$C_n = \frac{\int_1^{r_{eD}} [\ln r_D - \ln r_{eD}] [J_o(\lambda_n r_D) Y_o(\lambda_n r_{eD}) - Y_o(\lambda_n r_D) J_o(\lambda_n r_{eD})] r_D dr_D}{\int_1^{r_{eD}} [J_o(\lambda_n r_D) Y_o(\lambda_n r_{eD}) - Y_o(\lambda_n r_D) J_o(\lambda_n r_{eD})]^2 r_D dr_D}$$

y λ_n son las raíces de la ecuación

$$J_1(\lambda_n) Y_o(\lambda_n r_{eD}) - Y_1(\lambda_n) J_o(\lambda_n r_{eD}) = 0$$

Al pozo, la solución es

$$p_D(1, t_D) = \ln r_{eD} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t_D} J_o^2(\lambda_n r_{eD})}{\lambda_n^2 [J_1^2(\lambda_n) - J_o^2(\lambda_n r_{eD})]} \quad \text{Ec. 3.30}$$

Estas ecuaciones describen el comportamiento de la presión a cualquier radio y tiempo de flujo, incluyendo los períodos de flujo transitorio temprano, transitorio tardío y estado continuo.

En ecuaciones 3.29 y 3.30,

- Para periodos de tiempo pequeño, Flujo transitorio, el término Σ es importante.
- Para periodos de tiempos suficientemente grandes, Flujo Continuo, el término Σ es insignificante.

En el siguiente capítulo se abordará unas aproximaciones de estas soluciones exactas, para yacimientos cerrados y abiertos, de amplio uso en la práctica por sus precisiones, con márgenes de errores insignificantes en amplios rangos de aplicación.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 3.1- *Deducir las condiciones inicial y de fronteras para el yacimiento cilíndrico cerrado, en variables adimensionales, partiendo de ecs. 3.9, 3.10 y 3.11. De igual forma encontrar para un yacimiento cilíndrico abierto, partiendo de ecs 3.23, 3.24 y 3.25.*

Capítulo 3. REFERENCIAS

1. Matthews, C.S. and Russell, D.G.: *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*, Monograph Series, SPE, Richardson, Texas (1977). Capítulo 2 y Apéndice A.
2. Blasingame, T.A.: Notas del Curso Petroleum Engineering-P620. Development of the Diffusivity Equation for Liquid Flow. DOPE-Texas A&M University (1997).
3. Dake, L.P.: *Fundamentals of Reservoir Engineering*, Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (1978). Capítulo 5 y Capítulo 7.4
4. Craft, B.C. and Hawkins, M., Revised by Terry, Ronald E.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, second edition, Prentice Hall Inc. (1991).231
5. Escobar, Freddy H.: Análisis Moderno de Presiones de Pozos, Neiva, Huila, Noviembre 2003. 21-24.
6. Garaicochea,F y Bashbush,J. L.: Apuntes de Comportamiento de los Yacimientos. División de Ingeniería en Ciencias de la Tierra-Facultad de Ingeniería, UNAM (1985), 35
7. Peters, J. Ekwere: Notas del Curso Advanced Well Test Analysis With Emphasis in Horizontal and Directional Wells, Fict-Espol (2001). Capítulo 2.
8. Lee, J., Rollins, J.B., Spivey, J.P.: Pressure Transient Testing, SPE Textbook Series, Richardson, Texas (2003). 23
9. Dake, The practice of Reservoir Engineering (revised edition), Elsevier (2001). Chapter 4.
10. van Everdingen, A.F and Hurst, W.: “The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoir,” *Trans.*, AIME (1949) 186, 305-24.
11. Earlougher, R.C. Jr.: *Advances in Well Test Analysis*, Monograph Series, SPE, Richardson, Texas (1977). 5.

CAPÍTULO IV

SOLUCIONES PRÁCTICAS DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD

Para simplificar los cálculos con un mínimo sacrificio de precisión y exactitud, algunas soluciones alternativas a la ecuación de difusividad y formas limitadas de las soluciones exactas han sido desarrolladas^{1,2,3,4} y sus usos se han tornado habituales en los cálculos del ingeniero en petróleo, especialmente en el análisis e interpretación de los datos de pruebas de pozos para describir las propiedades dinámicas del sistema pozo-yacimiento. En este Capítulo se presentan las soluciones analíticas aproximadas básicas, a partir de las cuales se han desarrollado otras soluciones específicas, a través de estudios de condiciones más complejas de sistemas pozo-yacimiento. Luego de presentar las ecuaciones prácticas para un yacimiento con permeabilidad uniforme hasta el pozo mismo, se introduce el concepto del factor de “daño” o factor de piel (del inglés skin factor) que generalmente da cuenta de problemas de flujo que ocurren en las cercanías del pozo, para posteriormente incluirlo en las ecuaciones de flujo desarrolladas.

Como se puede apreciar en la figura 3.5 del Capítulo 3 de estos apuntes, el régimen de *flujo transitorio* toma lugar desde que ocurre un cambio en el caudal del pozo y perdura hasta que la perturbación ocasionada en el yacimiento por abrir el pozo a producción o por un cambio de tasa se difunda y alcance las fronteras del yacimiento. De ahí en adelante los efectos de frontera empiezan a tener también influencia en el comportamiento de la presión en el yacimiento y el flujo se vuelve *seudocontinuo* si el yacimiento es cerrado y, *continuo* si el yacimiento es abierto existiendo un empuje activo que no permite que la presión decaiga. Entonces, sea que estemos en presencia de un yacimiento cerrado o abierto, inicialmente tendremos flujo transitorio. Este será el régimen de flujo con el que empezaremos el análisis.

Para hallar una solución a la ecuación de flujo para tiempos a los cuales las fronteras del yacimiento no han “sentido” la perturbación de la presión ocasionada por la apertura del pozo a producción a una tasa constante q , asumiremos que el yacimiento se comporta como si fuera infinito. Cabe indicar que también ocurre flujo de estado transitorio cuando estando produciendo el pozo, la tasa es cambiada a otra de valor constante. Si la tasa de flujo del pozo no fuera constante, la solución que presentamos no será aplicable directamente; sin embargo, el problema aún tiene solución que más adelante

demostraremos mediante el principio de superposición (convolución) y, el de la deconvolución que se cubre en los estudios de prueba de pozos.

La asunción de un yacimiento infinito es solo para facilitar la solución matemática del problema. Para un yacimiento real, el flujo de estado transitorio ocurrirá desde el instante de un cambio de tasa o de abrir el pozo a producción hasta que la perturbación de presión alcance la frontera más próxima al pozo. Este sería un flujo de estado transitorio temprano. Desde este último instante hasta que la perturbación de presión alcance la frontera del yacimiento más alejada al pozo será un flujo de estado transitorio tardío. En yacimientos con pozos excéntricos es más amplio y notorio este régimen transitorio tardío. Mientras se tenga flujo radial transitorio, la presión a una distancia radial cualquiera decrecerá logarítmicamente con tiempo. También, la variación de la presión con tiempo cambiará de manera continua.

4.1. YACIMIENTO INFINITO:

4.1.1. SOLUCIÓN PARA EL PERÍODO DE FLUJO TRANSITORIO TEMPRANO (YACIMIENTO ∞).

Suponemos para esto que el radio del pozo es cero ($r_w = 0$). La solución que se obtiene a partir de esta suposición es conocida como solución de línea fuente (ver representación en figura 4.1).

Cuando el yacimiento se comporta como si fuera infinito, es decir, la perturbación no ha tocado aún las fronteras exteriores, decimos que tenemos el período de *flujo transitorio temprano*. A pesar que la palabra no existe en español, en el argot de la ingeniería en petróleo este flujo suele también ser llamado flujo “transiente” temprano (derivado del inglés “transient flow”). Por su amplio empleo coloquial en el sector, se usarán aquí ambos términos, transitorio y transiente, como sinónimos.

Para representar el modelo ideal de yacimiento, asumimos que^{2,5}:

1.- Inmediatamente que el pozo es puesto en producción, la formación produce a tasa constante, $q\beta$, a la frontera interna del sistema pozo-yacimiento. Inicialmente asumimos que no existen efectos de almacenamiento de pozo ni tampoco factor de daño o de piel. Los efectos de daño en las cercanías del pozo serán considerados más adelante en este

mismo capítulo; mientras que el fenómeno de almacenamiento de pozo será cubierto en el siguiente capítulo.

- 2.- El pozo tiene radio cero, $r_w = 0$ (línea fuente o sumidero). Este es un artificio matemático para facilitar la solución.
- 3.- El yacimiento se encuentra a una presión uniforme, p_i , antes de iniciar la producción.
- 4.- El pozo drena un área infinita, esto es $p \rightarrow p_i$ como $r \rightarrow \infty$.
- 5.- No se considera daño a la formación ni almacenamiento de pozo.

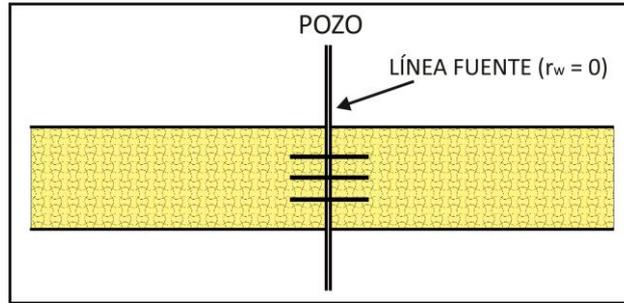


Fig. 4.1: Tratamiento del pozo como si no tuviera radio. Esquema de línea fuente. $r_w = 0$

Bajo estas condiciones, la solución aproximada de la ecuación de difusividad es ^{2,5,6}:

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} E_i \left(\frac{-r_D^2}{4t_D} \right) \quad \text{Ec. 4.1}$$

a cualquier radio y tiempo adimensionales, comprendidos entre los límites seleccionados de su precisión (ver Ec. 4.5A). $E_i(-x)$ es conocida como una función integral exponencial. A la ec. 4.1 también se la conoce como solución de Theis.

La solución aproximada al pozo, es decir a $r_D = 1$, es:

$$p_D(1, t_D) = -\frac{1}{2} E_i \left(\frac{-1}{4t_D} \right) \quad \text{Ec. 4.2}$$

En la Sección de Apéndices del libro se presenta el desarrollo de esta solución utilizando la transformada de Boltzmann.

Estas soluciones son de más fácil manejo que las soluciones exactas desarrolladas por van Everdingen y Hurst⁷ y presentadas por Mattheus y Russell² (radio del pozo finito, yacimiento cerrado).

En términos de la presión, radio y tiempo dimensionales las ecuaciones 4.1 y 4.2 se expresan de la siguiente manera⁸:

$$p(r, t) = p_i - 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[-\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{948\phi\mu c_i r^2}{kt} \right) \right] \quad \text{Ec. 4.3}$$

y,

$$p(r_w, t) = p_i - 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[-\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{948\phi\mu c_i r_w^2}{kt} \right) \right] \quad \text{Ec. 4.4}$$

En ambas ecuaciones, q es la tasa de producción al pozo, referida a condiciones estándares. En las soluciones exactas presentadas por van Everdingen y Hurst, la q es la tasa de flujo al radio, r , al cual se desea evaluar p ; y, por lo tanto, solo cuando se busca la solución al radio r_w , la tasa q es la tasa de producción al pozo.

El integral exponencial o función E_i es definida como⁹:

$$-E_i(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} \delta u \quad \text{Ec. 4.5}$$

Del análisis del comportamiento de las ecuaciones anteriores se tiene que la solución función E_i es una aproximación precisa a la solución exacta para tiempos⁸:

$$3.79 \times 10^5 \frac{\phi\mu c_i r_w^2}{k} < t < 948 \frac{\phi\mu c_i r_e^2}{k} \quad \text{Ec. 4.5A}$$

incluyendo los períodos de flujo transiente temprano y flujo transiente tardío, mostrados en la figura. 4.2.

Para tiempos menores a $3.79 \times 10^5 \frac{\phi\mu c_i r_w^2}{k}$, la asunción de $r_w = 0$ limita la precisión de la ecuación de línea fuente (o de sumidero para caso de inyección). Luego de transcurrido este tiempo desde que el pozo empezó a producir a tasa constante la tasa q a r_w llega a ser igual a la tasa q al radio $r = 0$ y, entonces la solución función E_i es aplicable con precisión. La figura 1.23 en el Capítulo 1, ilustra la variación de la tasa q con radio y tiempo y muestra además cuándo la tasa real al pozo llega a ser igual a la tasa al radio asumido de cero.

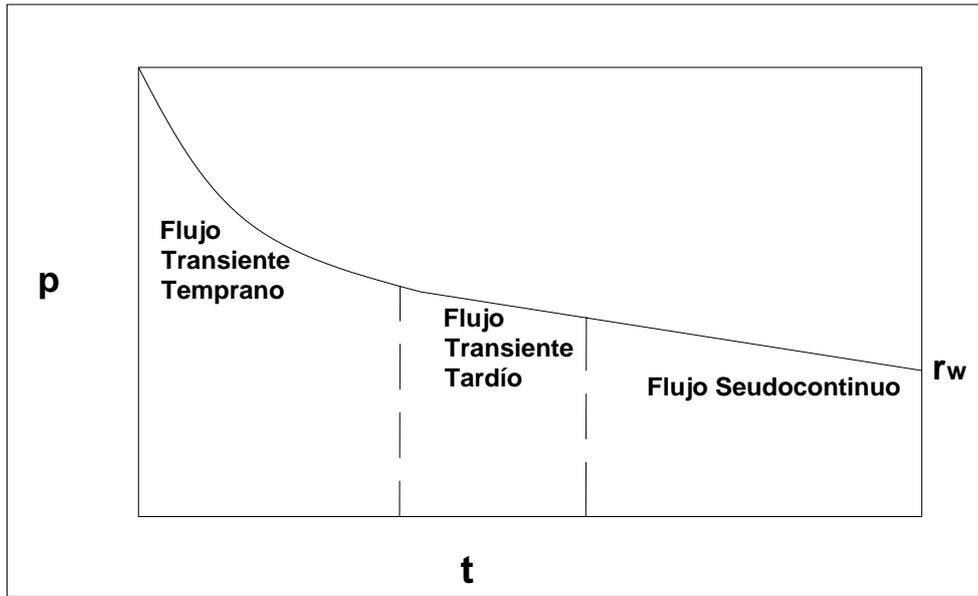


Fig. 4.2: Regímenes de flujo dados por comportamiento de presión vs tiempo.

A tiempos mayores que $948 \frac{\phi \mu C_i r_e^2}{k}$, las fronteras del yacimiento empiezan a afectar de otra manera la distribución de la presión del yacimiento. Así pues, el yacimiento ya no actuará como si fuera infinito. Más adelante, posterior a la presentación de la ecuación para el flujo de estado pseudocontinuo, demostraremos la conveniencia practica de estos límites (Sección 4.2.8).

Una simplificación adicional de la solución aproximada a la ecuación de flujo es posible.

Para $x < 0.01$, matemáticamente la función $E_i(-x)$ puede ser aproximada, con un error menor a 0.25%, por⁹:

$$E_i(-x) \approx \ln \gamma x = \ln x + \ln \gamma \quad \text{Ec. 4.6}$$

donde $\gamma = e^{0.5772} = 1.78108$, donde 0.5772 es la constante de Euler.

Entonces,

$$E_i(-x) = \ln (1.78108x) \quad \text{Ec. 4.6A}$$

$$E_i(-x) = \ln x + 0.5772 \quad \text{Ec. 4.6B}$$

Para evaluar la función E_i , se la puede también expresar como la serie infinita siguiente:

$$E_i(-x) = \ln \gamma x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-x)^n}{(n)(n!)} \quad \text{Ec. 4.7}$$

$$E_i(-x) = \ln \gamma x - \frac{x}{1 \times 1!} + \frac{x^2}{2 \times 2!} - \frac{x^3}{3 \times 3!} + \dots$$

donde γ es la constante de Euler la cual es igual a 1.78108. Para pequeños valores del argumento, x , la función E_i puede ser aproximada por la ecuación 4.6A, que representa sólo el primer término del lado derecho de la ecuación 4.7.

En muchas tablas matemáticas se puede encontrar valores para la función- E_i y a menudo, la literatura especializada en ingeniería de yacimientos de petróleo trae soluciones gráficas. **La Tabla 4.1**, que se adjunta en Apéndices, presentada por Lee en su libro: "Well Testing" (1982)³ puede ser usada para evaluar con precisión la función- E_i . Y, **la Tabla 4.3**, también en Apéndices, es usada para evaluar los factores de forma y los tiempos en los cuales las ecuaciones flujo transitorio y pseudocontinuo pueden usarse con error menor a 1%. (Más adelante se ilustra el uso de estas Tablas).

A continuación, en la Tabla 4.2 se ilustra el porcentaje de error al usar la aproximación logarítmica a la solución función- E_i , para varios valores del argumento E_i . Nótese que para $x \leq 0.01$, el error es $\leq 0.25\%$

Tabla 4.2 Aproximación logarítmica de la función E_i

ERRORES EN LA APROXIMACION LOGARITMICA DE LA FUNCION E_i			
X	$E_i (-x)$	$\ln x + 0.5772$	% Error
0.1	-1.823	-1.7254	5.35
0.02	-3.3547	-3.3348	0.6
0.01	-4.0379	-4.0279	0.25
0.001	-6.3315	-6.3306	0.015

4.1.2. USO DE LA APROXIMACIÓN LOGARÍTMICA DE E_i PARA YACIMIENTO INFINITO

Usando la aproximación de logaritmo natural de la función E_i , la solución adimensional viene a quedar:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{t_D}{r_D^2} \right) + 0.80907 \right], \text{ para } \frac{t_D}{r_D^2} \geq 25 \quad \text{Ec. 4.8}$$

y

$$p_D(1, t_D) = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.80907], \text{ para } t_D \geq 25 \quad \text{Ec. 4.9}$$

con un porcentaje de error $\leq 0.25\%$ ⁴

Con la introducción del log de base 10 en la ecuación 4.9, y la conversión de la función tiempo adimensional a variables dimensionales en *unidades de campo* se obtiene:

$$P_D(1, t_D) = \frac{2.3026}{2} \left[\log t + \log \left(\frac{k}{\phi \mu C_t r_w^2} \right) + \log 0.0002637 + \frac{0.80907}{2.3026} \right]$$

$$p_D(1, t_D) = 1.1513 \left[\log t + \log \left(\frac{k}{\phi \mu C_t r_w^2} \right) - 3.23 \right] \quad \text{Ec. 4.10}$$

Así, la presión de flujo a la cara de la arena, p_{wf} , para un yacimiento que actúa como si fuera infinito viene dada, en unidades de campo, por:

$$p(r_w, t) = p_i - \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \left[\log t + \log \left(\frac{k}{\phi \mu C_t r_w^2} \right) - 3.23 \right] \quad \text{Ec. 4.11}$$

La ecuación 4.11 provee la base teórica para el análisis de los datos del flujo transiente temprano en una prueba de declinación (drawdown) de presión⁸. Esta prueba consiste en hacer fluir el pozo a tasa constante y registrar las variaciones de presión contra tiempo de producción. Si el sistema pozo-yacimiento en prueba se ajusta al modelo de la ecuación 4.11, entonces se puede hallar parámetros importantes del yacimiento.

Esta ecuación muestra que un gráfico de $p(r_w, t)$ vs. $\log t$ será lineal con una pendiente negativa dada por¹⁰:

$$m = -\frac{162.6q\beta\mu}{kh} \quad \text{Ec. 4.12}$$

y una intercepción de presión, p_{int} , a $\log 1 \text{ hr} = 0$ dado por:

$$p_{int} = p_i + m \left[\log \left(\frac{k}{\phi \mu C_t r_w^2} \right) - 3.23 \right] \quad \text{Ec. 4.13}$$

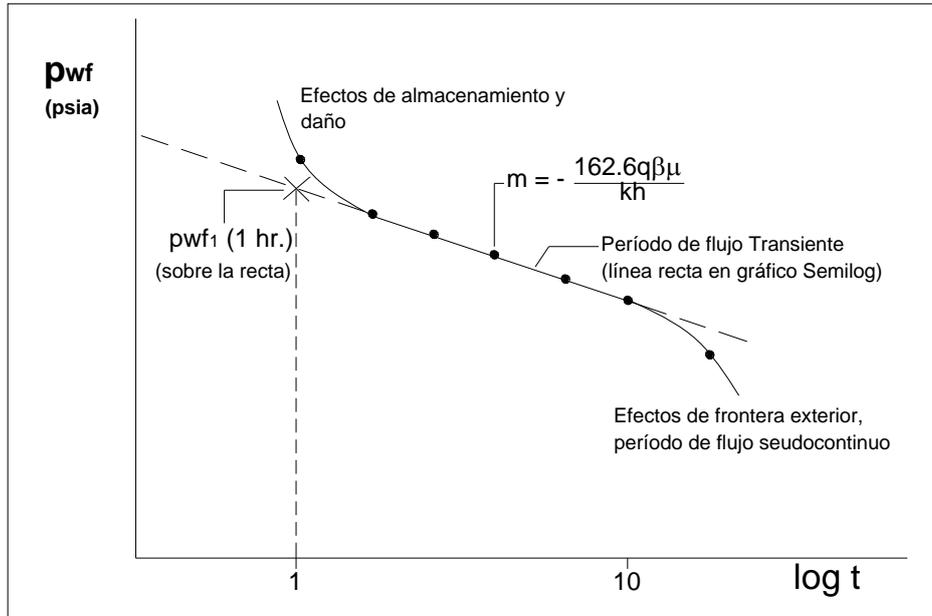
La permeabilidad de la formación puede ser calculada de la pendiente de la recta como:

$$k = -\frac{162.6q\beta\mu}{mh}, \text{ o } k = \frac{162.6q\beta\mu}{|m|h} \quad \text{Ec. 4.14}$$

Y la presión inicial del yacimiento puede ser calculada del intercepto de presión como:

$$p_i = p_{int} - m \left[\log \left(\frac{k}{\phi \mu C_t r_w^2} \right) - 3.23 \right] \quad \text{Ec. 4.15}$$

La Fig. 4.3 muestra la variación de P_{wf} con tiempo para el modelo de yacimiento/pozo asumido, durante el flujo transiente en papel semilog.



**Fig. 4.3: Gráfico semilog de prueba de flujo (drawdown).
Se muestra procedimiento para el valor de p_{wf} a 1 hora**

Problema 4.1

Se abre un pozo a producción con una tasa de 90 STB/día. Se posee la siguiente información:

Datos:

- Porosidad, ϕ = 21 %
- Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o = 1.25 rb/STB
- Espesor neto de formación, h = 75 pies
- Viscosidad del petróleo, μ = 5 cp
- Compresibilidad, C = $0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1}$
- Permeabilidad, k = 130 mD
- Radio de pozo, r_w = 0,49 pies
- Radio externo, r_e = 2625 pies
- Presión inicial del yacimiento, P_i = 1740psi
- Tasa de flujo del pozo, q_o = 90 STB/día
- Skin factor = 0

Determinar:

- a) Calcular la presión del fondo al pozo P_{wf} , después de 2h de producción.
- b) La presión del yacimiento después de 2h de producción a un radio de 30 ft, 60 ft, 90 ft, 120 ft, 150 ft, 180 ft, 210 ft , 240 ft, 270 ft, 300 ft medidos desde el centro del pozo.

- c) Calcular la presión del fondo al pozo P_{wf} , después de 5h de producción.
- d) La presión del yacimiento después de 5h de producción a un radio de 0 ft, 60 ft, 90 ft, 120 ft, 150 ft, 180 ft, 210 ft , 240 ft, 270 ft, 300 ft medidos desde el centro del pozo.
- e) Elaborar una gráfica P a 2 horas y P a 5 horas vs r medido desde el centro del pozo.

Solución:

Para emplear la solución de línea fuente se debe verificar que se cumplen las siguientes condiciones de tiempo.

- i. ¿El pozo ha producido durante un tiempo adecuado para que la solución de línea fuente sea correcta?

$$t > 3.79 \times 10^5 \frac{\phi \mu C_t r_w^2}{k} \quad \text{Ec. 4.5A}$$

- ii. ¿El yacimiento actúa como infinito, es decir la perturbación debido a la variación de presión no ha tocado las fronteras (flujo transitorio)?

$$t < 948 \frac{\phi \mu C_t r_e^2}{k} \quad \text{Ec. 4.5A}$$

Evaluando la condición “i”:

$$t > 3.79 \times 10^5 \frac{\phi \mu C_t r_w^2}{k} = 3.79 \times 10^5 \frac{(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(0.49 \text{ ft})^2}{130 \text{ md}}$$

$$t > 1.11 \times 10^{-3} \text{ h}$$

Evaluando la condición “ii”:

$$t < 948 \frac{\phi \mu C_t r_e^2}{k} = 948 \frac{(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(2625 \text{ ft})^2}{130 \text{ md}}$$

$$t < 7914 \text{ h}$$

Verificando para las condiciones planteadas observamos que el tiempo de producción sí se encuentra dentro del intervalo, esto es: $1.11 \times 10^{-3} \text{ h} < 2 \text{ h} < 7914 \text{ h}$, es decir que 2 horas es mayor que el límite inferior de la aplicación de la ecuación de línea fuente y menor que el límite superior de la aplicación de la ecuación de línea fuente; por lo tanto, el flujo es transitorio y se puede emplear la solución de línea de fuente.

La solución de línea de fuente es:

$$P = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} Ei\left(-948 \frac{\phi\mu C_t r^2}{kt}\right) \quad \text{Ec. 4.3}$$

Nota: Si $x < 0.01$, matemáticamente la función $Ei(-x)$ puede ser aproximada por $Ei(-x) = \ln(\gamma x)$, con un error menor a 0.25%, donde γ es la constante de Euler $\gamma = 1.78108$. Evaluamos si esto se cumple:

$$x = 948 \frac{\phi\mu C_t r_w^2}{kt} = 948 \frac{(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(0.49 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})} = 0.00013$$

El valor calculado de x es menor que 0.01 por lo tanto, se puede emplear la aproximación logarítmica, para $r = r_w = 0.49$ pies, para 2 horas de producción.

Aplicando la aproximación logarítmica, la solución de la línea de fuente queda así:

$$P = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} \ln\left(\frac{948 \gamma \phi \mu c_t r^2}{kt}\right)$$

Reemplazando $\gamma = 1.78108$ y $r=r_w$, la presión al pozo es:

$$P_{wf} = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} \ln\left(\frac{1688 \phi \mu c_t r_w^2}{kt}\right)$$

a) P_{wf} luego de 2 horas de producción:

$$P_{wf} = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} \ln\left(\frac{1688(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(0.49 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})}\right)$$

$$P_{wf} = 1706.14 \text{ psi}$$

b) Presiones a varios radios después a 2 horas de producción:

➤ Presión del yacimiento a un radio de 30 pies medidos desde el centro del pozo, luego de 2 horas de producción.

- Verificar si $Ei(-x)$ se puede aproximar a $\ln(\gamma x)$; $Ei(-x) \approx \ln(\gamma x)$ si $x < 0.01$

$$x = 948 \frac{\phi\mu C_t r^2}{kt} = 948 \frac{(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(30 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})} = 0.5168$$

El valor calculado de x no es menor que 0.01 y por lo tanto no se puede emplear la aproximación logarítmica. Entonces,

$$P = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} Ei \left(-948 \frac{\phi\mu C_i r^2}{kt} \right) \quad \text{Ec 4.3}$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} Ei \left(\frac{-948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(30 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073 Ei(-0.5168)$$

Empleando la Tabla 4.1 en Apéndice obtenemos que:

$$Ei(-0.5168) \rightarrow 0.5389$$

Entonces reemplazando en ecuación 4.3

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073(-0.5389)$$

$$P = 1737.8 \text{ psi}$$

➤ Presión del yacimiento a un radio de 60 pies medidos desde el centro del pozo, luego de 2 horas de producción.

- Verificar si $Ei(-x)$ se puede aproximar a $\ln(\gamma x)$; $Ei(-x) \approx \ln(\gamma x)$ si $x < 0.01$

$$x = 948 \frac{\phi\mu C_i r^2}{kt} = \frac{948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(60 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})} = 2.0673$$

El valor calculado de x no es menor que 0.01 y por lo tanto no se puede emplear la aproximación logarítmica. Entonces,

$$P = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} Ei \left(-948 \frac{\phi\mu C_i r^2}{kt} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} Ei \left(\frac{-948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(60 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073 Ei(-2.0673)$$

Empleando la Tabla 4.1 en Apéndice obtenemos que:

$$Ei(-2.0673) \rightarrow 0.0446557$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073(-0.0446557)$$

$$P = 1739.81 \text{ psi}$$

➤ Presión del yacimiento a un radio de 90 pies medidos desde el centro del pozo, luego de 2 horas de producción.

- Verificar si $Ei(-x)$ se puede aproximar a $\ln(\gamma x)$; $Ei(-x) \approx \ln(\gamma x)$ si

$$x < 0.01$$

$$x = 948 \frac{\phi \mu C_i r^2}{kt} = \frac{948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(90 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})} = 4.6515$$

El valor calculado de x no es menor que 0.01 y por lo tanto no se puede emplear la aproximación. Entonces,

$$P = P_i + 70.6 \frac{q \beta \mu}{kh} Ei \left(-948 \frac{\phi \mu C_i r^2}{kt} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} Ei \left(\frac{-948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(90 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(2 \text{ h})} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073 Ei(-4.6515)$$

Empleando la Tabla 4.1 en Apéndice obtenemos que:

$$Ei(-4.6515) \rightarrow 0.0017368$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073(-0.0017368)$$

$$P = 1739.99 \text{ psi}$$

Del mismo modo se calcula la presión P a los diferentes radios luego de 2 horas de producción. Nótese que para radios cada vez mayores la aproximación logarítmica no resulta aplicable. A continuación, se muestra la siguiente Tabla elaborada en Excel.

Tabla 4.4: Presiones en el yacimiento después de 2h de producción a diferentes radios medidos desde el centro del pozo.

r	X	Ei(-x)	P a 2h
30	0,51684231	-0,539789231	1737,801397
60	2,06736923	-0,044655738	1739,818114
90	4,65158077	-0,001736838	1739,992926
120	8,26947692	-2,797674E-05	1739,999886
150	12,9210577	0	1740
180	18,6063231	0	1740
210	25,3252731	0	1740
240	33,0779077	0	1740
270	41,8642269	0	1740
300	51,6842308	0	1740

Se puede observar de Tabla 4.4 que la perturbación o transiente que viaja dentro del yacimiento debido a la variación de la presión al pozo al abrirlo a producción, aún no “toca” la frontera luego de 2 horas de producción. Se observa que la perturbación ha llegado a 120 pies aproximadamente. Para radios mayores a este valor el fluido dentro del yacimiento no se mueve aun luego de 2 horas de producción; la presión es 1740 psia para $r > 120$ y no hay caída de presión.

c) Para el cálculo de p_{wf} luego de 5 horas de producción procederemos del siguiente modo. Verificamos en primer lugar si la solución de línea fuente, ecuación 4.3, es aplicable a 5 horas.

Empleando la información que generamos en a) con respecto a los límites, tenemos que

$$1.11 \times 10^{-3} h < 5h < 7914h$$

Es decir, 5 horas de producción es mayor que el límite inferior y menor que el límite superior.

El flujo es transitorio y esto nos permite concluir que sí es aplicable ecuación 4.3. Y, entonces,

$$P_{wf} = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} Ei \left(-948 \frac{\phi\mu C_i r_w^2}{kt} \right) \quad \text{Ec. 4.3}$$

✓ $Ei(-x)$, se puede aproximar a $\ln(\gamma x)$ si $x < 0.01$

Evaluando,

$$x = 948 \frac{\phi\mu C_i r_w^2}{kt} = 948 \frac{(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(0.49 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5h)} = 0.000055$$

Este valor calculado de x es menor que 0.01 y por lo tanto se puede emplear la aproximación logarítmica de Ei , de manera que la ecuación de línea de fuente nos queda así:

$$P = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} \ln \left(\frac{948 \gamma \phi \mu C_i r^2}{kt} \right)$$

$$P_{wf} = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} \ln \left(\frac{1688 \phi \mu C_i r_w^2}{kt} \right)$$

Calculamos P_{wf} luego de 5 horas de producción:

$$P_{wf} = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} \ln \left(\frac{1688(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(0.49 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5 \text{ h})} \right)$$

$$P_{wf} = 1738.27 \text{ psi}$$

d) Presiones a varios radios después a 5 horas de producción:

- Presión del yacimiento a un radio de 30 pies medidos desde el centro del pozo, luego de 5 horas de producción.

- Verificar si $Ei(-x)$ se puede aproximar a $\ln(\gamma x)$; $Ei(-x) \approx \ln(\gamma x)$ si $x < 0.01$

$$x = 948 \frac{\phi \mu C_i r^2}{kt} = \frac{948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(30 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5 \text{ h})} = 0.206737$$

El valor calculado de x no es menor que 0.01 y por lo tanto no se puede emplear la aproximación. Entonces,

$$P = P_i + 70.6 \frac{q \beta \mu}{kh} Ei \left(-948 \frac{\phi \mu C_i r^2}{kt} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} Ei \left(\frac{-948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(30 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5 \text{ h})} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073 Ei(-0.206736)$$

Empleando la Tabla 4.1 en Apéndice obtenemos que:

$$Ei(-0.206736) \rightarrow 1.195789$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073(-1.195789)$$

$$P = 1735.12 \text{ psi}$$

- Presión del yacimiento a un radio de 60 pies medidos desde el centro del pozo, luego de 5 horas de producción.

- Verificar si $Ei(-x)$ se puede aproximar a $\ln(\gamma x)$; $Ei(-x) \approx \ln(\gamma x)$ si $x < 0.01$

$$x = 948 \frac{\phi \mu C_i r^2}{kt} = \frac{948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(60 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5 \text{ h})} = 0.826947$$

El valor calculado de x no es menor que 0.01 y por lo tanto no se puede emplear la aproximación.

$$P = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} Ei \left(-948 \frac{\phi\mu C_i r^2}{kt} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} Ei \left(\frac{-948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(60 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5 \text{ h})} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073 Ei(-0.826948)$$

Empleando la Tabla 4.1 en Apéndice obtenemos que:

$$Ei(-0.826948) \rightarrow 0.296526$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073(-0.296526)$$

$$P = 1738.79 \text{ psi}$$

- Presión del yacimiento a un radio de 90 pies medidos desde el centro del pozo, luego de 5 horas de producción.

- Verificar si $Ei(-x)$ se puede aproximar a $\ln(\gamma x)$; $Ei(-x) \approx \ln(\gamma x)$ si $x < 0.01$

$$x = 948 \frac{\phi\mu C_i r^2}{kt} = \frac{948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(90 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5 \text{ h})} = 1.860632$$

El valor calculado de x no es menor que 0.01 y por lo tanto no se puede emplear la aproximación logarítmica. Entonces,

$$P = P_i + 70.6 \frac{q\beta\mu}{kh} Ei \left(-948 \frac{\phi\mu C_i r^2}{kt} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 70.6 \frac{(90 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(5 \text{ cp})}{(130 \text{ md})(75 \text{ ft})} Ei \left(\frac{-948(0.21)(5 \text{ cp})(0.15 \times 10^{-3} \text{ psi}^{-1})(90 \text{ ft})^2}{(130 \text{ md})(5 \text{ h})} \right)$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073 Ei(-1.860632)$$

Empleando la Tabla 4.1 en Apéndice obtenemos que:

$$Ei(-1.860632) \rightarrow 0.0594430$$

$$P = 1740 \text{ psi} + 4.073(-0.0594430)$$

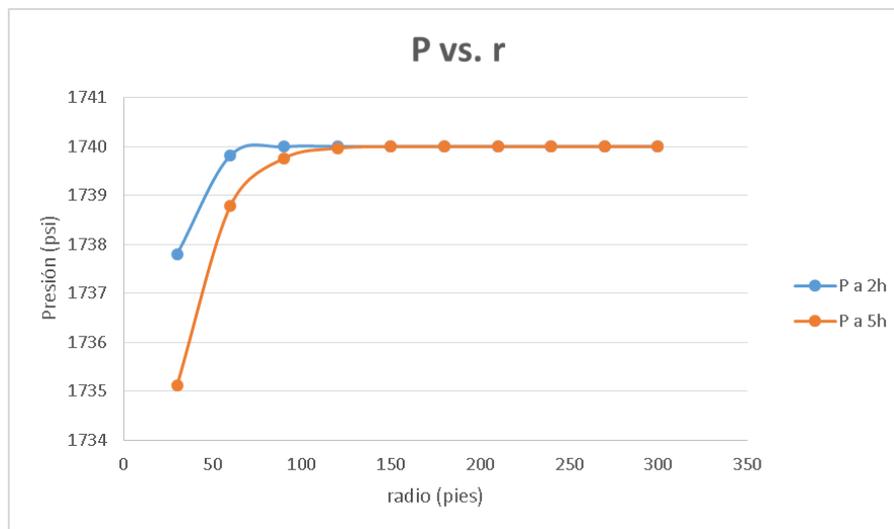
$$P = 1739.75 \text{ psi}$$

Del mismo modo se calcula la presión P en los otros radios luego de 5 horas de producción. A continuación, se muestra la siguiente tabla elaborada en Excel.

Tabla 4.5: Presiones en el yacimiento después de 5h de producción a diferentes radios medidos desde el centro del pozo.

r	X	Ei(-x)	P a 5h
30	0,206736923	-1,195789231	1735,129458
60	0,826947692	-0,296526154	1738,792226
90	1,860632308	-0,059443092	1739,757884
120	3,307790769	-0,008858197	1739,96392
150	5,168423077	-0,000943366	1739,996158
180	7,442529231	-7,03678E-05	1739,999713
210	10,13010923	-3,5102E-06	1739,999986
240	13,23116308	0	1740
270	16,74569077	0	1740
300	20,67369231	0	1740

e) Graficando los datos de las Tablas 4.4 y 4.5 se tiene:



4.1.3. FUNCIÓN DE LA DERIVADA DE PRESIÓN

La función derivada de presión es una herramienta de diagnóstico poderosa en el análisis de prueba de pozos. Si el pozo está fluyendo, la función derivada de presión es definida como^{11,12}:

$$\text{Función derivada } \frac{dp_D}{d \ln t_D} = t_D \frac{dp_D}{dt_D} \quad \text{Ec. 4.16}$$

Aplicando esta definición al comportamiento de la presión durante el período de flujo transiente temprano para el modelo ideal, que viene dado por ecuación 4.9, la función derivada será igual a:

$$\text{Función derivada } \frac{dp_D}{d \ln t_D} = t_D \frac{dp_D}{dt_D} = \frac{1}{2} \quad \text{Ec. 4.17}$$

La ecuación 4.17 muestra que para el flujo transiente temprano (yacimientos actuando como infinito), la función derivada de presión adimensional es constante e igual a $\frac{1}{2}$. Debe resaltarse que el valor constante de la función derivada corresponde al modelo semilog representado por la ecuación 4.9.

La función derivada de presión también puede ser calculada para variables dimensionales y datos en unidades de campo. Diferenciando la ecuación 4.11 se obtiene la función derivada de presión en unidades de campo como:

$$\text{Función derivada } \frac{d(\Delta p)}{d \ln t} = t \frac{d(\Delta p)}{dt} = \frac{70.6q\beta\mu}{kh} = \text{constante} \quad \text{Ec. 4.18}$$

La ecuación anterior demuestra que la función derivada de presión para datos en unidades de campo es, como era de esperarse, también una constante durante el período de flujo transiente. Así, la constancia de la función derivada de presión sería un diagnóstico de la presencia del flujo transiente temprano y, en consecuencia, de la pertinencia de la solución semilog función integral exponencial de la ecuación de difusividad, en ese período.

4.1.4. DURACIÓN DE LA ACTUACIÓN DEL YACIMIENTO COMO INFINITO O DEL PERÍODO DE FLUJO TRANSIENTE TEMPRANO.

Para un pozo localizado *al centro* de un área de drenaje circular, la duración del período de flujo *transiente temprano* (yacimiento actuando como si fuera infinito) ha sido presentada por E. J. Peters en el curso: “Advanced Well Test Analysis with Emphasis in Horizontal and Directional Well” (2001)⁴, y es dada aproximadamente por:

$$t_{DE} = \frac{0.0002637kt}{\phi\mu C_t r_e^2} = 0.1, \quad \text{Ec. 4.19}$$

donde t_{DE} es un tiempo adimensional definido con respecto al radio externo de drenaje del yacimiento. La ecuación 4.19 puede escribirse también como:

$$t_{DA} = \frac{0.0002637kt}{\phi\mu C_t A} = \frac{0.1}{\pi} \quad \text{Ec. 4.20}$$

donde t_{DA} es un tiempo adimensional definido con respecto al área de drenaje del yacimiento. La duración del período de flujo transiente temprano puede ser obtenida de las ecuaciones 4.19 y 4.20 como:

$$t = \frac{379\phi\mu C_t r_e^2}{k} \quad \text{Ec. 4.21}$$

o

$$t = \frac{121\phi\mu C_t A}{k}, \quad \text{Ec. 4.22}$$

es decir, la duración del flujo transiente temprano es aproximadamente igual a 1/3 de la duración de todo el período transiente $\left(t \approx \frac{948\phi\mu C_t r_e^2}{k} \right)$ definido anteriormente.

Recuérdese que el transiente se divide en transiente temprano y transiente tardío.

La ecuación 4.22 demuestra que la duración del transiente temprano (yacimiento que actúa como si fuese infinito) es directamente proporcional al área de drenaje e inversamente proporcional a la permeabilidad de la formación.

Así, el período de flujo transiente temprano será bien largo para un yacimiento grande con una baja permeabilidad.

4.1.5. SOLUCIÓN PARA EL TRANSIENTE TARDÍO

En la solución exacta de van Everdingen y Hurst presentada en el Capítulo 3 (ecuación 3.21), los valores eigenes, α_n , son números positivos que aumentan con el incremento de n . Entonces, $e^{-\alpha_n^2 t_D}$ y los cocientes que resultan al desarrollar la sumatoria infinita son cada vez más pequeños tendiendo a cero como n tiende a infinito. Definimos la solución del *transiente tardío* como la solución para la cual todos los términos de la sumatoria son insignificamente pequeños comparados con los otros fuera de la sumatoria, excepto el primero. Así, para el período de flujo transiente tardío y para $r_{eD} \gg 1$, la solución viene dada por:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \frac{1}{2} \frac{r_D^2}{r_{eD}^2} - \ln \frac{r_D}{r_{eD}} - \frac{3}{4} + \pi \frac{e^{-\alpha_1^2 t_D} J_1^2(\alpha_1 r_{eD}) [J_1(\alpha_1) Y_0(\alpha_1 r_D) - Y_1(\alpha_1) J_0(\alpha_1 r_D)]}{\alpha_1 [J_1^2(\alpha_1 r_{eD}) - J_1^2(\alpha_1)]}$$

.... Ec. 4. 23

La solución al pozo viene a ser⁴:

$$p_D(1, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} + 2 \frac{e^{-\alpha_1^2 t_D} J_1^2(\alpha_1 r_{eD})}{\alpha_1^2 [J_1^2(\alpha_1 r_{eD}) - J_1^2(\alpha_1)]}$$

Ec. 4.24

Adicionalmente, para $r_{eD} \gg 100$, puede demostrarse que:

$$2 \frac{J_1^2(\alpha_1 r_{eD})}{\alpha_1^2 [J_1^2(\alpha_1 r_{eD}) - J_1^2(\alpha_1)]} = -0.84$$

Ec. 4.25

y

$$\alpha_1^2 = \frac{14.6819}{r_{eD}^2}$$

Ec. 4.26

Sustituyendo las ecuaciones 4.25 y 4.26 en la ecuación 4.24 se obtiene la solución al pozo del flujo transiente tardío como⁴:

$$p_D(1, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} - 0.84 e^{-\frac{14.6819 t_D}{r_{eD}^2}}$$

Ec. 4.27

La presión de flujo al pozo en variables dimensionales viene dada por:

$$p_{wf} = p_i - \frac{141.2q\beta\mu}{kh} \left[\frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} - 0.84e^{-\frac{14.6819t_D}{r_{eD}^2}} \right] \quad \text{Ec. 4.28}$$

para tiempos dentro de los límites,

$$379 \frac{\phi\mu C_i r_e^2}{k} < t < 1190 \frac{\phi\mu C_i r_e^2}{k} \quad \text{Ec. 4.29}$$

o

$$121 \frac{\phi\mu C_i A}{k} < t < 379 \frac{\phi\mu C_i A}{k} \quad \text{Ec. 4.30}$$

4.2. YACIMIENTO FINITO (CERRADO)

4.2.1. SOLUCIÓN PARA EL ESTADO SEUDOCONTINUO

Esta es la otra solución aproximada de la ecuación de difusividad radial que es muy útil en la interpretación de los datos de prueba de pozos. La solución de estado seudo continuo es simplemente una forma limitada de la ecuación de van Everdingen y Hurst, la cual describe el comportamiento de la presión con tiempo y distancia para un pozo centrado en un yacimiento cilíndrico de radio r_e , una vez que el transiente o perturbación de la presión es sentido en todas las fronteras del yacimiento cerrado. La forma limitada de interés es válida para tiempos grandes, cuando la sumatoria que incluye funciones exponenciales y de Bessel, llega a ser insignificante.

Así, durante el período de estado seudo continuo y asumiendo que $r_{eD} \gg 1$, se tiene^{2,4}:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \frac{1}{2} \frac{r_D^2}{r_{eD}^2} - \ln \frac{r_D}{r_{eD}} - \frac{3}{4} \quad \text{Ec. 4.31}$$

Al pozo,

$$p_D(1, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \quad \text{Ec. 4.32}$$

Recordando la definición de $t_{DA} = t_D \frac{r_w^2}{A}$, la ecuación 4.32 también puede ser expresada

en las formas alternativas siguientes:

$$p_D(1, t_D) = 2\pi t_{DA} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \quad \text{Ec. 4.33}$$

Esta ecuación 4.33 es válida para pozo centrado en un área de drenaje circular. Para cualquiera que sea la forma geométrica del contorno exterior del área de drenaje se tiene,

$$\ln r_{eD} - \frac{3}{4} = \ln \left(\frac{r_{eD}}{e^{\frac{3}{4}}} \right)$$

$$\ln r_{eD} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\pi r_e^2}{4\pi r_w^2 e^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$\ln r_{eD} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{\gamma(31.62)} \right)$$

donde A= área de drenaje del pozo. Haciendo $C_A=31.62$,

$$\ln r_{eD} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{\gamma C_A} \right)$$

y

$$p_D(1, t_D) = 2\pi_{DA} + \frac{1}{2} \ln \frac{A}{r_w^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) \quad \text{Ec. 4.34}$$

donde:

$\gamma = 1.78108$ y C_A es un factor de forma característico de la forma del área de drenaje y localización del pozo en ella¹³. Para un pozo al centro de un área de drenaje de forma circular como hemos venido asumiendo, $C_A=31.62$.

Los factores de forma de una variedad de formas de drenaje y localizaciones del pozo dentro de ellas se presentan en la Tabla 1.2 del libro *Well Testing* del Dr. Lee o Tabla 3.6 de las notas del Dr. Ekwere. Para propósitos de completar estos apuntes, también se presentan aquí en la **Tabla 4.3**, de la Sección de Apéndices.

4.2.2. DEFINICIÓN DE $(p_i - \bar{p})$ Y $\bar{p}_D(r_{eD}, t_D)$

Haciendo un balance de materiales en un yacimiento cerrado a un tiempo tal que se ha producido $(q\beta)t$ unidades volumétricas de petróleo y considerando que al ocurrir esto la presión en el yacimiento ha declinado de p_i a \bar{p} , se tiene que la expansión del volumen de petróleo (que es el petróleo producido, ΔV) que ha tenido lugar en el yacimiento al reducirse la presión es igual a:

$$\Delta V = c_i V (p_i - \bar{p})$$

$$p_i - \bar{p} = \frac{\Delta V}{c_i V}$$

Reemplazando ΔV por $(q\beta)t$ expresado en pies cúbicos por hora (recordar que en unidades de campo t esta en horas) y sustituyendo V por el volumen de drenaje expresado en pies cúbicos,

$$p_i - \bar{p} = \frac{5.615(q\beta)t}{24c_i(\pi r_e^2 h\phi)}$$

$$p_i - \bar{p} = \frac{0.234(q\beta)t}{c_i \pi r_e^2 h\phi} \quad \text{Ec. 4.35}$$

donde: \bar{p} es la presión promedio del yacimiento luego de haberse producido $0.234(q\beta)t$ pie³ de petróleo⁸.

Por definición de variable adimensional se tiene que,

$$\bar{p}_D(r_{eD}, t_D) = \frac{kh}{141.2q\beta\mu} (p_i - \bar{p}) \quad \text{Ec. 4.36}$$

Sustituyendo la ecuación $(p_i - \bar{p})$ en la definición de \bar{p}_D

$$\bar{p}_D(r_{eD}, t_D) = \frac{kh}{141.2q\beta\mu} \left[\frac{0.234(q\beta)t}{h\phi c_i \pi r_e^2} \right] \quad \text{Ec. 4.36A}$$

$$\bar{p}_D(r_{eD}, t_D) = \frac{0.0005275 kt}{\phi \mu c_i r_e^2}$$

Ampliando el lado derecho,

$$\frac{0.0005275 kt}{\phi \mu c_i r_e^2} = 2 \left[0.0002637 \frac{kt}{\phi \mu c_i r_w^2} \left(\frac{r_w^2}{r_e^2} \right) \right] = \frac{2t_D}{r_{eD}^2}$$

O también

$$\frac{0.0005275 kt}{\phi \mu c_i r_e^2} = 2\pi \left[0.0002637 \frac{kt}{\phi \mu c_i \pi r_e^2} \right] = 2\pi t_{DA}$$

Entonces,

$$\bar{p}_D(t_{DA}) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} = 2\pi t_{DA} \quad \text{Ec. 4.37}$$

4.2.3. OTRAS RELACIONES DE LA ECUACIÓN DE FLUJO DE ESTADO SEUDOCONTINUO

La solución para estado pseudocontinuo viene dada por la ecuación 4.31. Derivando p_D con respecto a t_D tenemos,

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{2}{r_{eD}^2} = \text{constante} \quad \text{para} \quad 1 \leq r_D \leq r_{eD} \quad \text{Ec. 4.38}$$

la cual indica que como característica del flujo pseudocontinuo, la presión declina con tiempo al mismo ritmo o tasa, cualquier que sea la región de drenaje o radio desde el pozo.

También, usando la ecuación 4.37, la ecuación 4.33 puede escribirse

$$p_D(1, t_D) = \bar{p}_D(r_{eD}, t_D) + \ln r_{eD} - \frac{3}{4}$$

$$p_D(1, t_D) - \bar{p}_D(r_{eD}, t_D) = \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \quad \text{Ec. 4.39}$$

$$p_D(1, t_D) - \bar{p}_D(r_{eD}, t_D) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) = \text{constante} \quad \text{Ec. 4.39A}$$

Esta ecuación 4.39A demuestra que la caída de presión con respecto a la presión promedio del yacimiento también es constante. Por la característica de proporcionalidad que tiene p_D con respecto a la diferencia de presión, se tiene

$$(p_i - p_{wf}) - (p_i - \bar{p}) = \bar{p} - p_{wf} = \text{constante} \quad \text{Ec. 4.40}$$

También de la ecuación 4.31 y 4.32:

$$p_D(r_{eD}, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} - \frac{1}{4} = \frac{kh}{141.2q\beta\mu} (p_i - p_e) \quad \text{Ec. 4.41}$$

$$p_D(1, t_D) - p_D(r_{eD}, t_D) = \ln r_{eD} - \frac{1}{2} = \text{constante} = \frac{kh}{141.2q\beta\mu} (p_e - p_{wf}) \quad \text{Ec. 4.42}$$

que demuestra también que la caída de presión con respecto a la presión al contorno exterior, p_e , es una constante durante el flujo de estado pseudocontinuo, como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned}
 & p_D(1, t_D) \alpha (p_i - p_{wf}) \\
 & p_D(r_{eD}, t_D) \alpha (p_i - p_e) \\
 (p_i - p_{wf}) - (p_i - p_e) &= p_e - p_{wf} = \text{constante} \quad \text{Ec. 4.43}
 \end{aligned}$$

4.2.4. FUNCION DE LA DERIVADA DE PRESION

Finalmente, la *función derivada*⁴ de presión al pozo para el flujo de estado pseudocontinuo puede obtenerse de la ecuación 4.32 como:

$$p_D' = \frac{\partial p_D}{\partial \ln t_D} = t_D \frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} \quad \text{Ec. 4.44}$$

La ecuación 4.44 expresa que durante el tiempo que ocurre flujo de estado pseudocontinuo, la función derivada de presión incrementa linealmente con el tiempo.

Adicionalmente,

$$\log p_D' = \log t_D + \log \left(\frac{2}{r_{eD}^2} \right) \quad \text{Ec. 4.45}$$

muestra que durante el flujo pseudocontinuo, un gráfico de $\log p_D'$ versus $\log t_D$ tendrá una pendiente unitaria. Tal gráfico puede ser usado para el diagnóstico de la presencia de los efectos de frontera en los datos de presión obtenidos de una prueba de pozo.

4.2.5. RESUMEN

Recapitulando, las ecuaciones que describen al flujo de estado pseudocontinuo pueden ser escritas en términos de variables reales y unidades de campo, como se detalla a continuación.

Aplicando la definición de presión adimensional p_D (ecuación 3.16) se tiene,

De la ecuación 4.31

$$p(r, t) = p_i - \frac{141.2q\beta\mu}{kh} \left[\frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \frac{1}{2} \frac{r_D^2}{r_{eD}^2} - \ln \left(\frac{r_D}{r_{eD}} \right) - \frac{3}{4} \right] \quad \text{Ec. 4.46}$$

De las ecuaciones 4.32, 4.34, 4.36A y 4.37

$$p_{wf} = p_i - \frac{141.2q\beta\mu}{kh} \left[\frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \right] \quad \text{Ec. 4.47}$$

$$p_i - p_{wf} = \frac{0.2339(q\beta)}{c_i(\pi r_e^2 h \phi)} t - \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \left[\log \frac{A}{r_w^2} + \log \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) \right]$$

$$p_{wf} = p_i - \frac{0.2339(q\beta)}{c_t(Ah\phi)} t - \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \left[\log \frac{4A}{1.781C_A r_w^2} \right] \quad \text{Ec. 4.48}$$

De la ecuación 4.39 y 4.40

$$\bar{p} - p_{wf} = 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{3}{4} \right] \quad \text{Ec. 4.49}$$

$$q = \frac{kh}{141.2\beta\mu} \frac{(\bar{p} - p_{wf})}{\left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{3}{4} \right]} \quad \text{Ec. 4.50}$$

De la ecuación 4.42 y 4.43

$$p_e - p_{wf} = 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} \right] \quad \text{Ec. 4.51}$$

$$q = \frac{kh}{141.2\beta\mu} \frac{(p_e - p_{wf})}{\left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} \right]} \quad \text{Ec. 4.52}$$

De la ecuación 4.48

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{0.234q\beta}{Ah\phi c_t} = \text{constante} , \quad r_w \leq r \leq r_e \quad \text{Ec. 4.53}$$

$$(\Delta p)' = \frac{\partial(\Delta p)}{\partial \ln t} = t \frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} = \frac{0.234q\beta}{Ah\phi c_t} t \quad \text{Ec. 4.54}$$

$$\log(\Delta p)' = \log t + \log \left(\frac{0.234(q\beta)}{Ah\phi c_t} \right) \quad \text{Ec. 4.55}$$

La ecuación 4.46 es útil para el cálculo del perfil de la presión durante el período del estado pseudocontinuo en la región de drenaje de un yacimiento circular.

Las ecuaciones 4.48 y 4.53 son útiles para el análisis de los datos de la presión de estado pseudocontinuo obtenidos al pozo. La ecuación 4.48 muestra que durante el flujo de estado pseudocontinuo la presión de flujo al pozo es una función lineal del tiempo de flujo. La ecuación 4.53 muestra que durante el flujo de estado pseudocontinuo la presión declina a una tasa o ritmo constante en cualquier parte del área de drenaje.

La ecuación 4.54 expresa que la función derivada de presión $\frac{\partial(\Delta p)}{\partial \ln t} = t \frac{\partial(\Delta p)}{\partial t}$

incrementa con tiempo durante el flujo pseudocontinuo.

La ecuación 4.55 indica que un gráfico log-log de la función derivada de presión tendrá una pendiente unitaria positiva.

Las ecuaciones 4.49 y 4.51 son relaciones utilizadas para obtener el comportamiento de afluencia-IPR (del inglés Inflow Performance Relationship) y el Índice de Productividad ideal del pozo-J, que se presenta en la siguiente sección 4.2.6. La ecuación 4.49 dará el IPR ideal con respecto a la presión promedio del yacimiento mientras que la ecuación 4.51 dará el IPR ideal con respecto a la presión a la frontera externa. El IPR ideal asume que la permeabilidad del yacimiento es uniforme hasta el pozo mismo. El IPR real será presentado más adelante al considerar el factor de daño en las ecuaciones de flujo.

4.2.6. ÍNDICE DE PRODUCTIVIDAD

A un tiempo dado en la vida productiva de un pozo, el índice de productividad¹⁴, J, es definido como dq/dp, el inverso de la pendiente de la recta en el gráfico p_{wf} vs. q de la figura 4.5.

$$J = \frac{q}{p - p_{wf}} \quad \text{Ec. 4.56}$$

arriba del punto de burbujeo.

Así para un pozo sin daño y sin estimulación, el J ideal puede ser obtenido de ecuación 4.49 y obtener,

$$J_{ideal} = \frac{0.00708kh}{\beta\mu \left(\ln r_{eD} - \frac{3}{4} \right)} \quad \text{Ec. 4.57}$$

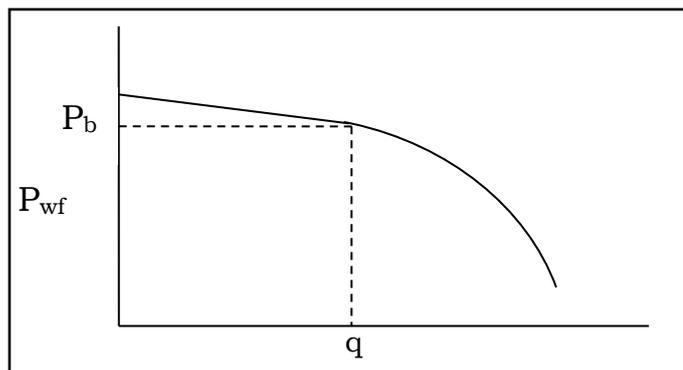


Fig. 4.5 Capacidad de tasa de producción del pozo, arriba y abajo de la presión de burbuja

Debe enfatizarse que el índice de productividad solo toma sentido y representa una característica del área de drenaje del pozo bajo flujo de estado pseudocontinuo o de

estado continuo en los cuales el drawdown (declinación) de presión es constante con tiempo. El J sería una cantidad variable si se lo obtuviera en flujo transiente temprano.

4.2.7. TIEMPO DE INICIO DE FLUJO DE ESTADO SEUDOCONTINUO

Para un pozo localizado al centro de un área de drenaje de forma regular (circular, hexagonal y cuadrada), las ecuaciones de flujo de estado pseudocontinuo que hemos visto son precisas a partir del tiempo indicado en la columna “exacta para $t_{DA} >$ ” de la **Tabla 4.3**, en Apéndice. Esto es:

$$t_{DA} \geq \frac{0.0002637kt}{\phi\mu c_i A} \geq 0.1 \quad \text{Ec. 4.58}$$

lo cual es lo mismo que

$$t \geq \frac{379\phi\mu c_i A}{k} \quad \text{Ec. 4.59}$$

ó

$$t \geq \frac{1190\phi\mu c_i r_e^2}{k} \quad \text{Ec. 4.60}$$

Para todos los otros casos de la forma del área de drenaje, el inicio del flujo de estado pseudocontinuo es más demorado que el indicado por las ecuaciones 4.59 y 4.60.

Por otro lado, en la misma Tabla 4.3, en la columna “Usar solución de sistema infinito con error menor a 1% para $t_{DA} <$ ” se indica el límite máximo por debajo del cual se puede usar la solución función- E_i siendo ésta precisa en por lo menos 99%.

4.2.8. BREVE ANÁLISIS DE LOS LÍMITES DE LA APLICACIÓN DE LA SOLUCIÓN FUNCIÓN- E_i Y DE LA SOLUCIÓN DE FLUJO SEUDOCONTINUO. TABLA 4.3 DEL APENDICE.

En forma gráfica la función- E_i se presenta en la Fig. 4.6, de coordenadas log-log.

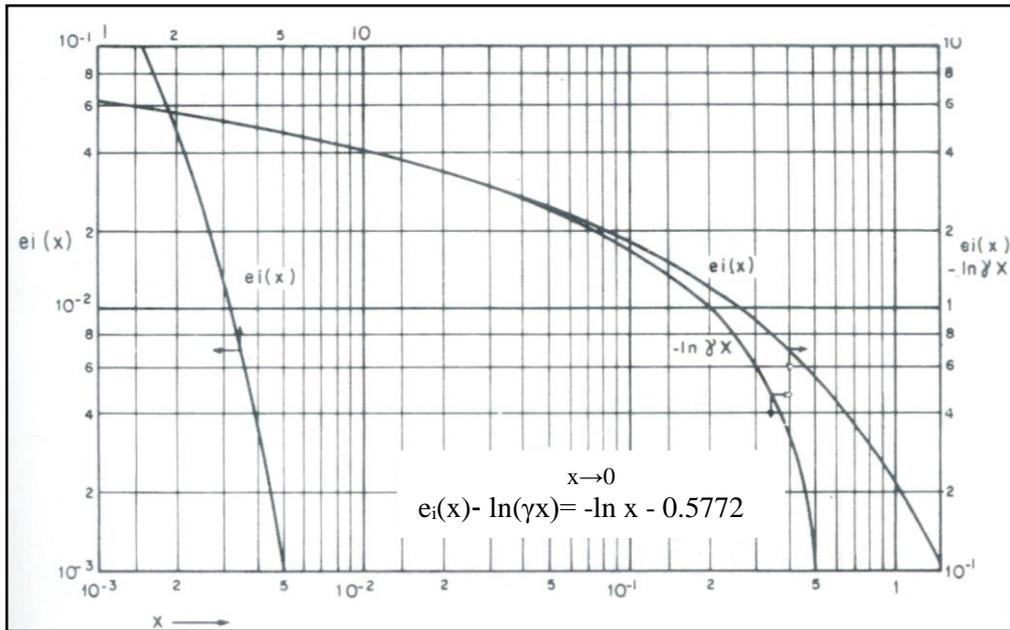


Fig. 4.6: Gráfico de la función-E_i para 0.001 ≤ x ≤ 5.0¹

Nota: -e_i(-x) = e_i(x)

La solución función-E_i fue presentada como ecuación 4.1:

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} E_i \left(\frac{-r_D^2}{4t_D} \right)$$

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i \left(\frac{-0.25}{t_D / r_D^2} \right)$$

en la cual se puede apreciar que p_D puede ser correlacionada con el parámetro t_D / r_D^2 tal como lo muestra la Fig. 4.7. Esta solución también es conocida como solución de Theis¹⁵ o solución de línea fuente¹⁶.

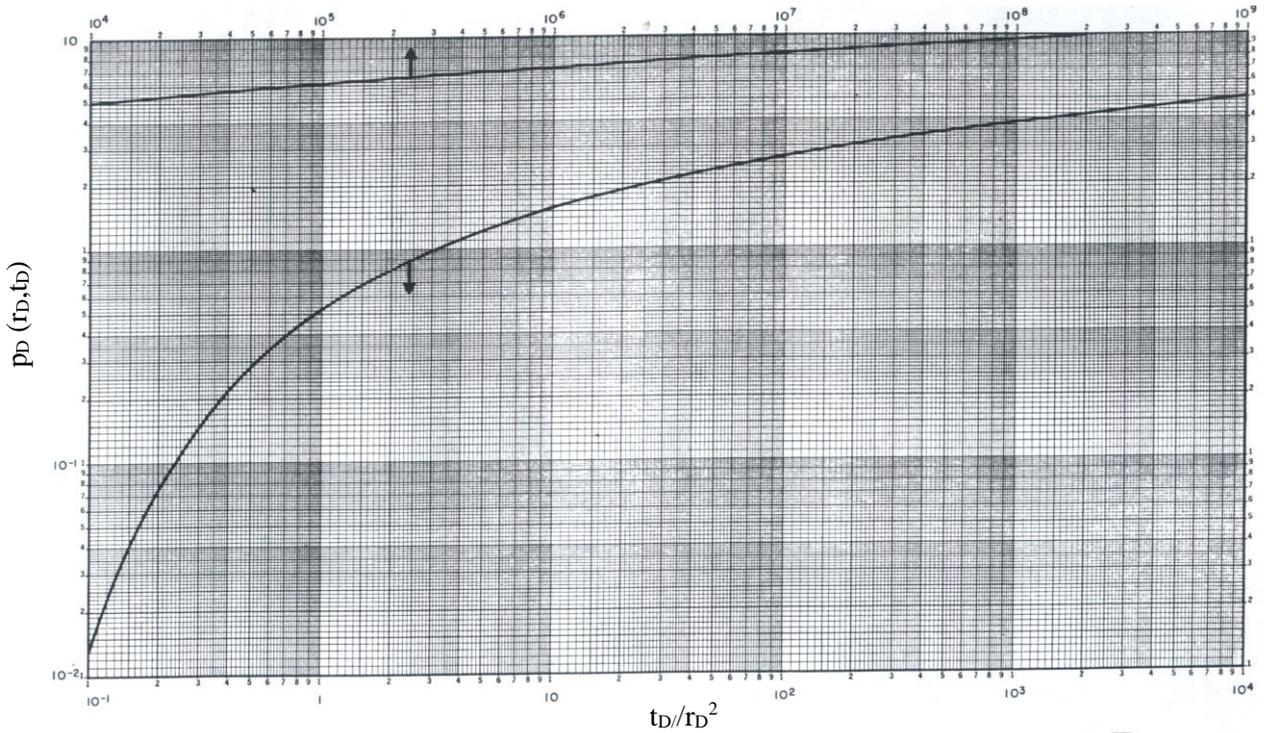


Fig. 4.7: Presión adimensional para un pozo en un sistema infinito, sin efecto de almacenamiento, sin daño. Solución exponencial integral¹⁰

Para conocer su rango de tiempo de aplicación, en la Fig. 4.8, se ilustra la solución exacta encontrada por Carslaw y Jaeger y presentada por Mueller y Witherspoon¹⁷ (1965) junto con la solución función- E_i (solución Theis).

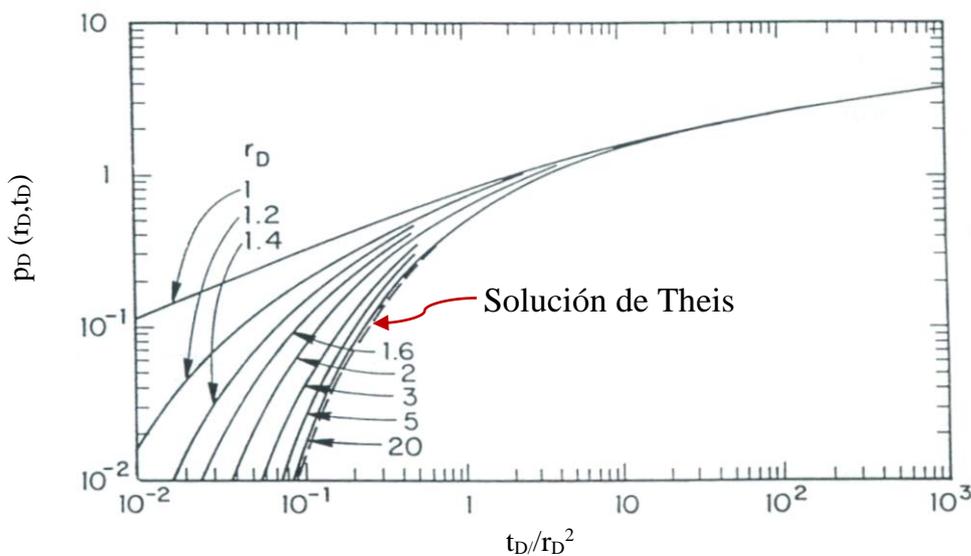


Fig. 4.8: Solución exacta y solución aproximada de Theis^{15,17}

La diferencia entre la solución función-Ei y la solución exacta es que la primera asume el radio del pozo igual a cero ($r_w=0$), mientras que la segunda emplea el radio finito del pozo, r_w , ambas soluciones siendo para yacimientos de actuación como infinitos. A valores relativamente pequeños de t_D/r_D^2 la solución exacta es una función de t_D y r_D más que una función de t_D/r_D^2 . En este rango, la solución función-Ei puede desviarse apreciablemente de la solución de radio finito del pozo dependiendo del valor de r_D . Para $r_D > 20$, la solución función-Ei concuerda muy bien con la solución para radio finito aún para valores pequeños de t_D/r_D^2 . Para $t_D/r_D^2 \geq 100$, la solución función-Ei y la solución exacta para cualquier r_D , coinciden muy bien con la solución exacta al pozo, ($r_D = 1$). Esto significa que la solución función-Ei puede ser usada para modelar el comportamiento de las presiones en un yacimiento que actúa como infinito, a partir de $t_D/r_D^2 \geq 100$, para cualquier r_D y, al pozo ($r_D=1$) a partir de $t_D \geq 100$

$$t_D \geq 100$$

$$\frac{0.0002637kt}{\phi\mu c_t r_w^2} \geq 100$$

$$\therefore t \geq \frac{3.79 \times 10^5 \phi\mu c_t r_w^2}{k}$$

que viene a ser el *límite inferior* (Ecuación 4.5A) de tiempo de aplicación de la solución función-Ei. Algunos ingenieros asumen que ya a $\frac{t_D}{r_D^2} \geq 25$, la solución aproximada y la exacta coinciden bien para cualquier r_D , incluyendo $r_D = 1$, y que $t > 0.948 \times 10^5 \frac{\phi\mu c_t r_w^2}{k}$ es el límite inferior de la solución aproximada.

Para hallar el límite superior de aplicación de la solución función-Ei podemos hacer uso de varios enfoques, uno de estos, que es considerado como mejor definido, es el presentado por H. C. Slider en su libro: “Worldwide Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods”¹⁸ Sabemos que a tiempos largos cuando el yacimiento deja de actuar como infinito, la solución p_D al pozo ($p_D(1, t_D)$) fue presentada como ecuación 4.32:

$$p_D(1, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4}$$

El punto ahora es saber cuándo cambiar de la solución para yacimiento infinito a la solución para yacimiento finito, la cual corresponde al flujo de estado pseudocontinuo para un yacimiento cerrado (no influjo de acuífero).

En la Fig. 4.9 se muestra la solución exacta al pozo, $p_D(1, t_D)$, para un yacimiento cerrado y para cualquier tiempo, sea durante el flujo transiente como durante el flujo pseudocontinuo, como fue presentada por van Everdingen y Hurst .

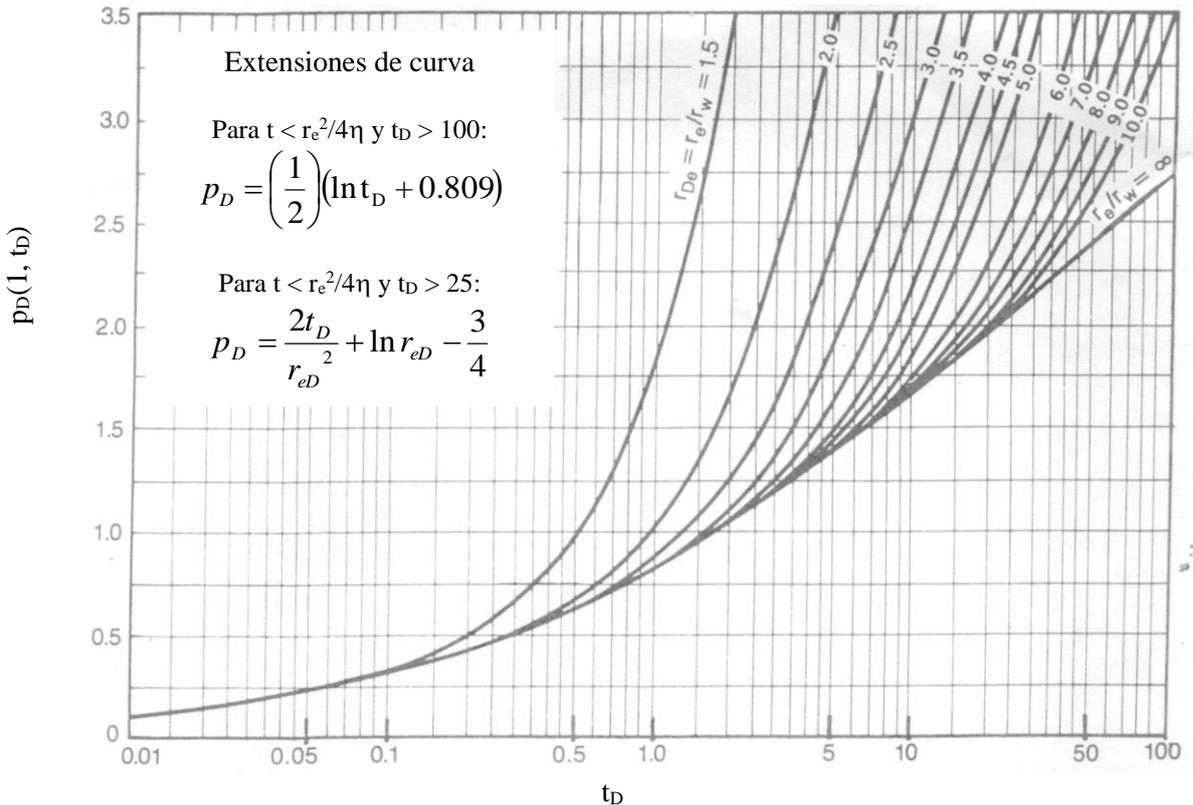


Fig. 4.9: Valores para $p_D(1, t_D)$ de van Everdingen y Hurst (flujo transitorio y flujo pseudocontinuo)¹⁸. η definido en Ec. 3.6B.

En la Fig. 4.10 se muestra cualitativamente la solución función- E_i , que es la aproximación a la solución exacta, que se aplica durante el flujo transiente y la solución aproximada para flujo pseudocontinuo (Ec. 4.32). Como se puede apreciar, en la región de cambio de aplicación las dos soluciones vienen a ser muy cercanas una de la otra, de suerte que la selección del tiempo para cambiar de una solución a otra no es crítico en el aspecto cuantitativo. Nosotros escogemos cambiar de una solución a otra cuando las dos líneas continuas en la figura vienen a ser lo más cercanas una a otra. Este punto ocurre cuando la diferencia entre las dos es mínima.

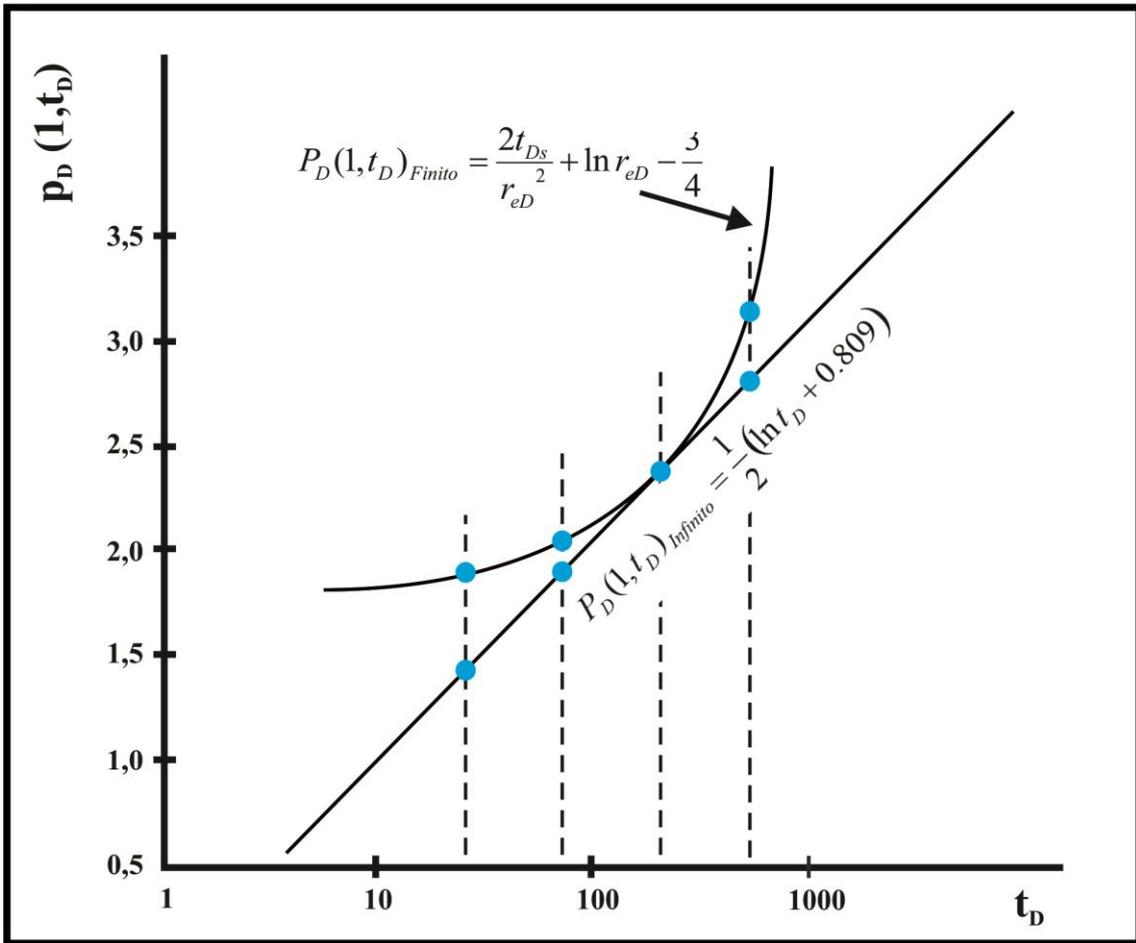


Fig. 4.10: Comparación de las funciones de presión – yacimientos infinito y finito¹⁸

En la Fig. 4.10 se puede apreciar la diferencia de p_D entre las dos funciones versus el t_D . Esta diferencia viene marcada por la distancia de los dos puntos de p_D (yacimiento finito y yacimiento infinito).

Para encontrar el punto donde la diferencia es un mínimo, evaluamos el punto sobre la curva donde la pendiente es cero:

$$Diferencia = \left(\frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907)$$

$$\frac{\Delta Diferencia}{\Delta t_D} = \frac{2}{r_{eD}^2} - \frac{1}{2t_D} = 0$$

$$t_D = t_{DS} = \frac{r_{eD}^2}{4}$$

$$t = \frac{948\phi\mu_c r_e^2}{k}, \text{ en variable dimensional de tiempo.}$$

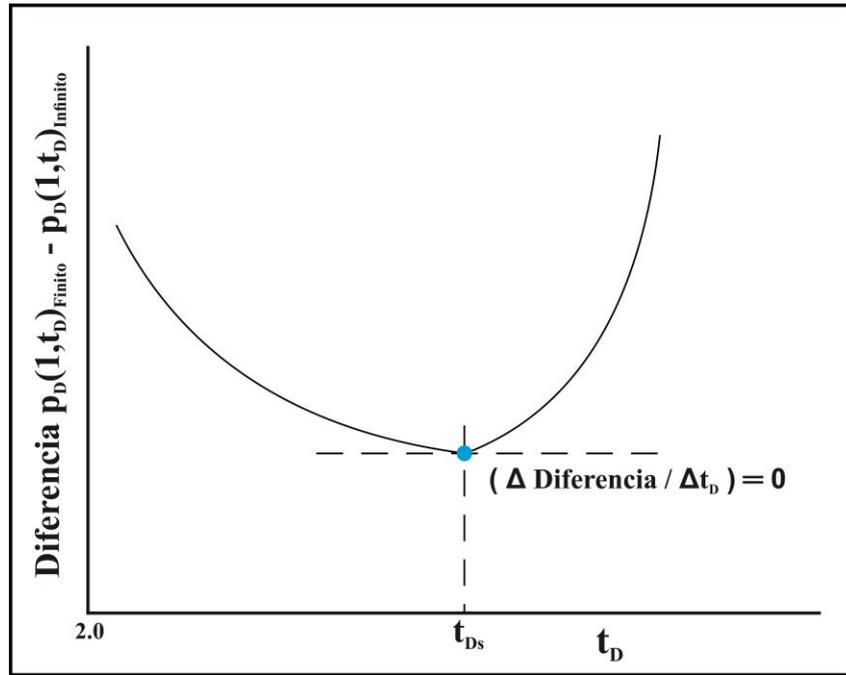


Fig. 4.11: Gráfico que demuestra el fundamento de la ecuación del tiempo crítico, t_{DS}

Este sería el *límite superior* de aplicación de la solución función- E_i , es decir flujo transitorio. Esto significa que para $t \leq \frac{948\phi\mu c_t r_e^2}{k}$ la solución función- E_i será aplicable ya que después de éste tiempo los efectos de frontera serán sentidos y el flujo cambiará a uno de estado pseudocotínuo. El tiempo aquí definido deberá usarse simplemente como una guía y es válido para el flujo de un yacimiento circular con el pozo en el centro como fue asumido en la deducción de las soluciones a la ecuación de difusividad. Para otras geometrías de drenaje y posición de pozo, el tiempo aquí definido puede variar.

Para un pozo ubicado en el centro de un *área de drenaje circular*, el tiempo adimensional con base en el área A , t_{DA} , que indica el límite superior de aplicación de la solución función- E_i y, en este caso, el inicio del flujo pseudocontinuo, es:

$$t_{DA} = \frac{t_{DS}}{\pi r_{eD}^2} = \frac{r_{eD}^2}{4\pi r_{eD}^2} = \frac{1}{4\pi} = 0.08$$

Si asumimos $t_{DA} \geq 0.1$, podemos decir que la solución 4.32 para *flujo pseudocontinuo* será una solución exacta, tal como aparece en la Tabla 4.3 de los Apéndices. Pero, para $t_{DA} > 0.06$, también esta ecuación puede usarse con un error menor al 1%.

Así mismo, en yacimientos con área de drenaje circular, para $t_{DA} < 0.1$, el flujo es transitorio y la ec. 4.1 puede usarse con un error menor al 1%.

Las dos últimas columnas de la **Tabla 4.3 del Apéndice** serán utilizadas para determinar, con un error $< 1\%$, los límites de aplicación de las ecuaciones de flujo. Para resolver los problemas de flujo transitorio se leerá en la última columna el tiempo adimensional t_{DA} máximo; y, para resolver los de estado pseudocontinuo, en la penúltima columna se leerá el tiempo t_{DA} mínimo, para las geometrías de flujo indicadas en dicha Tabla.

4.3. PERMEABILIDAD Y EXTENSIÓN DE LA ZONA DAÑADA O ESTIMULADA¹⁹

Generalmente, en la perforación de pozos exploratorios y en menor escala en los pozos de avanzada, al atravesar el reservorio de interés ocurre alteración a la permeabilidad de la formación en la zona cercana al pozo, ocasionada por la columna de lodo de perforación. Puede ocasionarse daño o estimulación de la formación debido al filtrado de lodo o a tensiones que se desarrollan en una región cercada al pozo cuya permeabilidad se ve afectada, como se muestra en la Fig. 4.12.

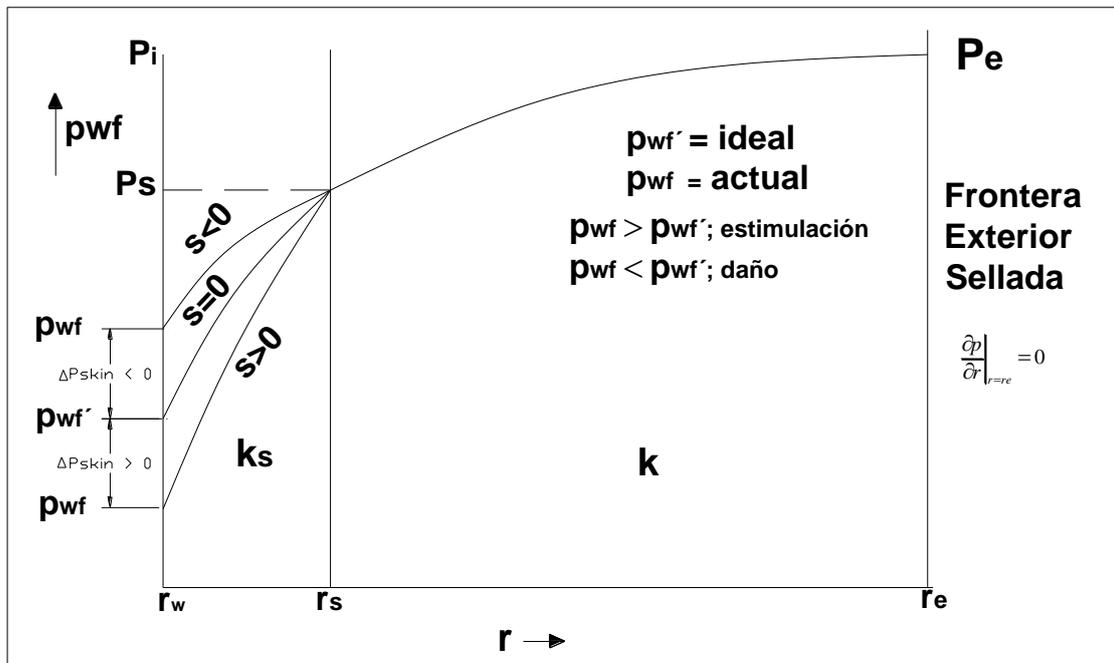


Fig. 4.12: Perfil de presión dentro del reservorio para pozo dañado o estimulado.

En la figura la p_{wf}' corresponde a la presión al fondo del pozo sin alteración de la zona cercana al mismo. Mientras que la p_{wf} es la presión al pozo bajo afectación de la permeabilidad, la misma que puede verse disminuida (daño) o aumentada (estimulación). Para referirnos a la zona alterada cercana al pozo suele indicarse genéricamente que es la zona “dañada”.

A pesar de que habría otras causas por las cuales se puede observar impedimentos o mejoramientos al flujo de fluidos en la zona cercana al pozo, como completación parcial, desviación de la vertical, disparos, flujo no Darcy y otros^{20,21,22}, aquí se presenta el tratamiento matemático de los daños físicos que se pudieran haber ocasionado al pozo y que pueden ser reparados o mitigados por medio de una estimulación.

Para derivar una relación entre el radio de la zona dañada y la permeabilidad de la zona dañada, tratamos el arreglo como dos permeabilidades en serie. Suponemos que la zona alterada se extiende hasta un radio r_s y que tiene una permeabilidad k_s .

La diferencia en caída de presión entre la zona del yacimiento con permeabilidad alterada y la misma zona del yacimiento sin permeabilidad alterada, asumiendo flujo de estado continuo (ec. de Darcy) en la zona alterada, nos permite conocer la caída de presión adicional debido a la alteración que ha tenido lugar en la zona dañada, Δp_{skin} .

En la zona alterada,

$$p_s - p_{wf} = \frac{141.2q\beta\mu}{k_s h} \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \quad \text{Ec. 4.61}$$

Y en la zona no alterada,

$$p_s - p_{wf}' = \frac{141.2q\beta\mu}{kh} \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \quad \text{Ec. 4.62}$$

Y la diferencia entre ecuaciones 4.61 y 4.62 es:

$$p_{wf}' - p_{wf} = \frac{141.2q\beta\mu}{h} \left[\frac{1}{k_s} \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) - \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) \right] \quad \text{Ec. 4.63}$$

$$\Delta p_{skin} = p_{wf}' - p_{wf} = \frac{141.2q\beta\mu}{kh} S \quad \text{Ec. 4.63A}$$

Donde,

$$S = \left[\frac{k}{k_s} - 1 \right] \ln \frac{r_s}{r_w} \quad \text{Ec.4.63B}$$

S es el factor de “daño” o *factor de piel* (del inglés skin factor)^{23,24,25}.

Introduciendo el factor S en la ecuación de flujo, podemos hallar la caída de presión total requerida para producir la tasa q en un yacimiento con zona dañada²⁵ (figura 4.12)

$$p_e - p_{wf} = (p_e - p_{wf}') + \Delta p_{skin} \quad \text{Ec. 4.64}$$

$$p_e - p_{wf} = (p_e - p_{wf}') + \frac{141q\beta\mu}{kh} S \quad \text{Ec. 4.65}$$

Conocida S, la ecuación 4.63B puede ser usada para estimar k_s si r_s fuera conocida o para estimar r_s si k_s fuera conocida. La ecuación 4.64 presupone que la caída de presión adicional ocurre en una zona cercana al pozo de grosor infinitesimal como lo modeló van Everdingen

Debe recordarse que k y S pueden ser estimadas de una prueba de presión transiente ejecutada en un pozo del yacimiento como sugieren las ecuaciones 4.69 y 4.70 o 4.71.

4.3.1. INCLUSION DEL FACTOR DE DAÑO O DE PIEL, “S”, EN ECUACIONES DE FLUJO.

A. SOLUCIÓN DEL FLUJO TRANSIENTE TEMPRANO CONSIDERANDO “S”

Para el período de flujo transiente temprano la solución de la ecuación adimensional de difusividad para un *yacimiento que actúa como si fuera infinito* y el pozo exhibe una zona alterada es (Fig. 4.12 y ecuación 4.65)^{26,27,28}:

$$(p_i - p_{wf})_{actual} = (p_i - p_{wf})_{ideal} + \Delta p_s \quad \text{Ec. 4.66}$$

En términos adimensionales,

$$p_{Dactual} = p_{Dideal} + S$$

$$p_{Dactual}(1, t_D) = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.80907] + S, \text{ para } t_D \geq 25 \quad \text{Ec. 4.67}$$

$$p_{wf actual}(t) = p_i - \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \left[\log t + \log \left(\frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2} \right) - 3.23 + 0.87S \right] \quad \text{Ec. 4.68}$$

$$\ln x = (1/\log e) \log x = 2.303 \log x$$

La ecuación 4.68 demuestra que un gráfico de p_{wf} versus $\log t$ será una recta con una pendiente dada por:

$$m = -162.6 \frac{q\beta\mu}{kh} \quad \text{Ec. 4.69}$$

la cual puede ser usada para calcular $\frac{kh}{\mu}$ (transmisibilidad) o k si h y μ son conocidas.

La ecuación 4.68 puede ser arreglada para resolver por el factor de piel como:

$$S = 1.151 \left(\frac{p_{wf}(t) - p_i}{-162.6 \frac{q\beta\mu}{kh}} - \log\left(\frac{kt}{\phi\mu c_r r_w^2}\right) + 3.23 \right) \quad \text{Ec. 4.70}$$

Para calcular el factor de piel usando la ecuación 4.70, p_{wf} es escogida en el gráfico de una prueba de drawdown sobre la *línea recta semilog o su extrapolación*, cuyo valor puede ser muy diferente a la presión de flujo registrada (medida en la prueba de pozo) al tiempo t .

En la práctica generalmente se escoge p_{wf} a $t = 1$ hora (ver Fig. 4.3) para calcular el factor de piel. Con esta selección, la ecuación 4.70 queda de la siguiente manera:

$$S = 1.151 \left(\frac{p_{wf}(1\text{hora}) - p_i}{-\left(\frac{162.6q\beta\mu}{kh}\right)} - \log\left(\frac{k}{\phi\mu c_r r_w^2}\right) + 3.23 \right) \quad \text{Ec. 4.71}$$

La ecuación 4.71 puede ser escrita en términos del valor absoluto de la pendiente de la recta semilog como:

$$S = 1.1513 \left(\frac{p_i - p_{wf}(1\text{hora})}{|m|} - \log\left(\frac{k}{\phi\mu c_r r_w^2}\right) + 3.23 \right) \quad \text{Ec. 4.72}$$

La ecuación 4.71 ó 4.72 puede usarse para calcular el *factor de piel total*, ya que el signo del factor de piel total provee información muy útil.

Es importante que las ecuaciones sean correctamente aplicadas para obtener el signo correcto del factor de piel. El signo del factor de piel es controlado ampliamente por el primer término del paréntesis recto del lado derecho de la ecuación 4.71 o 4.72. El error común cometido usualmente en la evaluación del primer término está en la falla de no usar $p_{wf}(1 \text{ hora})$ de la recta semilog en la ecuación 4.71 o 4.72 y en la falla de no usar el signo correcto de la pendiente de la recta semilog en la ecuación 4.71 o 4.72. El término $\log\left(\frac{k}{\phi\mu c_r r_w^2}\right)$ en las ecuaciones 4.71 o 4.72 típicamente varía desde 6 hasta 10 en la mayoría de situaciones de prueba de pozo^{23,25}.

La cantidad de presión adicional al pozo debido al efecto de piel es dado por cualquiera de las siguientes tres ecuaciones:

$$\Delta p_{skin} = \frac{141.2q\beta\mu}{kh} S \quad \text{Ec. 4.73}$$

$$\Delta p_{skin} = \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \times 0.87S \quad \text{Ec. 4.74}$$

$$\Delta p_{skin} = 0.87|m|S \quad \text{Ec. 4.75}$$

Donde m es la pendiente de la recta semilog (por ejemplo: -7), tomado su valor absoluto, 7. Para un pozo con un factor de piel positivo, la caída de presión adicional es positiva (existiría “daño”) mientras que para un pozo con un factor de piel negativo, esta es negativa (existiría “estimulación”).

B. SOLUCIÓN DEL FLUJO SEUDOCONTINUO CONSIDERANDO “S”.

Para el flujo de estado pseudocontinuo, al considerar el factor de piel en las ecuaciones del modelo ideal éstas quedan de las siguientes formas:

$$(p_i - p_{wf})_{actual} = (p_i - p_{wf})_{ideal} + \Delta P_S \quad \text{Ec. 4.76}$$

En variables adimensionales,

$$p_{Dactual}(1, t_D) = p_{Dideal} + S \quad \text{Ec. 4.77}$$

$$p_{Dactual}(1, t_D) = \frac{2t_D}{r_{eD}^2} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} + S \quad \text{Ec. 4.78}$$

$$p_{Dactual}(1, t_D) = 2\pi t_{DA} + \ln r_{eD} - \frac{3}{4} + S \quad \text{Ec. 4.79}$$

$$p_{Dactual}(1, t_D) = 2\pi t_{DA} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) + S \quad \text{Ec. 4.80}$$

En variables dimensionales, área de drenaje de cualquier geometría^{27,28}.

$$p_{wf actual} = \bar{p} - 162.6 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[\log \left(\frac{A}{r_w^2} \right) + \log \left(\frac{2.2458}{C_A} \right) + 0.87S \right] \quad \text{Ec. 4.81}$$

Para área de drenaje circular,

$$\bar{p} - p_{wf} = 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{3}{4} + S \right] \quad \text{Ec. 4.82}$$

$$p_e - p_{wf} = 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + S \right] \quad \text{Ec. 4.83}$$

4.3.2. EFICIENCIA DE FLUJO

Un método para trasladar el factor de piel, S , a una caracterización físicamente comprensible de un pozo es calculando la eficiencia de flujo, EF. Se define la eficiencia de flujo como la razón entre la caída ideal de presión sobre la caída real de presión requerida para producir una misma tasa de flujo constante al pozo. Las presiones en la EF generalmente corresponden al flujo de estado pseudocontinuo, empleando la presión promedia del yacimiento.

$$EF = \frac{\Delta P_{ideal}}{\Delta P_{real}} = \frac{\bar{p} - p_{wf}'}{p - p_{wf}} \quad \text{Ec. 4.84}$$

las presiones p_{wf}' y p_{wf} pueden ser visualizadas en las figuras 4.12 y 4.13, siendo p_{wf}' para cuando no existe zona alterada alrededor del pozo, es decir ningún daño, ninguna estimulación, $S = 0$.

También,

$$EF = \frac{\bar{p} - p_{wf} - \Delta p_{skin}}{p - p_{wf}} \quad \text{Ec. 4.85}$$

En términos del índice de productividad J ,

$$EF = \frac{J_{actual}}{J_{ideal}} = \frac{J_a}{J_i} \quad \text{Ec. 4.86}$$

siendo $J_a = \frac{q_o}{p - p_{wf}}$ y $J_i = \frac{q_o}{p - p_{wf}'}$.

4.3.3. RADIO APARENTE

Este método de radio aparente, también denominado radio efectivo, consiste en reemplazar el radio real del pozo que tiene un radio r_w y un factor de piel S , por un pozo ficticio con un radio r_{wa} y factor de piel cero. (Fig. 4.13)²⁹.

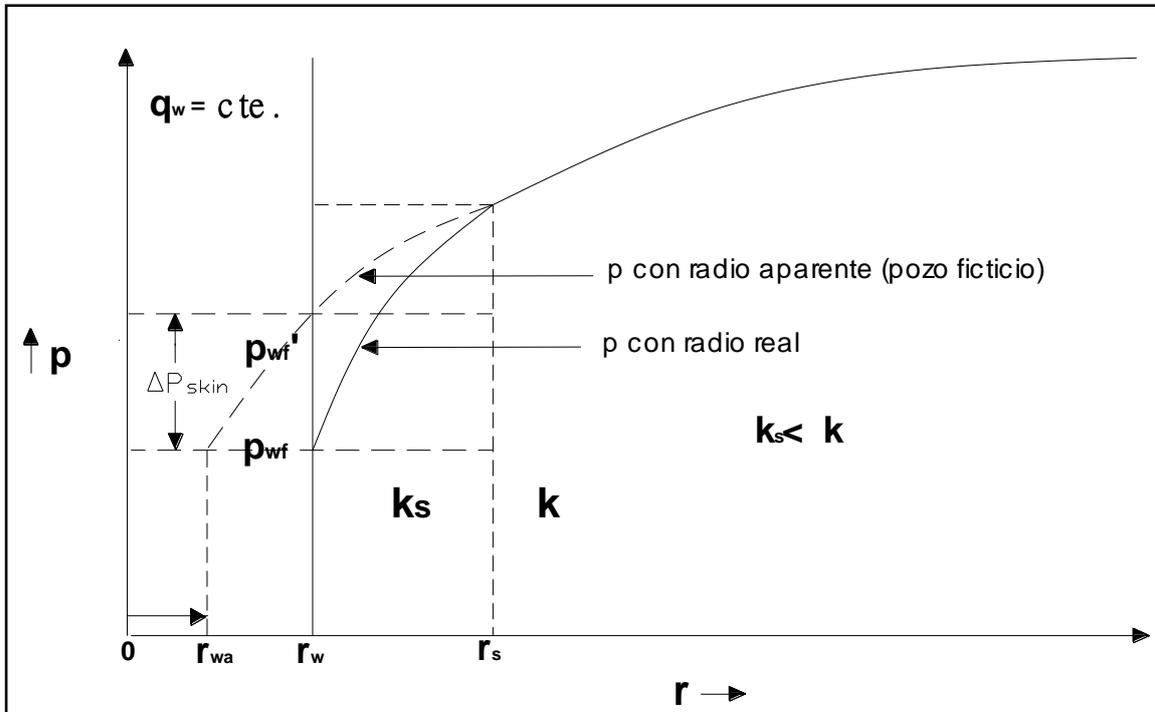


Fig. 4.13: Radio Aparente, r_{wa}

El r_{wa} es determinado de modo que tenga una caída de presión entre r_s y r_{wa} en el pozo ficticio igual a la caída de presión entre r_s y r_w en el pozo real:

$$\Delta p(r_{wa}, S = 0) = \Delta p(r_w, S) \quad \text{Ec. 4.87}$$

Expresando la caída de presión con la ley de Darcy:

$$141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \ln\left(\frac{r_s}{r_{wa}}\right) = 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \left[\ln\left(\frac{r_s}{r_w}\right) + S \right] \quad \text{Ec. 4.88}$$

de donde:

$$r_{wa} = r_w e^{-S} \quad \text{Ec. 4.89}$$

4.4. YACIMIENTOS ABIERTOS $\left(\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_e} \neq 0 \right)$ Y $\left(\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{t>t_s} = 0 \right)$.

En yacimientos abiertos que producen a tasa constante y en los cuales la presión al radio exterior es mantenida constante en función del tiempo, el período de flujo transiente es descrito por las mismas ecuaciones encontradas para este período de flujo en la sección de yacimientos cerrados.

El período de flujo de estado continuo que aparece luego del tiempo t_s , puede ser descrito por las ecuaciones siguientes^{28,29}.

A tiempos suficientemente largos, el flujo de estado continuo se logrará y las ecuaciones 3.29 y 3.30 se simplifican a:

$$p_D(r_D, t_D) = \ln r_{eD} - \ln r_D = \ln \left(\frac{r_e}{r} \right) \quad \text{Ec. 4.90}$$

y

$$p_D(1, t_D) = \ln r_{eD} = \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) \quad \text{Ec. 4.91}$$

En unidades de campo y en términos de variables dimensionales, estas ecuaciones vienen a quedar:

$$p(r, t) = p_i - 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \ln \left(\frac{r_e}{r} \right) \quad \text{Ec. 4.92}$$

$$p(r, t) = p_{wf} - 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} \ln \left(\frac{r_w}{r} \right) \quad \text{Ec. 4.92A}$$

y

$$q = \frac{7.08 \times 10^{-3} kh (p_i - p_{wf})}{\beta\mu \ln \frac{r_e}{r_w}} \quad \text{Ec. 4.93}$$

Introduciendo el factor de piel S,

$$q = \frac{7.08 \times 10^{-3} kh (p_i - p_{wf})}{\beta\mu \ln \frac{r_e}{r_w} + S} \quad \text{Ec. 4.93A}$$

Definiendo una presión promedio volumétrica del yacimiento como:

$$\bar{p} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} p dV_p}{\int_{r_w}^{r_e} dV_p} \quad \text{Ec. 4.94}$$

Entonces,

$$\bar{p} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} 2\pi r h \phi p dr}{\pi h \phi (r_e^2 - r_w^2)} \quad \text{Ec. 4.95}$$

Sustituyendo la ecuación 4.92A en 4.95 e integrando da:

$$\bar{p} = \frac{2}{r_e^2 - r_w^2} \left[\frac{(r_e^2 - r_w^2) p_{wf}}{2} + \frac{141.2 q \beta \mu}{kh} \left(\frac{1}{2} r_e^2 \ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{4} (r_e^2 - r_w^2) \right) \right] \quad \text{Ec. 4.96}$$

Para $r_e^2 \gg r_w^2$, la ecuación 4.96 se simplifica a:

$$q = \frac{7.08 \times 10^{-3} kh (\bar{p} - p_{wf})}{\beta \mu \left[\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} \right]} \quad \text{Ec. 4.97}$$

Introduciendo el factor de piel obtenemos

$$q = \frac{7.08 \times 10^{-3} kh (\bar{p} - p_{wf})}{\beta \mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + S \right)} \quad \text{Ec. 4.98}$$

La solución de flujo de estado continuo ha sido presentada aquí para completar la gama de ecuaciones de flujo que se tiene al resolver el problema de tasa constante al pozo, en yacimientos cerrados y abiertos.

Problema 4.2

Un pozo de petróleo ubicado en el centro de un yacimiento produce a una tasa de flujo constante a 300 STB/DIA. La presión externa del yacimiento es 3000 psi y constante. Inicialmente el pozo tiene S=0. Otros datos relevantes son:

Porosidad, ϕ	=	30 %
Permeabilidad	=	50 md
Factor Volumétrico de reservorio	=	1.25 Rb/STB

de formación del petróleo, β_o		
Espesor neto de formación, h	=	30 ft
Viscosidad del petróleo, μ	=	3 cp
Compresibilidad, C	=	10×10^{-6}
Radio de pozo, r_w	=	0.5 ft
Radio externo, r_e	=	745 ft

- Asumiendo que el pozo posee un régimen de flujo continuo, calcular la Pwf (presión de fondo fluyente)
- Durante un trabajo de workover mal diseñado se afectó la permeabilidad absoluta del yacimiento. Mediante pruebas de presión se determinó un factor de daño $S= 1.5$, Determinar la Pwf necesaria para que el caudal de producción se mantenga como cuando no existía daño en la formación.
- Realizar un gráfica de la presión del yacimiento con respecto al radio medido desde el centro del pozo (P vs r) antes y después del daño de formación. Determinar la caída de presión adicional Δp_{skin} .
- El equipo de ingeniería de yacimiento sugiere realizar un fracturamiento hidráulico para incrementar la permeabilidad de la formación. Luego de realizar el trabajo de fracturamiento, en la estación de producción se determina que el caudal del pozo es 500 stb/día, con la misma p_{wf} obtenida en b). Empleando el factor de daño de formación (factor piel), explicar si el fracturamiento fue una recomendación y operación acertada.
- Determinar la eficiencia de flujo antes del fracturamiento hidráulico y después del fracturamiento hidráulico.
- Asumiendo que el punto de burbuja P_b del yacimiento es de 1000 psi, graficar el Inflow Performance Relationship (IPR).
- ¿Es el yacimiento Subsaturado? ¿Por qué?

Desarrollo:

- Asumiendo que el pozo se encuentra con régimen de flujo continuo, calcular la Pwf (presión de fondo fluyente).
Inicialmente no hay daño ($S=0$).

$$q = \frac{1.127 \times 10^{-3} 2 \pi k h (P - P_{wf})}{\beta_o \mu \left(\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + s \right)}$$

$$P_{wf} = P - \frac{q \beta_o \mu \left(\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + s \right)}{1.127 \times 10^{-3} 2 \pi k h}$$

$$P_{wf} = 3000 \text{psi} - \frac{(300 \text{STB/día}) (1.25 \text{rb/STB}) (3 \text{cp}) \left(\ln \left(\frac{745 \text{ft}}{0.5 \text{ft}} \right) + 0 \right)}{(1.127 \times 10^{-3}) (2\pi) (50 \text{md}) (30 \text{ft})}$$

$$P_{wf} = 3000 \text{psi} - 773.87 \text{psi}$$

$$P_{wf} = 2226.13 \text{psi}$$

- b) Determinar la P_{wf} necesaria para que el caudal de producción se mantenga como cuando no existía daño en la formación. (consecuencia del reacondicionamiento o “workover”: $S=1.5$).

$$P_{wf} = P - \frac{q \beta_o \mu \left(\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + s \right)}{1.127 \times 10^{-3} 2 \pi k h}$$

$$P_{wf} = 3000 \text{psi} - \frac{(300 \text{STB/día}) (1.25 \text{rb/STB}) (3 \text{cp}) \left(\ln \left(\frac{745 \text{ft}}{0.5 \text{ft}} \right) + 1.5 \right)}{(1.127 \times 10^{-3}) (2\pi) (50 \text{md}) (30 \text{ft})}$$

$$P_{wf} = 3000 \text{psi} - 932.744 \text{psi}$$

$$P_{wf} = 2067.26 \text{psi}$$

- c) Hacer un gráfico de p vs r , antes y después del daño y determinar Δp_{skin} .

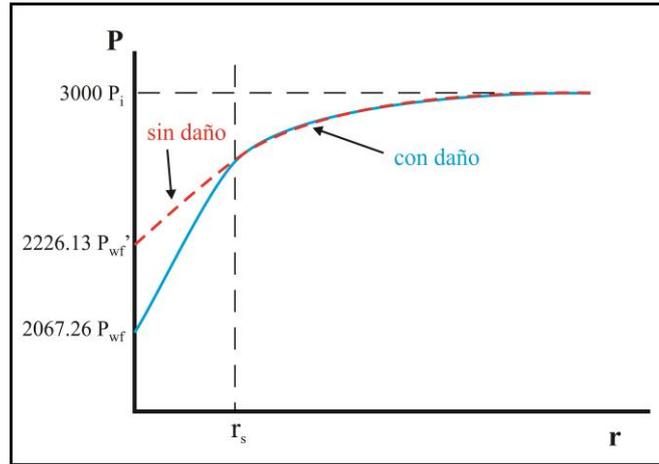


Fig. 4.14 Presión versus radio, sin daño y con daño, del problema 4.2.

$$P_{wf}' = \text{sin daño}$$

$$P_{wf} = \text{con daño}$$

$$\Delta P_s = \text{caída de presión adicional}$$

$$\Delta P_s = P_{wf}' - P_{wf}$$

$$\Delta P_s = 2226.13 \text{ psi} - 2067.26 \text{ psi}$$

$$\Delta P_s = 158.87 \text{ psi}$$

- d) El equipo de ingeniería de yacimiento sugiere realizar un fracturamiento hidráulico para incrementar la permeabilidad de la formación. Luego de realizar el trabajo de fracturamiento, en la estación de producción se determina que el caudal del pozo es 500 stb/día con p_{wf} del literal b). Empleando el factor de daño de formación (factor piel), explicar si el fracturamiento fue una recomendación y operación acertada.

$$q = \frac{1.127 \times 10^{-3} 2 \pi k h (P_e - P_{wf})}{\beta_o \mu \left(\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + s \right)}$$

$$s = \frac{1.127 \times 10^{-3} 2 \pi k h (P_e - P_{wf})}{q \beta_o \mu} - \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right)$$

$$s = \frac{1.127 \times 10^{-3} (2\pi)(50 \text{ md})(30 \text{ ft})(3000 \text{ psi} - 2067.26 \text{ psi})}{(500 \text{ STB/día})(1.25 \text{ rb/STB})(3 \text{ cp})} - \ln \left(\frac{745 \text{ ft}}{0.5 \text{ ft}} \right)$$

$$s = \frac{9907.3}{1875} - 7.3065$$

$$s = 5.2839 - 7.3065 = -2.022$$

Luego del trabajo de fracturamiento hidráulico se determina que el factor de daño de la formación (factor S) es negativo (S=-2.02). Un factor S negativo implica que la formación ha sido estimulada, lo que refleja además un incremento de la producción: 500 stb/día con una Pwf de 2067.21 psi. Por lo tanto, desde el punto de vista de la producción el trabajo de fracturamiento hidráulico fue acertado.

e) Determinar la eficiencia de flujo original y después del fracturamiento hidráulico.

- IP original (Formación sin daño).

$$Ef = \frac{IP_{actual}}{IP_{ideal}} = \frac{J_{actual}}{J_{ideal}}$$

$$IP_{ideal} = \frac{q_{ideal}}{\Delta p} = \frac{300 \text{ STB/día}}{(3000 \text{ psi} - 2226.13 \text{ psi})} = \frac{0.39 \text{ STB/día}}{\text{psi}}$$

- IP actual antes del fracturamiento (Formación con daño).

$$IP_{actual \text{ antes del fracturamiento}} = \frac{q_{antes}}{\Delta p} = \frac{300 \text{ STB/día}}{(3000 \text{ psi} - 2067.26 \text{ psi})} = \frac{0.32 \text{ STB/día}}{\text{psi}}$$

$$Ef = \frac{\frac{0.32 \text{ STB/día}}{\text{psi}}}{\frac{0.39 \text{ STB/día}}{\text{psi}}} = 0.82 = 82\%$$

- IP actual después del fracturamiento hidráulico. (Formación estimulada S=-2)

$$IP_{actual \text{ después del fracturamiento}} = \frac{q_{después}}{\Delta p} = \frac{500 \text{ STB/día}}{(3000 \text{ psi} - 2067.26 \text{ psi})} = \frac{0.53 \text{ STB/día}}{\text{psi}}$$

$$Ef = \frac{\frac{0.53 \text{ STB/día}}{\text{psi}}}{\frac{0.39 \text{ STB/día}}{\text{psi}}} = 1.37 = 137\% \text{ yacimiento estimulado}$$

f) Asumiendo que el punto de burbuja P_b del yacimiento es de 1000 psi, graficar el Inflow Performance Relationship (IPR).

Sobre los 1000 psi el yacimiento es subsaturado y el fluido fluye en el yacimiento en una sola fase (petróleo). Para un yacimiento subsaturado el IPR se realiza graficando P vs q donde q es igual a:

$$q = \frac{1.127 \times 10^{-3} 2 \pi k h (P_e - P_{wf})}{\beta_o \mu \left(\ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) + s \right)}$$

- $P_{wf} = 1000 \text{psi}$

$$q = \frac{(1.127 \times 10^{-3})(2\pi)(50 \text{md})(30 \text{ft})(3000 \text{psi} - 1000 \text{psi})}{(1.25 \text{rb}/\text{STB})(3 \text{cp}) \left(\ln \left(\frac{745 \text{ft}}{0.5 \text{ft}} \right) + 0 \right)}$$

$$q = 775.323 \text{STB}/\text{día}$$

- $P_{wf} = 1500 \text{psi}$

$$q = \frac{(1.127 \times 10^{-3})(2\pi)(50 \text{md})(30 \text{ft})(3000 \text{psi} - 1500 \text{psi})}{(1.25 \text{rb}/\text{STB})(3 \text{cp}) \left(\ln \left(\frac{745 \text{ft}}{0.5 \text{ft}} \right) + 0 \right)}$$

$$q = 581.492 \text{STB}/\text{día}$$

- $P_{wf} = 2000 \text{psi}$

$$q = \frac{(1.127 \times 10^{-3})(2\pi)(50 \text{md})(30 \text{ft})(3000 \text{psi} - 2000 \text{psi})}{(1.25 \text{rb}/\text{STB})(3 \text{cp}) \left(\ln \left(\frac{745 \text{ft}}{0.5 \text{ft}} \right) + 0 \right)}$$

$$q = 387.661 \text{STB}/\text{día}$$

- $P_{wf} = 2500 \text{psi}$

$$q = \frac{(1.127 \times 10^{-3})(2\pi)(50 \text{md})(30 \text{ft})(3000 \text{psi} - 2500 \text{psi})}{(1.25 \text{rb}/\text{STB})(3 \text{cp}) \left(\ln \left(\frac{745 \text{ft}}{0.5 \text{ft}} \right) + 0 \right)}$$

$$q = 193.830 \text{ STB/día}$$

- $P_{wf} = 3000 \text{ psi}$

$$q = \frac{(1.127 \times 10^{-3})(2\pi)(50 \text{ md})(30 \text{ ft})(3000 \text{ psi} - 3000 \text{ psi})}{(1.25 \text{ rb/STB})(3 \text{ cp}) \left(\ln \left(\frac{745 \text{ ft}}{0.5 \text{ ft}} \right) + 0 \right)}$$

**Tabla 4.6. Datos para IPR
Problema 4.2**

Q	Pwf
775,323	1000
581,492	1500
387,661	2000
193,83	2500
0	3000

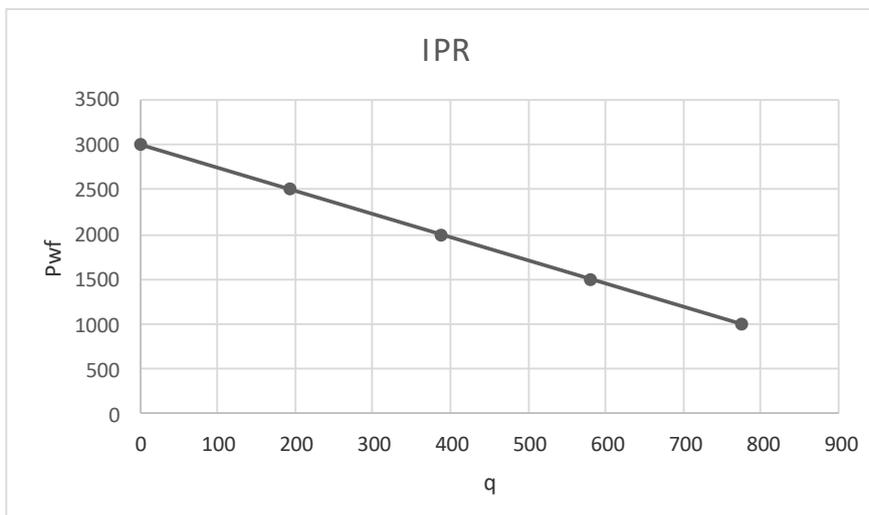


Fig. 4.15: IPR del problema 4.2

g) ¿Es el yacimiento Subsaturado? ¿Por qué?

El yacimiento es un yacimiento subsaturado debido a que la presión inicial es mayor que la presión en el punto de burbuja. Por lo tanto, el fluido fluye en una sola fase (petróleo).

PREGUNTAS TEÓRICAS

1. Definir cada uno de los siguientes términos incluyendo las unidades correspondientes según se requiera. Incluir una breve explicación de la utilidad práctica de cada término.
 - a) Factor de daño de formación
 - b) Dietz Shape Factor
 - c) Índice de productividad
 - d) Inflow Performance Relationship (IPR)
 - e) Eficiencia de flujo
2. Explicar la utilidad práctica de la siguiente ecuación. Incluir un gráfico en la explicación.

$$P_{wf\ actual}(t) = p_i - \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \left[\log t + \log \left(\frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2} \right) - 3.23 + 0.87S \right]$$

3. Empleando la ecuación de flujo para un yacimiento cerrado y considerando que la presión de fondo fluyente (Pwf) se encuentra sobre el punto de burbuja, explique cuál es el comportamiento del Índice de productividad a medida que disminuye la Pwf (Aumenta, disminuye o se mantiene constante). Justifique su respuesta.
4. Explique al menos cuatro formas prácticas para mejorar el Índice de Productividad de un Pozo.

EJERCICIOS PROPUESTOS**Ejercicio 4.1**

Se posee los siguientes datos de un pozo y yacimiento.

Datos:

- Porosidad, ϕ = 19 %
- Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o = 1.4 rb/STB
- Espesor neto de formación, h = 380 pies
- Viscosidad del petróleo, μ = 1.4 cp
- Compresibilidad, C = $1.53 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$
- Permeabilidad, k = 100 mD
- Radio de pozo, r_w = 0,49 pies
- Radio externo, r_e = 2950 pies
- Presión inicial del yacimiento, P_i = 5600 psi
- Tasa de flujo del pozo, q_o = 150 STB/día
- Skin factor = 0

Determinar:

- a. La P_{wf} después de 5 horas de producción.
- b. La presión en el yacimiento a un radio de 35 pies después de 5 horas de producción.
- c. La presión en el yacimiento a un radio de 140 pies después de 5 horas de producción.
- d. La presión en el yacimiento a un radio de 190 pies después de 50 horas de producción.

Ejercicio 4.2

Se abre un pozo a producción con una tasa de flujo de 90 STB/día. Se cuenta con la siguiente información:

Datos:

- Porosidad, ϕ = 21 %
- Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o = 1.25 rb/STB
- Espesor neto de formación, h = 75 pies
- Viscosidad del petróleo, μ = 5 cp
- Compresibilidad, C = $15.18 \times 10^{-7} \text{ psi}^{-1}$
- Permeabilidad, k = 130 mD

- Radio de pozo, r_w = 0,49 pies
- Radio externo, r_e = 2625 pies
- Presión inicial del yacimiento, P_i = 1740psi
- Tasa de flujo del pozo, q_o = 90 STB/día
- Skin factor = 0

Determinar:

- a) La presión de fondo fluuyente (P_{wf}) después de 2 horas de producción a un radio de 10m, 20m, 30m.
- b) La presión del yacimiento después de 2 horas de producción a un radio de 10m, 20m, 30, 40m, 50m, 60m, 70m. Graficar P vs r luego de 2 horas de producción.
- c) La presión del yacimiento después de 5 horas de producción a un radio de 10m, 20m, 30, 40m, 50m, 60m, 70m.

Ejercicio 4.3

Dos pozos son perforados en un yacimiento. El pozo 1 produce a 125 STB/día mientras el pozo 2 se mantiene cerrado. Usando los siguientes datos, calcular cuánto tiempo le tomará a la presión en el pozo 2 disminuir a 70 psi debido a la producción del pozo 1. El pozo 2 se encuentra a 164 pies del pozo 1.

Datos:

- Porosidad, ϕ = 17 %
- Factor Volumétrico de formación del petróleo, β_o = 1.20 rb/STB
- Viscosidad del petróleo, μ = 0.9 cp
- Compresibilidad, C = 2.96×10^{-7} psi⁻¹
- Permeabilidad, k = 85 mD
- Radio de pozo, r_w = 0,49 pies
- Radio externo, r_e = 6395 pies
- Presión inicial del yacimiento, P_i = 3046psi
- Tasa de flujo del pozo, q_o = 125 STB/día
- Skin factor = 0

Capítulo 4. REFERENCIAS

1. Dake, L.P.: *The Practice of Reservoir Engineering (Revised Edition)*. Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (2001). Cap.4, Sección 4.7
2. Matthews, C.S. and Russell, D.G.: *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*. Monograph Series, SPE, Richardson, Texas (1977). 11-12, Apéndice A.
3. Lee, W.J. : *Well Testing*. SPE Textbook Series Vol. 1. SPE (1982) Chap.1,
4. Peters, J. Ekwere: *Curso: Advanced Well Test Analysis With Emphasis in Horizontal and Directional Wells*. Fict-Espol, Gquil. Ec. (2001). Cap. 3
5. Dake, L.P.: *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (1978). Cap. 7
6. Caeslaw, H.S. and Jaeger, J.C.: *Conduction of Heat in Solids*. Second edition, Oxford U. Press, Oxford, U.K. (1959).
7. van Everdingen, A.F and Hurst, W.: “The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoir,” *Trans.*, AIME 186 (1949) 305-324.
8. Lee, J., Rollins, J.B., Spivey, J.P.: *Pressure Transient Testing*. SPE Textbook Series, Richardson, Texas (2003). Cap. 1
9. Abramowitz, M. and Stegun, L.E.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., New York City, New York (1972).
10. Earlougher, R.C. Jr.: *Advances in Well Test Analysis*. Monograph Series, SPE, Richardson, Texas (1977). Cap. 2., Apéndice C.
11. Spivey, John P. and Lee W. John: *Applied Well Test Interpretation*. SPE Textbook Series Vol. 13, SPE (2013). Cap. 2
12. Bourdet, D.P. et al: “A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis”. *World Oil*, GPC. Houston. May (1983). 95-106.
13. Dietz, D.N.: “Determination of Average Reservoir Pressure from Build Up Surveys”. *JPT* May (1965). 955-959.
14. Craft, B.C. and Hawkins, M., Revised by Terry, Ronald E.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, Second Edition. Prentice Hall Inc. (1991). 246-248

15. Theis, C.V.: “The Relationship between the Lowering of Piezometric Surface and the Rate and Duration of Discharge of a Well Using Ground-Water Storage”. Trans AGU (1935). 519-524.
16. Bourdet, D.P.: *Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models*. Elsevier (2002).274-275
17. Mueller T.D. and Witherspoon, P.A.: “Pressure Interference Effects within Reservoirs and Aquifers”. JPT April (1965). 471-474
18. Slider, H.C.: *Worldwide Practical Petroleum Reservoir Engineering Methods*. Penn Well Books (1983). Cap. 3. 99
19. Steward, G.: *Wireline Formation Testing and Well Deliverability*. PennWell (2012). Cap 1, 46-114
20. Bell, W.T., Sukup, R.A. and Tariq, S.M.: *Perforating*. Monograph Series. SPE (1995). 16
21. Cinco-Ley, H., Miller, F.G. and Ramey, H.J. Jr.: “Unsteady State Pressure Distribution Creating By a Directionally Drilled Well”. JPT 27 (1975). 11.
22. Karakas, M. and Tariq, S.M.: “Semianalytical Productivity Models for Perforated Completions”. SPEPE 6 (1991). 1
23. Hawkins, M.F.: “A Note on the Skin Effect”. Trans AIME (1956). 207, 356-357
24. Hurst, W.: “Establishment of the Skin Effect and its Impediment to Fluid Flow into a Well-Bore”. Pet. Eng. (Oct. 1953). B-6 to B-16.
25. Raghavan, R.: *Well Test Analysis*. Prentice Hall (1993). Cap. 4
26. Matthews, C.S., Brons, F. and Hazebroek, P.: “A Method for the Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir”. Trans. AIME (1954). 201: 182-191.
27. Valencia, R.T.: *Fundamentos de Pruebas de Presión*. EPN (2011). Cap. 8.
28. Escobar, F.H.: *Análisis Moderno de Pruebas de Presión*. Segunda Edición. Editorial Universidad Surcolombiana (2009). Caps. 1 y 3.
29. Bourdarot, G.: *Well Testing: Interpretation Methods*. Editions Technip and Institut Francais du Pétrole (1998). Cap. 3.

CAPITULO V

INTRODUCCION A PRUEBA DE POZOS

Este Capítulo abarca las pruebas de flujo o de declinación de la presión, a manera de una introducción al análisis de pruebas de presión¹ y a la aplicación de las soluciones de la ecuación de difusividad presentadas en anteriores capítulos. También se cubre el concepto de radio de investigación, la aplicación del principio de superposición en problemas de pruebas de pozos de tasa variable, el fenómeno de almacenamiento de pozo que en los tiempos tempranos de la prueba interfiere en los datos de presión que dan cuenta de flujo radial transitorio-IARF, las curvas tipo y la integración de los efectos de almacenamiento y el de piel o daño en las curvas tipo. El análisis de pruebas de presión en pozos es tratado en otros apuntes, en preparación.

5.1 PRUEBAS DE DECLINACIÓN DE PRESIÓN (DRAWDOWN).

En pruebas de declinación de la presión o de flujo (drawdown) en un pozo, generalmente al inicio el yacimiento está a presión uniforme (la misma presión a cualquier radio del pozo) y, por lo tanto, el pozo a ser probado está cerrado. El pozo es entonces abierto a producción, idealmente a tasa constante y, la respuesta del yacimiento respecto al decaimiento o descenso de la presión resultante al fondo del pozo es medido contra tiempo a medida que avanza la producción a tasa constante. La duración de la prueba depende de las especificaciones de diseño, las mismas que varían según las características dinámicas del sistema pozo/yacimiento que interesa conocer y medir. Los datos de presión son analizados siguiendo un proceso de solución inversa. Conocemos los datos de entrada y de salida del problema y con estos buscamos las características que se ajusten a estos datos mediante la selección adecuada del modelo matemático del sistema bajo estudio.

La ecuación de flujo en un medio homogéneo e isotrópico, de estado transitorio o flujo radial de actuación infinita-IARF (iniciales del Inglés: “Infinite Acting Radial Flow”) que modela el comportamiento de la presión de flujo al pozo contra tiempo, tratada en el capítulo 4, es

$$p_{wf \text{ actual}}(t) = p_i - \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \left[\log t + \log \left(\frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2} \right) - 3.23 + 0.87S \right] \quad \text{Ec. 5.1}$$

La ecuación 5.1 demuestra que un gráfico de p_{wf} vs. $\log t$ será una recta con una pendiente negativa dada por:

$$|m| = 162.6 \frac{q\beta\mu}{kh} \quad \text{Ec. 5.2}$$

la cual puede ser usada para calcular $\frac{kh}{\mu}$ (transmisibilidad) o, k (permeabilidad) si h y μ son conocidas:

$$k = 162.6 \frac{q\beta\mu}{k|m|} \quad \text{Ec 5.3}$$

La ecuación 5.1 puede ser arreglada para resolver por el factor de piel como:

$$S = 1.151 \left(\frac{p_i - p_{wf}(t)}{|m|} - \log \left(\frac{kt}{\phi\mu c_t r_w^2} \right) + 3.23 \right) \quad \text{Ec. 5.4}$$

Para calcular el factor de piel usando la ecuación 5.4, p_{wf} es escogida en el gráfico de una prueba de drawdown sobre la *línea recta semilog o su extrapolación*, cuyo valor puede ser muy diferente a la presión de flujo registrada (medida en la prueba de pozo) al tiempo t.

Es costumbre escoger p_{wf} a $t = 1$ hora (ver Fig. 4.3) para calcular el factor de piel. Con esta selección, la ecuación 5.4 queda de la siguiente manera:

$$S = 1.1513 \left(\frac{p_i - p_{wf}(1\text{hora})}{|m|} - \log \left(\frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2} \right) + 3.23 \right) \quad \text{Ec. 5.5}$$

La ecuación 5.4 ó 5.5 puede usarse para calcular el factor de piel total, *ya que el signo del factor de piel total provee información muy útil*². Es importante que las ecuaciones sean correctamente aplicadas para obtener el signo correcto del factor de piel. El signo del factor de piel es controlado ampliamente por el primer término del paréntesis recto del lado derecho de la ecuación 5.4. El error común cometido usualmente en la evaluación del primer término está en la falla de no usar $p_{wf}(1 \text{ hora})$ de la recta semilog en la ecuación 5.5 y en la falla de no usar el signo correcto de la pendiente de la recta semilog. El término $\log \left(\frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2} \right)$ en las ecuaciones 5.4 o 5.5 típicamente varía desde

6 hasta 10 en la mayoría de situaciones de prueba de pozos^{2,3}

Si S es positivo indica que existe daño alrededor del pozo. Si S es negativo significa un daño negativo, esto es, hay estimulación, la permeabilidad cerca del pozo ha sido mejorada. Si S es cero, no habría zona dañada ni estimulada. Sin embargo, debe enfatizarse que un factor de piel positivo no necesariamente indica que exista un daño a la formación. Antes de proceder con un diagnóstico final de daño físico, debe analizarse la incidencia de otros factores en el factor de piel total, tales como completación parcial, disparos, pozo desviado y otros^{4,5}.

La cantidad de presión adicional al pozo debido al efecto de piel es dado por cualquiera de las siguientes tres ecuaciones:

$$\Delta p_{skin} = \frac{141.2q\beta\mu}{kh} S \quad \text{Ec. 5.6}$$

$$\Delta p_{skin} = \frac{162.6q\beta\mu}{kh} \times 0.87S \quad \text{Ec. 5.7}$$

$$\Delta p_{skin} = 0.87|m|S \quad \text{Ec. 5.8}$$

Donde m es la pendiente de la recta semilog (por ejemplo: -7), tomado su valor absoluto, 7. Para un pozo con un factor de piel positivo, el cambio de presión es positivo mientras que para un pozo con un factor de piel negativo, el cambio de presión es negativo.

En el problema 5.1 se presenta un procedimiento general de análisis de datos de presión de una prueba de declinación de presión o prueba de “drawdown”.

Problema 5.1

Análisis semilog de prueba de Drawdown. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para analizar una prueba de drawdown a tasa constante usando un análisis semilog.

Dadas las propiedades del reservorio y del fluido, analice los datos de presión de la prueba de drawdown en la Tabla 5.1

Datos:

$$\text{Caudal de producción, } q = 125 \text{ STB/día}$$

$$\text{Factor Volumétrico de reservorio} = 1.152 \text{ bbl/STB}$$

de formación del petróleo, β_o

Espesor neto de formación, h	=	32 ft
Viscosidad del petróleo, μ	=	2.122 cp
Radio de pozo, r_w	=	0,25 ft
Porosidad, ϕ	=	22 %
Presión inicial del yacimiento, P_i	=	2.750 psi
Compresibilidad, C_t	=	$10.9 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1}$

Tabla 5.1: Datos para el análisis semilog para prueba de drawdown.

<u>t (hr)</u>	<u>P_{wf}(psia)</u>						
0.0010	2748.95	0.0869	2655.67	0.993	2196.92	10.545	1995.75
0.0021	2745.62	0.0988	2642.29	1.118	2170.70	11.865	1991.15
0.0034	2744.63	0.1121	2627.50	1.259	2148.33	13.349	1988.67
0.0048	2745.49	0.1271	2614.76	1.417	2126.44	15.018	1984.74
0.0064	2741.70	0.1440	2598.79	1.595	2108.50	16.897	1979.34
0.0082	2742.00	0.1630	2582.16	1.795	2090.87	19.010	1981.14
0.0102	2736.69	0.1844	2564.54	2.021	2080.73	21.387	1973.78
0.0125	2737.26	0.208	2545.27	2.275	2066.59	24.061	1970.58
0.0151	2733.72	0.236	2523.21	2.560	2054.29	27.070	1967.59
0.0180	2729.13	0.266	2501.07	2.881	2048.25	30.455	1965.50
0.0212	2724.23	0.300	2475.93	3.242	2039.49	34.262	1961.64
0.0249	2720.57	0.339	2451.83	3.648	2035.32	38.546	1957.61
0.0290	2715.83	0.382	2422.80	4.105	2029.91	43.366	1955.90
0.0336	2710.70	0.431	2397.61	4.619	2025.01	48.787	1951.21
0.0388	2706.63	0.486	2367.50	5.198	2018.87	54.787	1949.05
0.0447	2698.17	0.547	2338.18	5.848	2016.40	60.787	1945.70
0.0512	2692.75	0.617	2309.21	6.580	2011.11	66.787	1942.51
0.0587	2684.56	0.695	2277.84	7.404	2007.46	72.000	1941.14
0.0670	2676.82	0.783	2251.46	8.331	2003.24		
0.0764	2665.33	0.882	2222.09	9.373	2000.53		

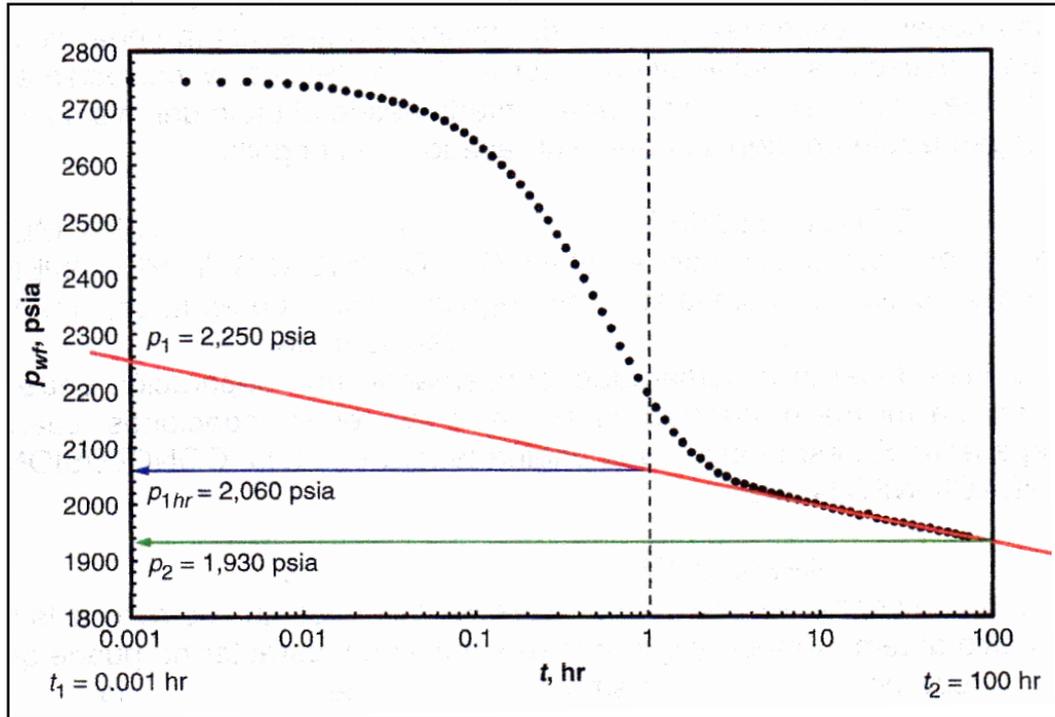


Figura 5.1: Análisis semilog de la prueba drawdown del problema 5.1.

Desarrollo:

Seguimos el procedimiento recomendado para el análisis.

- 1.- Representación gráfica de la presión de fondo del pozo que fluye, P_{wf} frente al tiempo de prueba, t , en una escala semilog, fig. 5.1
- 2.- Identificar los datos del periodo de flujo radial transitorio-IARF. Los primeros datos parecen estar distorsionados por el almacenamiento del pozo. Los datos hacia el final de la prueba parecen caer en una línea recta, por lo que seleccionamos estos datos para el análisis.
- 3.- Dibuje una línea recta a través de los datos seleccionados, y encuentre la pendiente m e intercepte P_{1hr} . Leyendo dos puntos en la recta (tan alejados como sea posible para la exactitud), encontramos la pendiente m para ser

$$m = \frac{2.250 - 1.930}{\log(0.001) - \log(100)}$$

$$m = \frac{320}{-3 - 2} = -64 \text{ psi/cycle.}$$

Leemos la intercepción P_{1hr} de la extrapolación de la recta en un tiempo de 1 hora como 2,060 psia.

- 4.- Calcular la permeabilidad k de la pendiente m usando la siguiente ecuación

$$k = \frac{162.6 q \beta \mu}{|m| h}$$

$$k = \frac{(162.6)(125)(1.152)(2.122)}{(64)(32)}$$

$$k = 24.3 \text{ md.}$$

Note que la permeabilidad se escribe convencionalmente con el valor absoluto de la pendiente. Para una prueba de drawdown, la pendiente m debe ser siempre negativa del grafico semilog.

5.- Calcular el factor de la piel s desde la pendiente m y la intersección P_{1hr} .

$$s = 1.151 \left\{ \frac{P_i - P_{1hr}}{|m|} - \log \left(\frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) + 3.23 \right\}$$

$$s = 1.151 \left\{ \frac{(2750) - (2060)}{(64)} - \log \left(\frac{24.26}{(0.22)(2.122)(10.9 \times 10^{-6})(0.25)^2} \right) + 3.23 \right\}$$

$$s = 7.06$$

5.2. RADIO DE INVESTIGACIÓN

El radio de investigación es uno de los más útiles, pero menos comprendido, conceptos en la interpretación de prueba de pozos. Lee, John, en su libro Well Testing⁶, SPE, 1982, sostiene que el concepto de radio de investigación dentro del diseño y análisis de prueba de pozos tiene una importancia tanto cuantitativa y como cualitativa. El radio de investigación, r_i , se interpreta como la distancia a la que se ha “movido” el transiente dentro de la formación debido a un cambio de tasa del pozo en prueba. Esta distancia está relacionada con las propiedades de la formación (roca y fluidos) y el tiempo que transcurre desde el cambio de tasa. Una de las expresiones más usadas para el radio de investigación es:

$$\left[r_i = \left(\frac{kt}{948\phi\mu c_t} \right)^{1/2} \right] \quad \text{Ec. 5.9}$$

Debe notarse que el radio de investigación es independiente de la tasa de flujo y las expresiones matemáticas disponibles para su cálculo son simples aproximaciones⁷.

Antes de desarrollar una interpretación cuantitativa del cálculo de r_i , es conveniente examinar la distribución de presión para un incremento constante de tiempo que permita desarrollar la propagación del transiente dentro de la formación. La figura 5.2 muestra la presión como una función del radio para 0.1, 1.0, 10 y 100 horas después que un pozo inicia la producción desde una formación originalmente a 2000 psi. Esta distribución de presión fue calculada usando la solución función- E_i de la ecuación de difusividad para un pozo y una formación con estas características:

$q = 177$ stb/d	$\mu = 1$ cp	$\beta = 1.2$ rb/stb
$k = 10$ md	$h = 150$ ft	$\phi = 0.15$
$c_t = 70.3 \times 10^{-6}$ psi ⁻¹	$r_e = 3000$ ft	$r_w = 0.1$ ft
$S = 0$		

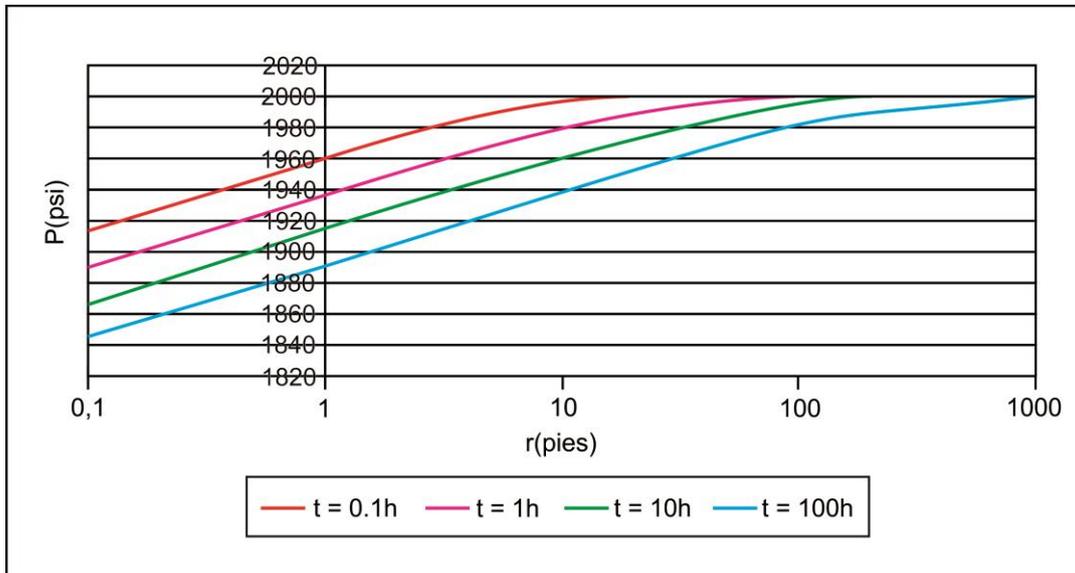


Fig. 5.2: Distribución cualitativa de presión dentro de la formación cerca de un pozo productor. Los valores de este gráfico pueden diferir con los calculados con ecuación 5.9

De la figura 5.2, dos observaciones son importantes:

1. La presión al pozo o wellbore ($r = r_w$) decrece uniformemente con el incremento del tiempo; así mismo, la presión a otros valores aleatorios de r también decrecen con el incremento del tiempo.
2. La perturbación de la presión (o transiente de presión) causada por la producción del pozo se mueve más lejos dentro del reservorio con el incremento del tiempo. Para el rango de tiempo mostrado, siempre hay un intervalo de caída de presión que es despreciable, que se encuentra al final (parte superior) de cada curva.

Ahora consideremos un pozo dentro del cual se inyecta instantáneamente un volumen de líquido. Esta inyección introduce una perturbación de presión dentro de la formación. El disturbio (máxima caída de presión, (Δp) al radio r_i debe alcanzar su máximo $(\frac{\delta p}{\delta t} = 0)$ al tiempo t_m después de la introducción del volumen de fluido. Debemos hallar una relación entre r_i y t_m .

Partiendo de la solución de la ecuación de difusividad para una *línea fuente instantánea* en un medio infinito⁶,

$$p(r,t) - p_i = \frac{c_1}{t} e^{-r^2/4\eta t} \quad , \quad \text{Ec 5.10}$$

$$\eta = \frac{k}{948\phi\mu c_t}$$

donde c_1 es una constante, relacionada a la *línea fuente instantánea*, hallo el tiempo, t_m , al cual el disturbio de presión es el máximo a r_i , diferenciando e igualando a cero, tenemos:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-c_1}{t^2} e^{-r^2/4\eta t} + \frac{c_1 r^2}{4\eta t^3} e^{-r^2/4\eta t} = 0, \quad \text{Ec 5.11}$$

$$\frac{c_1}{t^2} \left(-e^{-r^2/4\eta t} + \frac{r^2}{4\eta t} e^{-r^2/4\eta t} \right) = 0,$$

Así,

$$t_m = r_i^2 / 4\eta = 948\phi\mu c_t r_i^2 / k \quad , \quad \text{Ec. 5.12}$$

Dicho de otra manera, al tiempo t , una perturbación de presión alcanza la distancia r_i , que es el llamado radio de investigación, obtenido por la ecuación,

$$r_i = \left(\frac{kt}{948\phi\mu c_t} \right)^{1/2} \quad \text{Ec.5.9}$$

Tomando como ejemplo el problema 5.1, el radio de investigación al inicio del análisis de 6 horas y al final del mismo a las 72 horas es calculado como sigue:

Empleando la ecuación 5.9, al comienzo de la línea recta a $t = 6 \text{ horas}$,

$$r_i = \sqrt{\frac{(24.3)(6)}{(948)(0.22)(2.122)(10.9 \times 10^{-6})}} = 174 \text{ pies}$$

A 72 horas,

$$r_i = \sqrt{\frac{(24.3)(72)}{(948)(0.22)(2.122)(10.9 \times 10^{-6})}} = 603 \text{ pies}$$

Esto implica que la permeabilidad encontrada sería representativa del yacimiento en este rango de radios del yacimiento (429 pies).

El radio de investigación obtenido por la ecuación 5.9 también nos proporciona la distancia hasta la cual se difunde una perturbación significativa de presión como consecuencia de la producción o de la inyección a una tasa constante. Por ejemplo, para la formación con la distribución de presión mostrada en la figura 5.2, la aplicación de la ec. 5.9 produce los siguientes resultados.

t(hr)	r _i (ft)
0.1	32
1.0	100
10.0	316
100.0	1000

Comparando estos resultados con la distribución de presión del gráfico, se observa que r_i, calculado con la ecuación 5.9 está cerca del punto al cual la caída de presión en el yacimiento causada por la producción al pozo es despreciable.

La ecuación 5.9 es usada para calcular el radio de investigación logrado a un tiempo dado después de un cambio de tasa del pozo. Esto es importante porque la distancia que el transiente se ha movido dentro de la formación es aproximadamente la distancia desde el pozo a la cual las propiedades de la formación están siendo investigadas a un tiempo dado por una prueba de pozo.

El radio de investigación tiene grandes usos en el análisis y diseño de una prueba de presión en estado de flujo transiente. Un uso cualitativo es que ayuda a interpretar la forma de las curvas de restauración de presión (buildup) y de caída de presión (drawdown). Por ejemplo, en una curva de restauración se puede tener dificultades para interpretar la forma o pendiente a tiempos tempranos cuando el radio de investigación se encuentra dentro de la zona de permeabilidad dañada, k_s, cerca al pozo. O, más comúnmente, una curva de restauración de presión puede cambiar de forma a tiempos largos cuando el radio de investigación alcanza las vecindades de las fronteras del reservorio (semejante a una falla impermeable) o a alguna heterogeneidad masiva de la formación. *En la práctica*, encontramos que una heterogeneidad o frontera influencia la

respuesta de presión de un pozo cuando el radio de investigación calculado es del orden **del doble de la distancia** a las heterogeneidades⁷.

El concepto de radio de investigación proporciona una guía para el diseño de prueba de pozos. Por ejemplo, si quisiéramos una muestra sobre las propiedades del reservorio a por lo menos 500 pies de un pozo en prueba. ¿Cuánto debería durar la prueba? ¿Seis horas? ¿24 horas? No estamos forzados a adivinar o a correr la prueba por una longitud arbitraria del tiempo que puede ser muy corto o muy largo. Podemos usar el concepto del radio de investigación para estimar el tiempo de prueba que se requiere para alcanzar la profundidad deseada dentro de la formación.

La ecuación de radio de investigación además suministra un medio para estimar la longitud del tiempo requerido para lograr la “estabilización”. Por ejemplo, para un pozo centrado en un área de drenaje cilíndrica de radio r_e , entonces, cambiando $r_i = r_e$, el tiempo requerido para la estabilización, t_s , es decir la terminación del flujo transitorio, es hallado así,

$$t_s = \frac{948\phi\mu c_t r_e^2}{k} \quad \text{Ec. 5.13}$$

No es coincidencia que este sea el tiempo al cual comienza el flujo de estado pseudo-continuo, en yacimientos cerrados, pozo en el centro de una área de drenaje circular. Debe tenerse en cuenta que para otras formas del área de drenaje y posición del pozo en esta, el tiempo de estabilización puede ser bien diferente.

El concepto de radio de investigación es muy útil, pero el lector debe estar prevenido de que r_i no es una panacea. Primero, se debe notar que es exactamente correcto solo para un reservorio cilíndrico homogéneo e isotrópico; en un reservorio heterogéneo debe decrecer la exactitud de la ecuación 5.9.

Adicionalmente, la ecuación 5.9 es exacta solo para describir el tiempo en que la máxima perturbación de presión llega a r_i cuando se realiza una inyección instantánea o producción dentro de un pozo. La localización exacta del radio de investigación viene a ser menos definida para una inyección continua o producción a tasa constante a continuación de un cambio de tasa.

Problema 5.2

Cálculo del Radio de Investigación. *Deseamos conducir una prueba de flujo en un pozo exploratorio por un tiempo suficientemente largo para asegurarnos que el pozo drene un cilindro de más de 1000 pies de radio. Un análisis preliminar de datos de*

fluidos y pozo sugiere que $k=100md$, $\phi=0.20$, $C_i=2\times 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$ y $\mu=0.5 \text{ cp}$.
 ¿Cuánto tiempo es aconsejable para la prueba? ¿Qué tasa de flujo usted sugiere?

Solución.- La duración mínima de la prueba de flujo debe permitir una difusividad del transiente de presión de 2000 pies desde el pozo (doble del radio de investigación mínimo). El tiempo requerido es.

$$t = \frac{948 \phi \mu C_i r_i^2}{k}$$

$$t = \frac{948(0.20)(0.5 \text{ cp})(2 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1})(2000)^2}{100md}$$

$$t = 75,8 \text{ horas}$$

Puede notarse que este tiempo es 4 veces mayor que el tiempo en arribar el transiente de presión a la distancia de 1000 pies. Esto resulta de suponer que hay una falla o heterogeneidad a 1000 pies y que toma 75,8 horas para que podamos darnos cuenta por el comportamiento de la presión en el pozo productor⁷

En principio cualquier tasa de flujo será satisfactoria ya que el tiempo requerido para lograr un radio de investigación particular es independiente de la tasa de flujo. En la práctica, se necesita una tasa de flujo suficientemente grande de suerte que el cambio de presión con el tiempo pueda ser registrado con suficiente precisión de modo de ser útil para análisis. Que constituye precisión suficiente depende del medidor de precisión particular en la presión.

5.3. PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

La solución más útil para la ecuación de flujo parece ser la solución función- E_i , que se describe como aplicable solamente para la distribución de presión en un yacimiento que actúa como infinito y para un pozo que inicia su producción a una cierta tasa a un tiempo cero y la mantiene constante en el tiempo. Veremos cómo con el principio de superposición podemos omitir estas restricciones y simplificar el cálculo modelando el comportamiento de un pozo que produce a tasas variables. Este enfoque del problema hace posible crear funciones que respondan a yacimientos con situaciones complejas, usando solamente modelos básicos simples^{8,9}

También se aplicará este principio para el caso de varios pozos produciendo dentro de un mismo yacimiento. Incluso si algunos de estos produjeran a varias tasas.

Para nuestro propósito plantearemos el principio de superposición de la siguiente manera: La caída total de presión en cualquier punto en un yacimiento es la suma de las caídas de presiones a ese punto causado por la respuesta individual de los pozos en el yacimiento.

Hay tener en cuenta que la aplicación del principio de superposición solo es posible para sistemas lineales (en el sentido matemático); sin embargo, estos incluyen la mayoría de las funciones estándares de respuestas de flujo usadas en el análisis de prueba de pozos, tales como soluciones para el flujo radial a tasa constante, doble porosidad, pozo fracturado y pozo con fronteras⁸.

Empezaremos modelando la producción de varios pozos en un mismo yacimiento, de lo cual se derivará la aplicación del principio para pozos que producen a tasa variable.

1. Superposición en espacio

La ilustración más simple de este principio es el caso de más de un pozo en un yacimiento infinito. Para mostrar el principio de superposición consideraremos tres pozos, los pozos A, B y C, que empiezan a producir al mismo tiempo desde un yacimiento infinito. La aplicación del principio de superposición dice que:

$$\Delta p_i = \Delta p_A + \Delta p_B + \Delta p_C \quad \text{Ec. 5.14}$$

Para conocer la caída de presión total en el pozo A, tenemos,

$$\begin{aligned} (p_i - p_{wf})_{\text{total en el pozo A}} = & (p_i - p)_{\text{caída al pozo A ocasionada por la}} \\ & \text{producción en el propio pozo A.} \\ & + (p_i - p)_{\text{caída al pozo A ocasionada por la}} \\ & \text{producción en el pozo B.} \\ & + (p_i - p)_{\text{caída al pozo A ocasionada por la}} \\ & \text{producción en el pozo C.} \end{aligned}$$

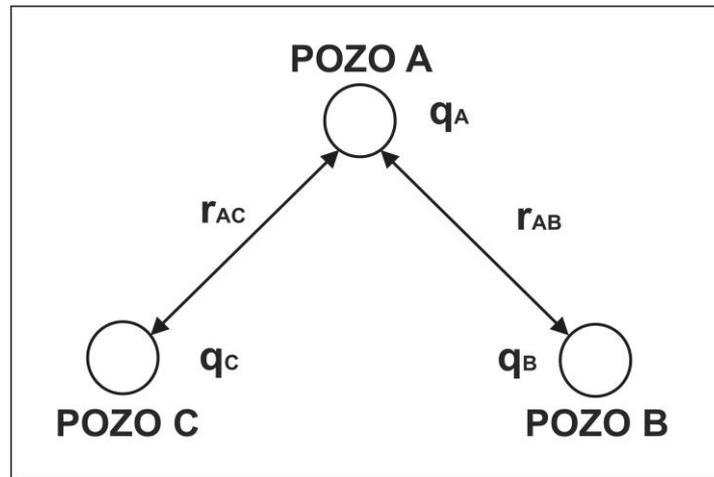


Fig. 5.3. Sistema de múltiples pozos en un yacimiento infinito

En términos de la función-E_i y aproximación logarítmica, tenemos:

$$(p_i - p_{wf})_{\text{total en el pozo A}} = -70.6 \frac{q_A \beta \mu}{kh} \left[\ln \left(\frac{1688 \phi \mu c_t r_{wA}^2}{kt} \right) - 2S_A \right] - 70.6 \frac{q_B \beta \mu}{kh} Ei \left(\frac{-948 \phi \mu c_t r_{AB}^2}{kt} \right) - 70.6 \frac{q_C \beta \mu}{kh} Ei \left(\frac{-948 \phi \mu c_t r_{AC}^2}{kt} \right) \text{ Ec. 5.15}$$

Donde q_A se refiere a la tasa a la cual produce el pozo A; q_B, al pozo B y q_C al pozo C. En la ecuación de arriba hemos escrito para el propio pozo A la ecuación en términos del logaritmo porque se trata de la solución al mismo pozo; y, para los pozos B y C, en términos de E_i porque estamos buscando, para esos pozos, sus efectos distantes, es decir, a un punto “A”, separado r_{AB} y r_{AC} de los pozos B y C, respectivamente.

Note que para la caída de presión de A en A, se incluye el factor de daño del pozo A. Esto obedece a que estamos modelando también la caída de presión dentro de la zona de permeabilidad cercana al pozo A. No así las caídas en A dados por los otros pozos distantes a A. La existencia del factor de daño diferente a cero para los pozos B y C afecta solamente a la presión dentro de su zona de permeabilidad alterada y no tiene influencia sobre la presión en el pozo A.

Usando este método, podemos analizar simultáneamente algunos pozos fluyentes, a tasa constante, en un yacimiento que actúa como infinito. Así, podemos modelar las llamadas pruebas de interferencia, las cuales básicamente son diseñadas para determinar las propiedades del yacimiento a través de la respuesta de presión obtenida en un pozo dado, generalmente de observación (tal como el pozo A) a la producción que ocurre en uno o más pozos (tal como los pozos B y C) dentro de un mismo yacimiento.

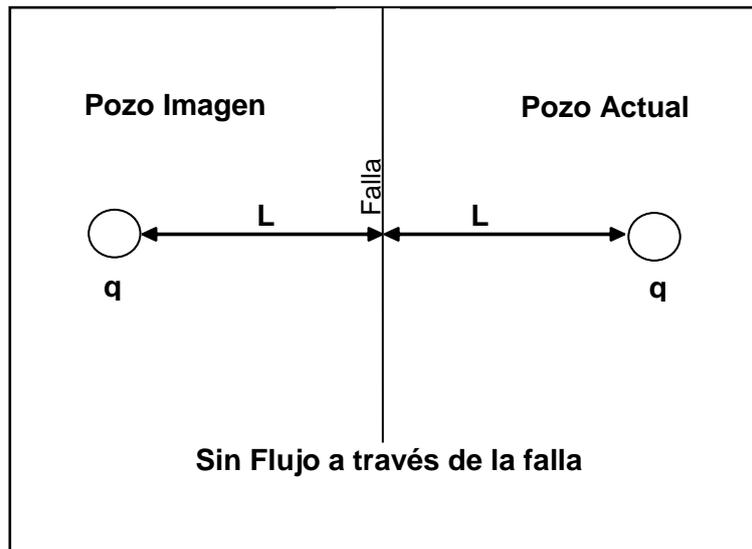


Fig. 5.4: Método de imágenes

El principio de superposición sirve también para simular el comportamiento de presión en yacimientos con fronteras. Para esta explicación vamos a considerar el pozo actual de la figura 5.4, que se encuentra a una distancia L de una falla impermeable.

Matemáticamente, este problema es idéntico al problema de un pozo a una distancia 2L de un pozo “imagen”, es decir, un pozo que tiene la misma historia de producción que el pozo actual. La razón de que este sistema de dos pozos simule el comportamiento de un pozo cercano a un límite, es que se puede demostrar que una línea equidistante entre los dos pozos puede representar a un límite sin flujo. A lo largo de esta línea el gradiente de presión hacia los pozos es cero, lo que significa que no puede haber flujo que la atraviese. Así, este es un problema simple de dos pozos en un yacimiento infinito en el que se quiere conocer la caída de presión en el pozo real dada por el propio pozo y por el pozo imagen el cual se encuentra a una distancia de 2L:

$$(p_i - p_{wf}) = -70.6 \frac{q \beta \mu}{kh} \left[\ln \left(\frac{1688 \phi \mu c_i r_w^2}{kt} \right) - 2S \right] - 70.6 \frac{q \beta \mu}{kh} E_i \left(\frac{-948 \phi \mu c_i (2L)^2}{kt} \right)$$

Ec. 5.16

Aquí también se puede notar que a pesar de que el pozo imagen tiene un factor de daño igual al pozo real, resulta intrascendente, ya que no tiene influencia en la caída de presión en el pozo real distante 2L. Sola la tendría al calcular la caída de presión en sí mismo, que no es el caso. Recordar que en el modelo de la caída de presión adicional,

Δp_s , el factor de daño se concentra en un espacio infinitesimal de la pared del pozo, de ahí el otro nombre: efecto de piel.

Esta técnica puede ser usada también para modelar otros casos, como por ejemplo:

- Distribución de presión para un pozo entre dos límites que se intersectan a 90°.
- El comportamiento de presión de un pozo entre dos límites paralelos.
- El comportamiento de presión para pozos en varias locaciones completamente rodeado por límites sin flujo en yacimientos con forma rectangular.

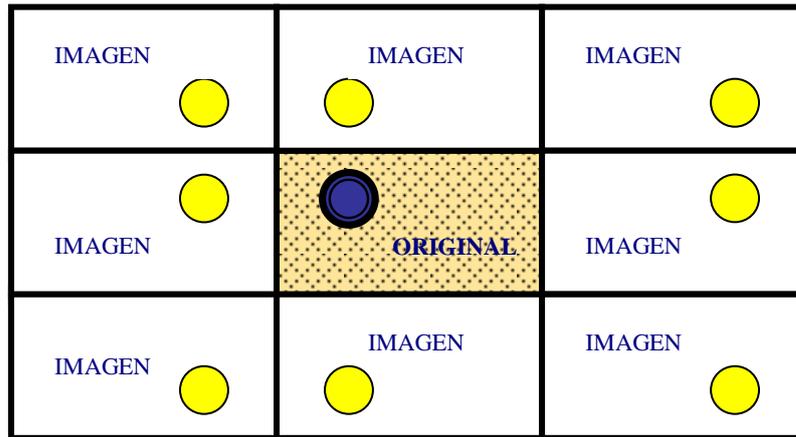


Fig. 5.5: Pozos imágenes de uno real rodeado por fronteras

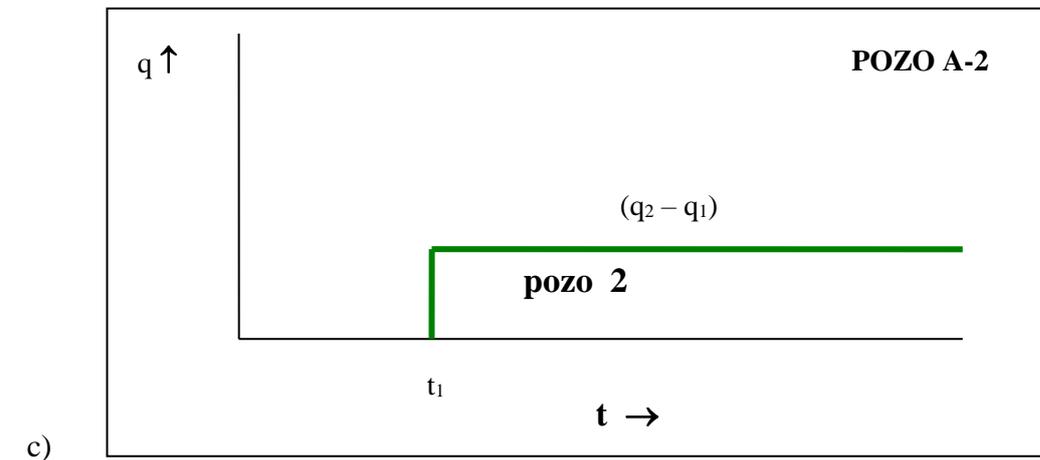
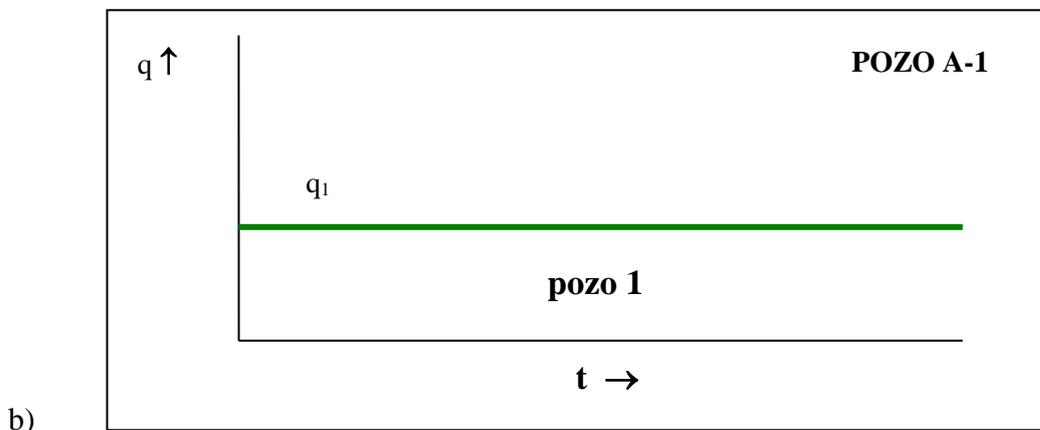
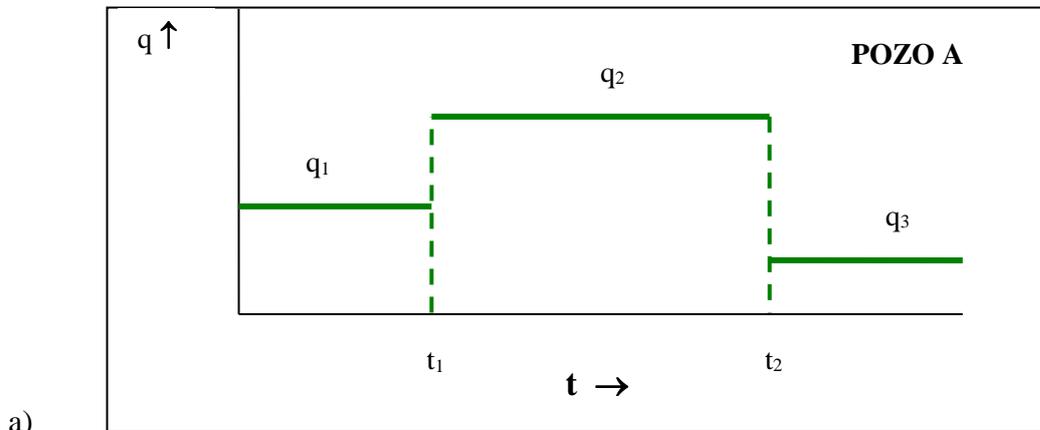
Este último caso ha sido estudiado completamente por Matthews, Brons y Hazebroek¹⁰ y es uno de los métodos más frecuentemente usados para estimar la presión promedio del área de drenaje a partir de las pruebas de restauración de presión.

2. Superposición en tiempo

La última y más importante aplicación del principio de superposición es modelar pozos produciendo con tasas variables.

Para ilustrar esta aplicación, consideraremos el caso en el cual un pozo produce a tasa q_1 desde un tiempo 0 hasta un tiempo t_1 ; en t_1 , la tasa es cambiada a q_2 ; y en t_2 , la tasa es cambiada a q_3 , tal como se muestra en la figura 5.6, a). Lo que deseamos conocer es cuál es la presión a la cara de la arena del pozo, para tiempos $t > t_2$. Para resolver este problema, usaremos el principio de superposición en espacio como antes lo hicimos. Habiendo tres tasas diferentes de flujo, asumimos que hay 3 pozos, figura 5.6 b), c) y d), en la misma locación y cada pozo tiene su propia tasa que inicia su producción a diferentes tiempos. Cada pozo, en la misma posición en el yacimiento, contribuye a la

caída de presión total del pozo real. El efecto de la suma de la respuesta de cada uno de los tres pozos representara al pozo real con tres tasas, cada uno de ellas constante.



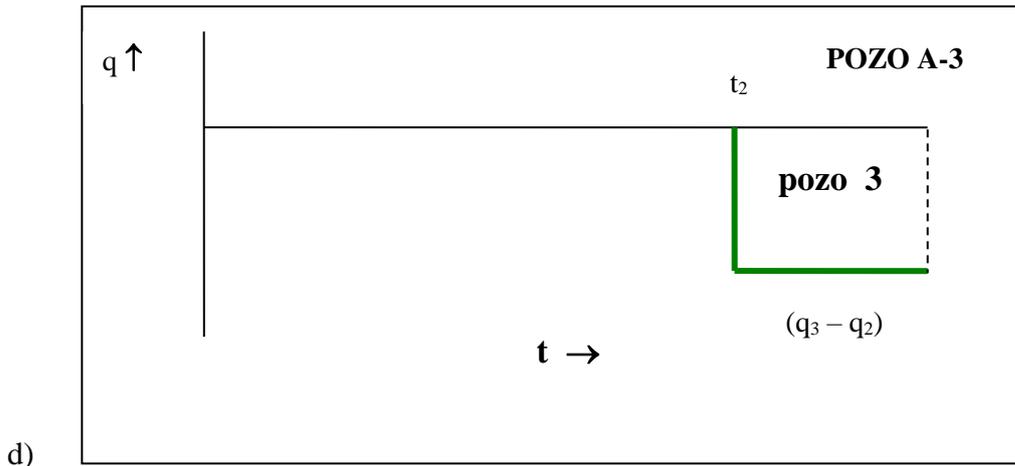


Fig. 5.6: Pozos produciendo con tasas variables

$$\Delta P_t = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3$$

La primera contribución a la caída de presión del pozo real es la del pozo produciendo a una tasa \$q_1\$ que empieza a fluir a un tiempo \$t = 0\$. Este pozo, en general, estará dentro de la zona de permeabilidad alterada; así, su contribución a la caída de presión del yacimiento es:

$$(\Delta p)_1 = (p_i - p_{wf})_1 = -70.6 \frac{q_1 \beta \mu}{kh} \left[\ln \left(\frac{1688 \phi \mu c_t r_w^2}{kt} \right) - 2S \right] \quad \text{Ec. 5.17}$$

Nótese que este primer pozo no sólo produce por tiempo \$t_1\$ sino por todo el tiempo \$t > t_1\$. Empezando a un tiempo \$t_1\$, la nueva tasa total real es \$q_2\$. Introduciremos ficticiamente un pozo 2, produciendo a una tasa \$(q_2 - q_1)\$ empezando a un tiempo \$t_1\$, así que la tasa total real después de \$t_1\$ es la requerida \$q_2 = q_1 + (q_2 - q_1)\$. Note que el tiempo total que produce este segundo pozo ficticio es \$(t - t_1)\$; note además que este pozo está todavía dentro de la zona de permeabilidad alterada.

Así, la contribución del pozo 2 ficticio a la caída de presión del yacimiento es (primer cambio de tasa):

$$(\Delta p)_2 = (p_i - p_{wf})_2 = -70.6 \frac{\mu(q_2 - q_1) \beta}{kh} \left\{ \ln \left[\frac{1688 \phi \mu c_t r_w^2}{k(t - t_1)} \right] - 2S \right\} \quad \text{Ec.5.18}$$

Similarmente, la contribución del tercer pozo ficticio es (segundo cambio de tasa):

$$(\Delta p)_3 = (p_i - p_{wf})_3 = -70.6 \frac{\mu(q_3 - q_2) \beta}{kh} \left\{ \ln \left[\frac{1688 \phi \mu c_t r_w^2}{k(t - t_2)} \right] - 2S \right\} \quad \text{Ec. 5.19}$$

Así, la caída total para el pozo real con dos cambios en la tasa es:

$$\begin{aligned}
 p_i - p_{wf} &= \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 \\
 p_i - p_{wf} &= -70.6 \frac{q_1 \beta \mu}{kh} \left[\ln \left(\frac{1688 \phi \mu c_t r_w^2}{kt} \right) - 2S \right] \\
 &\quad - 70.6 \frac{\mu(q_2 - q_1) \beta}{kh} \left\{ \ln \left[\frac{1688 \phi \mu c_t r_w^2}{k(t - t_1)} \right] - 2S \right\} \\
 &\quad - 70.6 \frac{\mu(q_3 - q_2) \beta}{kh} \left\{ \ln \left[\frac{1688 \phi \mu c_t r_w^2}{k(t - t_2)} \right] - 2S \right\} \dots
 \end{aligned} \tag{Ec. 5.20}$$

Procediendo de manera similar, podemos modelar un pozo actual con docenas de cambios en su historia; podemos también modelar la historia de tasas para un pozo con tasa continuamente variable (con una secuencia de períodos de tasa constante a una tasa promedio durante el período) pero, muchos casos resultan en una larga ecuación, tediosa para cálculo manual. Note, sin embargo, que tal procedimiento sólo es válido si la ecuación 4.4 ó 4.68 es válida para el tiempo total transcurrido desde que el pozo empezó a fluir en su tasa inicial- es decir, que para el tiempo $t > t_2$, r_i debe ser menor ó igual a r_e de modo que el yacimiento actúa como si fuera infinito.

5.4. ALMACENAMIENTO DE POZO (WELLBORE STORAGE) O EFECTO DE LLENE^{2,11,12}

Las soluciones a tasa constante al pozo de la ecuación de difusividad para el sistema ideal asumieron que la tasa de producción al pozo fue cambiada instantáneamente de cero a q . Esto fue matemáticamente conveniente, sin embargo resulta físicamente irreal. Conocemos que cuando la tasa de producción de un pozo es cambiada girando una válvula en superficie, se requiere un cierto tiempo para que el cambio de tasa sea transmitido a la formación.

Supongamos que:

q = tasa de producción en superficie, STB/D

$q\beta$ = tasa de producción en superficie referida al fondo del pozo.

β = Factor volumétrico de Formación del petróleo - FVF, RB/STB

q_{sf} = tasa a la cara de la arena (sandface) proveniente de la formación, RB/D

q_{ws} = tasa (descarga) proveniente del almacenamiento dentro del pozo (wellbore storage), RB/D

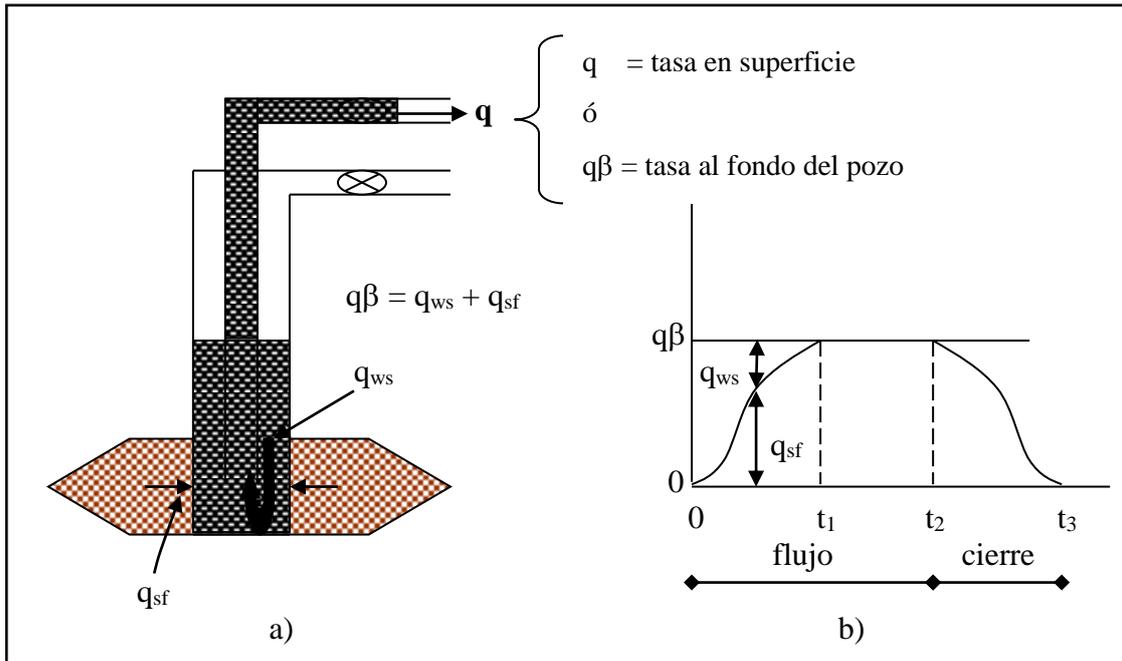


Fig. 5.7: Demostración del efecto de almacenamiento

Por ejemplo, cuando un pozo cerrado es puesto a producir a tasa constante, se requiere un tiempo finito para que la tasa a la cara de la arena, q_{sf} incremente de cero hasta la tasa de superficie referida al fondo, $q\beta$. Similarmente, cuando un pozo en producción es cerrado en superficie, se requiere un tiempo finito para que la tasa a la cara de la arena disminuya desde la tasa previa hasta cero. Este fenómeno, en el que el cambio de tasa a la cara de la arena se retrasa con respecto al cambio de tasa en superficie, ha sido llamado de diversas formas: post-flujo, post-producción, post-inyección, carga del pozo, descarga del pozo, almacenamiento de pozo o efecto de llene. Este fenómeno se debe a la presencia en el pozo de un cierto volumen de fluidos compresibles que se encuentran presurizados. En la figura 5.7 a) y 5.7 b) se ilustra un efecto inicial de descarga cuando el pozo es abierto: se muestra el volumen físico del pozo q_{ws} y la correspondiente variación en la tasa a la cara de la arena, q_{sf} . Toma un cierto tiempo hasta que se igualen q_{sf} y $q\beta$. En la figura 5.7 b) se muestra también el comportamiento de la tasa a la cara de la arena cuando el pozo es cerrado; nótese que mientras el pozo esté produciendo la tasa $q\beta = q_{sf}$. Al detenerse el flujo en superficie por un cierre de válvula, $q=0$, los fluidos del yacimiento continúan entrando al pozo a una tasa q_{sf} por un cierto tiempo hasta paulatinamente hacerse cero, presurizando así los fluidos en el pozo. El tiempo que tome para detenerse esta tasa, depende de las características del almacenamiento pozo.

En las pruebas de pozos, se pone a producir al pozo (prueba de drawdown) a tasa constante y se mide p_{wf} contra tiempo. Estos datos de presión son analizados y graficados. Durante el flujo transiente debe aparecer una línea recta en el gráfico semilog de cuya pendiente obtenemos la permeabilidad y del intercepto con las ordenadas, el factor de piel, S .

Inmediatamente después de un cambio de tasa en superficie (por ejemplo: de 0 a q), la variación inicial de presión al fondo del pozo estará dominada por el efecto de almacenamiento, el cual no ha sido considerado en las soluciones de la ecuación de difusividad para el sistema ideal. En el sistema ideal suponemos que un cambio de tasa en superficie tiene una respuesta inmediata al fondo del pozo de la misma magnitud. En casos severos, la duración del efecto de almacenamiento puede llegar a ser tan larga como para enmascarar al período de flujo transiente temprano, volviendo así a los datos de presión del transiente temprano, inútiles para análisis por métodos convencionales. Para resguardo de interpretaciones erróneas, es necesario que uno pueda detectar la presencia y cuantificar la duración del efecto de almacenamiento en los datos de presión del transiente temprano. Los datos de presión posteriores al tiempo de duración del efecto de almacenamiento serán los útiles para el análisis.

5.5. COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO²

Antes de allanar el procedimiento para el cálculo de la tasa de descarga del pozo, q_{ws} , y establecer la nueva condición de frontera interna de la ecuación de difusividad considerando el almacenamiento de pozo, veamos la definición del coeficiente de almacenamiento:

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{V_i - V(t)}{p_i - p_{wf}(t)} \cdot \frac{RB}{psi} \quad \text{Ec. 5.21}$$

↙
psi de caída de presión

donde:

C = coeficiente de almacenamiento (volumen de descarga o de llene del pozo por cada psi de cambio de presión), RB/psi

ΔV = cambio de volumen del fluido en el pozo, RB

Δp = cambio de presión de fondo, psi

V_i = volumen inicial de fluido en el pozo antes de la descarga, RB

$V(t)$ = variación de volumen en el pozo durante la descarga del fluido, RB

p_i = presión inicial al pozo antes de la descarga, psia

$p_{wf}(t)$ = variación de presión al pozo durante la descarga, psia

Para una caída de presión (drawdown), $\Delta p = p_i - p_{wf}$, también un coeficiente de almacenamiento adimensional es definido en unidades de campo, como puede verse en Ec. 5.33 y Ec. 5.34

$$C_D = \left(\frac{0.8936C}{\phi h c_t r_w^2} \right) \quad \text{Ec 5.22}$$

El coeficiente de almacenamiento adimensional es una medida del grado de severidad del problema de almacenamiento en una prueba de pozo. Entre más grande el coeficiente de almacenamiento, más severo es el problema de almacenamiento en una prueba de pozo.

El coeficiente de almacenamiento puede ser estimado teóricamente para varias configuraciones de pozos. *Para un nivel dinámico ($\uparrow\downarrow$) de fluido en el pozo,*

$$C = \frac{V_u}{0.433\gamma} = \frac{A_{wb}}{\frac{\rho}{144} \times 5.615} = 25.64 \frac{A_{wb}}{\rho_{wb}} \quad \text{Ec. 5.23}$$

donde:

C = coeficiente de almacenamiento, RB/psi

V_u = volumen del pozo por unidad de longitud, B/pie

γ = gravedad específica del fluido en el pozo

0.433γ = gradiente de presión del fluido en el pozo, psi/pie

Debe notarse que el almacenamiento debido a un nivel cambiante de fluido en el pozo generalmente ocurre en un pozo sometido a bombeo y en un pozo de inyección.

Para un pozo que está lleno de un fluido compresible, el coeficiente de almacenamiento viene dado por:

$$C = cV_w \quad \text{Ec. 5.24}$$

donde:

C = coeficiente de almacenamiento del pozo, RB/psi.

V_w = volumen de fluido en el pozo (igual al volumen del pozo ocupado por el fluido), RB.

c = coeficiente de compresibilidad isotérmico del fluido en el pozo, psi^{-1} , $c = \frac{1}{V_w} \frac{\Delta V}{\Delta p}$.

5.6. TASA DE FLUJO DEBIDO AL ALMACENAMIENTO²

La tasa de flujo debido al almacenamiento, q_{ws} , puede ser derivada de ecuación 5.21 como sigue. Asumiendo un coeficiente de almacenamiento constante, la ecuación 5.21 puede arreglarse y diferenciarse con respecto al tiempo para obtener

$$\frac{d[V_i - V(t)]}{dt} = C \frac{d[p_i - p_{wf}(t)]}{dt} \quad \text{Ec. 5.25}$$

o,

$$-\frac{dV(t)}{dt} = -C \frac{dp_{wf}(t)}{dt} \quad \text{Ec. 5.26}$$

El lado izquierdo de la ecuación 5.26 representa la tasa de decrecimiento del volumen de fluido en el pozo lo cual es la tasa de producción debido a la descarga del pozo, q_{ws} . Así, la ecuación 5.26 puede volverse a escribir como:

$$q_{ws} = -C \frac{dp_{wf}(t)}{dt} \quad \text{Ec. 5.27}$$

donde q_{ws} es RB/hr. Como t es siempre expresado en horas, para q_{ws} expresado en RB/D, entonces la ecuación 5.27 viene a quedar:

$$q_{ws} = -24C \frac{dp_{wf}(t)}{dt} \quad \text{Ec. 5.28}$$

La ecuación 5.28 puede ser escrita como:

$$q_{ws} = 24C \frac{d\Delta p}{dt} = 24C \frac{d(p_i - p_{wf}(t))}{dt} \quad \text{Ec. 5.29}$$

La ecuación 5.28 o 5.29 puede ser usada para calcular q_{ws} vs. t a partir de presiones medidas en el pozo.

5.7. CONDICIÓN DE FRONTERA CONSIDERANDO ALMACENAMIENTO

A fin de establecer el problema de valor inicial y de frontera para un sistema no ideal en presencia de almacenamiento de pozo, necesitamos reemplazar la condición de tasa constante a la frontera interior usada en el sistema ideal por una condición de frontera interna que tome en cuenta al almacenamiento.

Un balance volumétrico para el pozo rinde:

$$q\beta = q_{sf} + q_{ws} \quad \text{Ec.5.30}$$

donde:

q = tasa de producción en superficie, STB/D

β = FVF, RB/STB

q_{sf} = tasa de flujo a la cara de la arena (sandface), RB/D

q_{ws} = tasa(descarga) de flujo del almacenamiento (storage), RB/D

La tasa a la cara de la arena viene dada por

$$q_{sf} = \frac{kh}{141.2\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad \text{Ec. 5.31}$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.28 y 5.31 en 5.30, se obtiene:

$$q\beta = \frac{kh}{141.2\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} - 24C \frac{dp_{wf}}{dt} \quad \text{Ec. 5.32}$$

La ecuación 5.32 es la condición de frontera interior con almacenamiento. En forma adimensional viene a ser:

$$1 + \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} - \left(\frac{0.8936C}{\phi h c_t r_w^2} \right) \frac{dp_{wD}}{dt_D} = 0 \quad \text{Ec. 5.33}$$

$$1 + \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} - C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} = 0 \quad \text{Ec. 5.34}$$

donde p_{wD} es la presión adimensional al pozo.

5.7.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En presencia de almacenamiento, el problema de valor inicial y de frontera en forma adimensional para un yacimiento infinito es:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}$$

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad \text{condición inicial}$$

$$1 + \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} - C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} = 0 \quad \text{cond. frontera interna}$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \quad \text{cond. frontera externa}$$

5.7.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Soluciones numéricas del problema de valor inicial y frontera con almacenamiento han sido presentadas en la literatura. La Fig. 5.8 es un gráfico log-log de $p_D(t_D, C_D)$ vs. t_D , el cual muestra las soluciones al pozo presentadas¹³ por Wattenbarger, R.A y Ramey, H.J. Jr: "An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow: II Finite Difference Treatment" SPEJ (Sep 1970), usando un modelo numérico de diferencias finitas, para un yacimiento que se comporta como infinito.

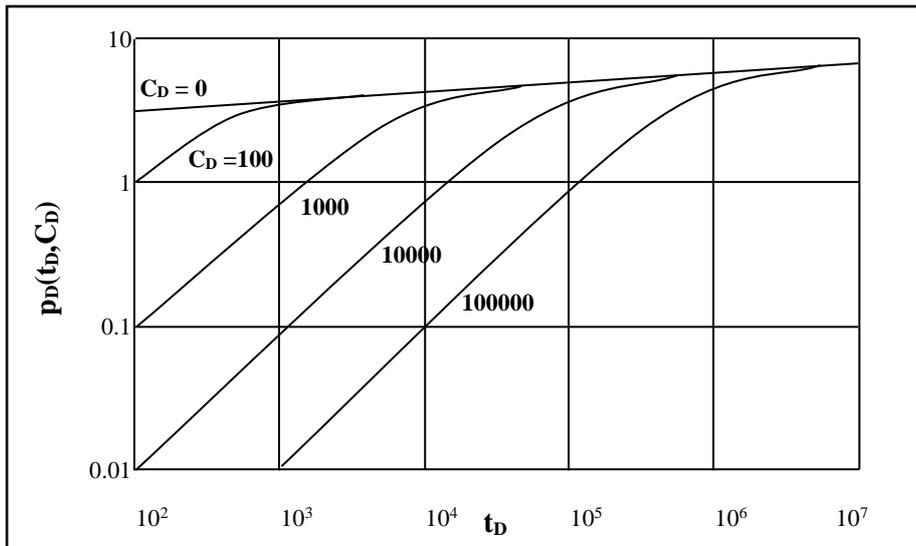


Fig. 5.8: Presión adimensional incluyendo almacenamiento y $S = 0$ (Wattenbarger y Ramey¹³)

Varias observaciones² pueden hacerse acerca de estas soluciones. Las soluciones son funciones de C_D . La solución para $C_D = 0$ corresponde a la aproximación logarítmica de la solución función- E_i para un sistema ideal sin almacenamiento. Como era de esperarse, todas las soluciones para diferentes valores de C_D eventualmente se unen a la solución función- E_i a un tiempo adimensional suficientemente largo. Así, a un tiempo suficientemente largo, el efecto de almacenamiento será insignificante y la respuesta de presión al pozo entonces seguirá la solución semilog de la ecuación de difusividad. El reto en el análisis de pruebas de pozos es determinar el tiempo al cual la presión del pozo se unirá a la línea semilog. Los datos de presión adquiridos más allá de ese tiempo pueden entonces ser analizados por el método semilog convencional.

Debe observarse que todas las soluciones con almacenamiento empiezan con una línea recta de pendiente unitaria sobre el gráfico de $\log p_D$ versus $\log t_D$. Esta línea recta de pendiente unitaria indica que la presión al pozo está completamente dominada por el almacenamiento y es usada para diagnosticar la presencia de almacenamiento en los datos medidos de presión.

Los datos de presión que caen sobre esta línea de pendiente unitaria no pueden usarse para estimar propiedades de la formación, ya que están completamente dominados por el almacenamiento. Todas las soluciones con almacenamiento pasan a través de un período de transición antes de unirse a la solución función E_i .

Una regla de mano comúnmente usada para estimar la duración de este período de transición es que este ocupa cerca de 1-1/2 ciclo logarítmico. Otra característica que se aprecia de la Figura 5.8 es que el tiempo al cual la solución se junta a la solución función- E_i incrementa con aumento del coeficiente adimensional de almacenamiento.

En Apéndices de estos apuntes se presenta la Ecuación de Difusividad y su solución considerando almacenamiento de pozo y efecto de piel.

5.8. RESPUESTA DE PRESIÓN DE FONDO DOMINADA POR ALMACENAMIENTO^{2,5,7,14}

Para ganar cierta visión del comportamiento de presión en una prueba dominada por el efecto de almacenamiento, consideremos el caso extremo en el cual la tasa constante de producción de un pozo es debido enteramente a la descarga del pozo. Para este caso, la ecuación 5.30 viene a quedar:

$$q\beta = q_{ws} \quad \text{Ec. 5.35}$$

Sustituyendo la ecuación 5.35 en la ecuación 5.29, e integrando, se obtiene:

$$\Delta p = \frac{q\beta}{24C} t \quad \text{Ec. 5.36}$$

donde la constante de integración es cero.

Así pues, también:

$$\log \Delta p = \log t + \log \left[\frac{q\beta}{24C} \right] \quad \text{Ec. 5.37}$$

La ecuación 5.37 indica que si los datos de presión transiente están dominados por el almacenamiento, un gráfico de $\log \Delta p$ vs. $\log \Delta t$ o $\log t$ será lineal con una pendiente unitaria como se muestra en la figura 5.9. Así, un gráfico de $\log \Delta p$ vs. $\log t$ con una pendiente unitaria indica la presencia del efecto de almacenamiento en los datos de presión. Se debe enfatizar que los datos de presión de tiempo temprano que caen sobre la línea recta log-log de pendiente unitaria no pueden ser analizados para determinar las propiedades del yacimiento. La ecuación 5.37 se aplica a pruebas de drawdown así como a pruebas de buildup.

Para una prueba de buildup:

$$t = \Delta t \quad \text{y} \quad \Delta p = p_{ws} - p_{wf}$$

donde

p_{ws} = presión al pozo después del cierre, $p_{ws}(\Delta t)$

p_{wf} = presión de flujo al pozo justo al cierre

Δt = tiempo de cierre

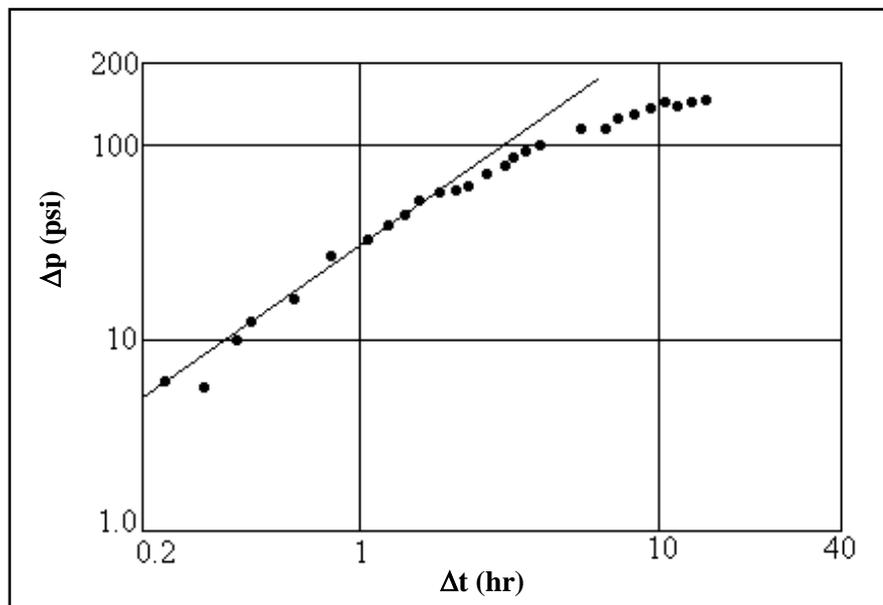


Fig. 5.9. Gráfico log-log de datos de presión dominados por almacenamiento.

El coeficiente de almacenamiento puede ser calculado de la porción lineal del gráfico log-log seleccionando un punto conveniente, leyendo el tiempo y caída de presión correspondiente y aplicando ecuación 5.36 como:

$$C = \frac{(q\beta)t}{(24)(\Delta p)} \quad \text{Ec. 5.38}$$

La ecuación 5.38 puede describirse como:

$$p_i - p_{wf} = \frac{q\beta}{24C} t \quad \text{Ec. 5.39}$$

La ecuación 5.38 puede ser puesta en forma adimensional para obtener:

$$p_D = \frac{t_D}{C_D} \quad \text{Ec.5.40}$$

la cual es la ecuación de la línea recta log-log de pendiente unitaria al inicio de las soluciones presentadas en la Fig. 5.8. La ecuación 5.40 sugiere que t_D/C_D podría ser una variable útil para correlacionar las curvas tipo con almacenamiento.

A tiempos tempranos, la función derivada de presión para los datos dominados por almacenamiento puede ser obtenida de la ecuación 5.40 como:

$$p_D' = \frac{dp_D}{dt_D} = \frac{1}{C_D} \quad \text{Ec. 5.41}$$

$$\frac{dp_D}{d \ln t_D} = t_D \frac{dp_D}{dt_D} = t_D p_D' = \frac{t_D}{C_D} \quad \text{Ec.5.42}$$

Una comparación de las ecuaciones 5.40 y 5.42 muestra que la función de presión p_D y la función de derivada de presión $t_D p_D'$ son idénticas para los datos de presión totalmente dominados por almacenamiento. Las dos funciones se desviarán entre sí en el período de transición a medida que el efecto de almacenamiento disminuye. Después que el efecto de almacenamiento ha desaparecido, la función de derivada de presión debe retornar a un valor de $1/2$, y permanecerá constante a ese valor a lo largo del período de flujo transiente temprano.

$$p_D(1, t_D) = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.80907] \quad \text{para } t_D \geq 25$$

$$\frac{dp_D}{d \ln t_D} = t_D \frac{dp_D}{dt_D} = t_D p_D' = \frac{1}{2} \quad \text{Ec.5.43}$$

Esto ocasiona que la función de derivada de presión exhiba un máximo durante el período de transición. Esta “joroba” característica en la función derivada es diagnóstico del efecto de almacenamiento en los datos de la prueba de pozos. El tiempo al cual la función derivada llega a ser constante al valor de $\frac{1}{2}$ marca el fin del efecto de almacenamiento y el tiempo a partir del cual los datos de presión pueden ser analizados por el método semilog convencional.

La solución transiente temprano de la ecuación de difusividad para el sistema ideal puede ahora ser modificada para tomar en cuenta al almacenamiento incorporando la solución de tiempo corto representada por la ecuación 5.40.

La solución modificada y su función derivada son mostradas gráficamente en la figura 5.10. Figuras como esta son conocidas como *curvas tipo* y hay una curva tipo para un coeficiente de almacenamiento particular, C_D . Estas curvas tipo son ampliamente utilizadas en el análisis de pruebas de presión pozos de petróleo y gas.

Con referencia a la figura 5.10, la solución puede ser dividida en tres períodos como sigue:

1. El período de tiempo inicial o temprano (no la solución transiente temprano) en el cual los datos de presión son totalmente dominados por el almacenamiento. Esta solución, indicada por una línea recta de pendiente unitaria sobre la curva tipo, no puede usarse para determinar las propiedades del yacimiento.
2. Un período de transición en el cual los datos de presión son aún influenciados por el almacenamiento pero en un menor grado que en el período de tiempo temprano. Como una regla de mano, el período de transición ocupa aproximadamente cerca de $1\frac{1}{2}$ ciclo log.

$$(\text{Log } t_2 = \log t_1 + 1,5 \log 10 ;$$

$$t_2 = 10^{1,5} t_1 \approx 32 t_1)$$

Los datos de presión en el período de transición pueden ser utilizados para estimar las propiedades del yacimiento utilizando coincidencias con curvas tipo (type curve matching). En la figura 5.10, la transición comprende algo más de 2 ciclos.

3. El período de tiempo de más tarde o tardío o de flujo radial en el cual los datos de presión ya no están más influenciados por el almacenamiento. La solución en

este período corresponde a la solución función- E_i ($C_D = 0$). Los datos de presión en este período pueden ser analizados por el gráfico semilog convencional para estimar las propiedades del yacimiento. Debe resaltarse que en los casos severos de almacenamiento, puede ser inalcanzable este período durante la prueba. En este caso, los datos de presión no pueden ser analizados por el método semilog convencional.

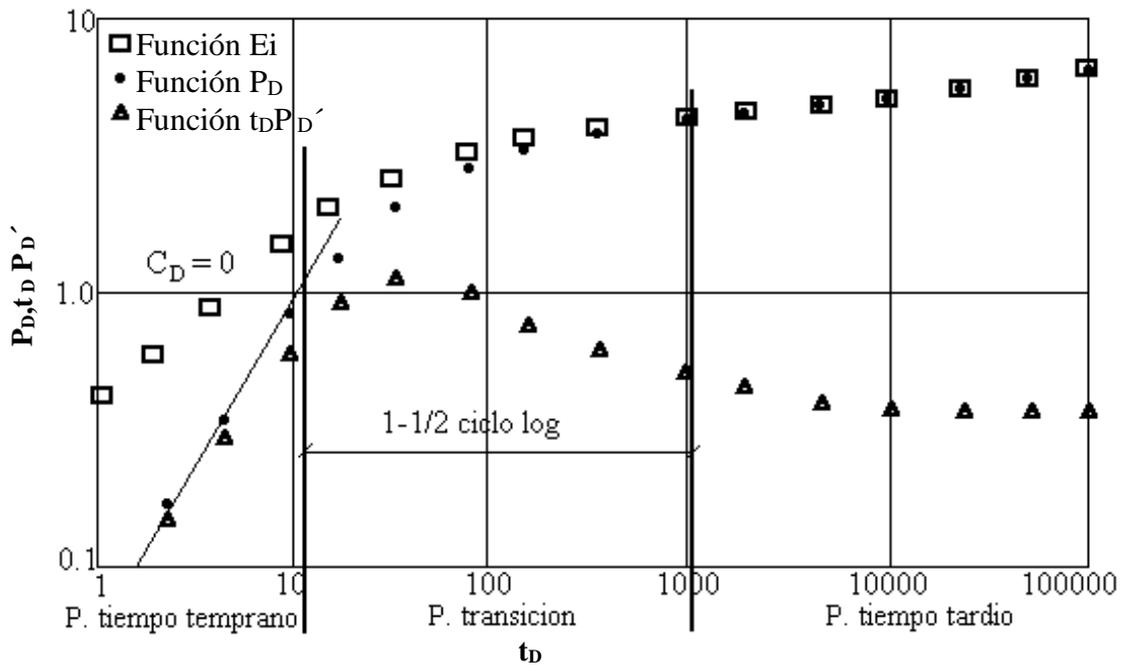


Fig. 5.10: Curvas tipo Con Almacenamiento¹⁴

La figura 5.11 muestra un gráfico semilog típico con datos de presión correspondientes al período transiente inicial dominado por el efecto de almacenamiento. Esta figura tiene la misma forma de la figura 4.3, del Capítulo 4 sino que, la figura 5.11 muestra para los primeros tiempos de la prueba varias posibilidades de distorsión (porción semilog no-lineal de los datos de presión influenciados por el almacenamiento) según el valor de C_D del pozo. Varias curvas tipo están disponibles para el análisis de los datos de presión dominados por el almacenamiento. Más adelante se verá el uso de estas curvas tipo.

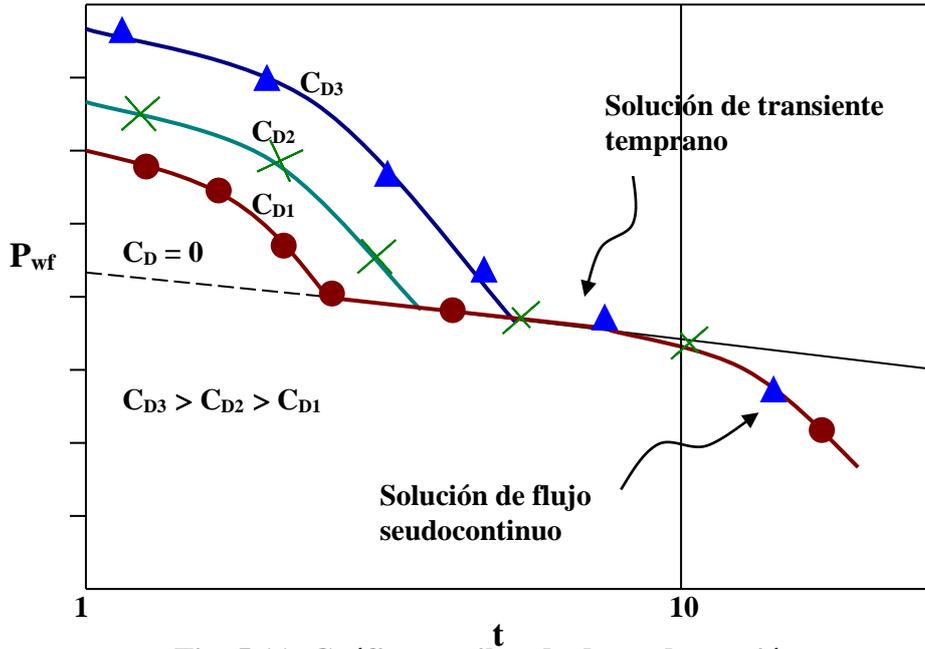


Fig. 5.11: Gráfico semilog de datos de presión dominados por el efecto de almacenamiento

Ahora, en presencia de los efectos de almacenamiento y los de piel (skin), la solución de tiempo inicial o temprano al pozo totalmente dominada por el almacenamiento puede escribirse como¹⁴:

$$p_D = \frac{t_D}{C_D} + S \tag{Ec. 5.44}$$

La solución de tiempo de más tarde, el cual no está ya más influenciado por el almacenamiento, puede escribirse como:

$$p_D = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.80907] + S + \ln C_D - \ln C_D$$

La ecuación anterior, puede ser algebraicamente transformada en la forma:

$$p_D = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{t_D}{C_D} \right) + 0.80907 + \ln(C_D e^{2S}) \right] \tag{Ec. 5.45}$$

Una nueva función de derivada de presión para ecuación 5.45 puede ser definida como:

$$\frac{dp_D}{d \ln \left(\frac{t_D}{C_D} \right)} = \frac{t_D}{C_D} \frac{dp_D}{d \left(\frac{t_D}{C_D} \right)} = \frac{t_D}{C_D} p' = \frac{1}{2} \tag{Ec. 5.46}$$

Aquí, $p' = \frac{dp_D}{d \left(\frac{t_D}{C_D} \right)}$

La ecuación 5.46 muestra que con la nueva definición, la función derivada para la solución función- E_i permanece inalterable.

De las ecuaciones 5.44, 5.45 y 5.46 se desprende que la solución de la ecuación de difusividad en presencia de almacenamiento y piel es una función de t_D/C_D y C_{De}^{2S} y puede ser escrita como:

$$p_D = f\left(\frac{t_D}{C_D}, C_{De}^{2S}\right) \quad \text{Ec. 5.47}$$

La ecuación 5.47 sugiere que las curvas tipo con efectos de almacenamiento y de piel pueden ser correlacionadas en términos de t_D/C_D y C_{De}^{2S} . Las curvas tipo de Bourdet y otros, que se muestran en la figura 5.12, son correlacionadas de esa manera.

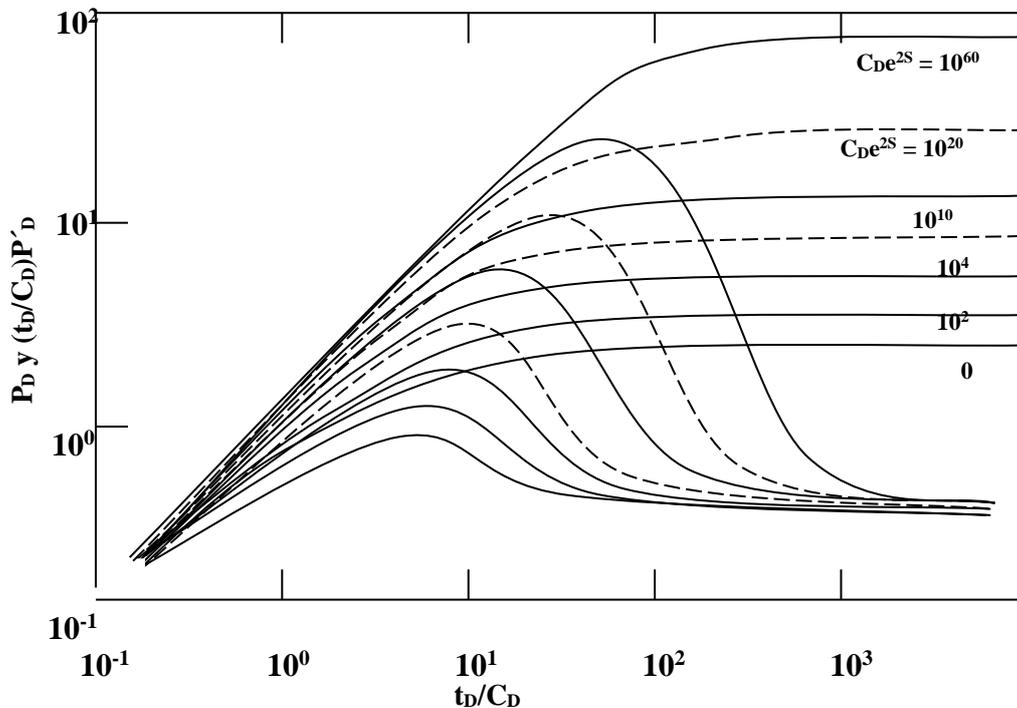


Fig. 5.12: Curvas tipo para un modelo de yacimiento homogéneo con almacenamiento y piel
 (Bourdet, D., Ayoub, J.A. & Pirard, Y.M.¹⁵
 “Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation”
 SPE Formation Evaluation (June 1989) 293-302).

Capítulo 5. REFERENCIAS

1. Craft, B.C. and Hawkins, M., Revised by Terry, Ronald E.: *Applied Petroleum Reservoir Engineering*, Second Edition. Prentice Hall Inc. (1991). 253-259.
2. Peters, J. Ekwere: *Curso: Advanced Well Test Analysis With Emphasis in Horizontal and Directional Wells*. Fict-Espol, Gquil. Ec. (2001). 4-6,4-8,4-19
3. Raghavan,R.: *Well Test Analysis*. Prentice Hall (1993). 65
4. Steward, G.: *Wireline Formation Testing and Well Deliverability*. PennWell (2012). Cap.1, 46-114
5. Lee, J., Rollins, J.B., Spivey, J.P.: *Pressure Transient Testing*. SPE Textbook Series, Richardson, Texas (2003). 42-44, 88-89.
6. Lee, W.J. : *Well Testing*. SPE Textbook Series Vol. 1. SPE (1982) 13-15
7. Bourdet, D.P.: *Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models*. Elsevier (2002) 11-13, 36, 373-375.
8. Kamal, M Medhat et al: *Transient Well Testing*, Henry L. Doherty Series Monograph Vol. 23, SPE (2009) 81.
9. Dake, L.P.: *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (1978). Cap. 7
10. Matthews, C.S., Brons, F. and Hazebroek, P.: “A Method for the Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir”. *Trans. AIME* (1954)201. 182-191.
11. Dake, L.P.: *The Practice of Reservoir Engineering (Revised Edition)*. Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (2001). 196
12. Earlougher, R.C. Jr.: *Advances in Well Test Analysis*. Monograph Series, SPE, Richardson, Texas (1977). 10-13
13. Wattenbarger, R.A. and Ramey, H.J. Jr.: “An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow: II Finite Difference Treatment”. *SPEJ* (Sep. 1970) 291-297.
14. Bourdet, D.P. et al: “A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis”. *World Oil*, GPC. Houston. May (1983). 95-106.
15. Bourdet, D., Ayoub, J.A. and Pirard, Y.M.: “Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation”. *SPEFE* (June 1989) 293-302.

APÉNDICE

APÉNDICE A

Tabla 4.1*

VALORES DE LA INTEGRAL EXPONENCIAL $-E_i(-x)$

<u>$-E_i(-x)$, $0.000 < x < 0.209$, Intervalo = 0.001</u>										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	$+\infty$	6.332	5.639	5.235	4.948	4.726	4.545	4.392	4.259	4.142
0.01	4.038	3.944	3.858	3.779	3.705	3.637	3.574	3.514	3.458	3.405
0.02	3.355	3.307	3.261	3.218	3.176	3.137	3.098	3.062	3.026	2.992
0.03	2.959	2.927	2.897	2.867	2.838	2.810	2.783	2.756	2.731	2.706
0.04	2.681	2.658	2.634	2.612	2.590	2.568	2.547	2.527	2.507	2.487
0.05	2.468	2.449	2.431	2.413	2.395	2.377	2.360	2.344	2.327	2.311
0.06	2.295	2.279	2.264	2.249	2.235	2.220	2.206	2.192	2.176	2.164
0.07	2.151	2.138	2.125	2.112	2.099	2.087	2.074	2.062	2.050	2.039
0.08	2.027	2.015	2.004	1.993	1.982	1.971	1.960	1.950	1.939	1.929
0.09	1.919	1.909	1.899	1.889	1.879	1.869	1.860	1.850	1.841	1.832
0.10	1.823	1.814	1.805	1.796	1.788	1.779	1.770	1.762	1.754	1.745
0.11	1.737	1.729	1.721	1.713	1.705	1.697	1.689	1.682	1.674	1.667
0.12	1.660	1.652	1.645	1.638	1.631	1.623	1.616	1.609	1.603	1.596
0.13	1.589	1.582	1.576	1.569	1.562	1.556	1.549	1.543	1.537	1.530
0.14	1.524	1.518	1.512	1.506	1.500	1.494	1.488	1.482	1.476	1.470
0.15	1.464	1.459	1.453	1.447	1.442	1.436	1.431	1.425	1.420	1.415
0.16	1.409	1.404	1.399	1.393	1.388	1.383	1.378	1.373	1.368	1.363
0.17	1.358	1.353	1.348	1.343	1.338	1.333	1.329	1.324	1.319	1.314
0.18	1.310	1.305	1.301	1.296	1.291	1.287	1.282	1.278	1.274	1.269
0.19	1.265	1.261	1.256	1.252	1.248	1.243	1.239	1.235	1.231	1.227
0.20	1.223	1.219	1.215	1.210	1.206	1.202	1.198	1.195	1.191	1.187
<u>$-E_i(-x)$, $0.000 < x < 2.09$, Intervalo = 0.01</u>										
0.0	$+\infty$	4.038	3.355	2.959	2.681	2.468	2.295	2.151	2.027	1.919
0.1	1.823	1.737	1.660	1.589	1.524	1.464	1.409	1.358	1.309	1.265
0.2	1.223	1.183	1.145	1.110	1.076	1.044	1.014	0.985	0.957	0.931
0.3	0.906	0.882	0.858	0.836	0.815	0.794	0.774	0.755	0.737	0.719
0.4	0.702	0.686	0.670	0.655	0.640	0.625	0.611	0.598	0.585	0.572
0.5	0.560	0.548	0.536	0.525	0.514	0.503	0.493	0.483	0.473	0.464
0.6	0.454	0.445	0.437	0.428	0.420	0.412	0.404	0.396	0.388	0.381
0.7	0.374	0.367	0.360	0.353	0.347	0.340	0.334	0.328	0.322	0.316
0.8	0.311	0.305	0.300	0.295	0.289	0.284	0.279	0.274	0.269	0.265
0.9	0.260	0.256	0.251	0.247	0.243	0.239	0.235	0.231	0.227	0.223
1.0	0.219	0.216	0.212	0.209	0.205	0.202	0.198	0.195	0.192	0.189
1.1	0.186	0.183	0.180	0.177	0.174	0.172	0.169	0.166	0.164	0.161
1.2	0.158	0.156	0.153	0.151	0.149	0.146	0.144	0.142	0.140	0.138
1.3	0.135	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.124	0.122	0.120	0.118
1.4	0.116	0.114	0.113	0.111	0.109	0.108	0.106	0.105	0.103	0.102
1.5	0.1000	0.0985	0.0971	0.0957	0.0943	0.0929	0.0915	0.0902	0.0889	0.0876
1.6	0.0863	0.0851	0.0838	0.0826	0.0814	0.0802	0.0791	0.0780	0.0768	0.0757

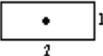
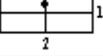
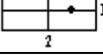
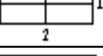
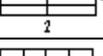
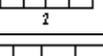
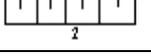
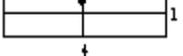
1.7	0.0747	0.0736	0.0725	0.0715	0.0705	0.0695	0.0685	0.0675	0.0666	0.0656
1.8	0.0647	0.0638	0.0629	0.0620	0.0612	0.0603	0.0595	0.0586	0.0578	0.0570
1.9	0.0562	0.0554	0.0546	0.0539	0.0531	0.0524	0.0517	0.0510	0.0503	0.0496
2.0	0.0489	0.0482	0.0476	0.0469	0.0463	0.0456	0.0450	0.0444	0.0438	0.0432

<u>2.0 < x < 10.9, Intervalo = 0.1</u>										
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4.89x10 ⁻²	4.26x10 ⁻²	3.72x10 ⁻²	3.25x10 ⁻²	2.84x10 ⁻²	2.49x10 ⁻²	2.19x10 ⁻²	1.92x10 ⁻²	1.69x10 ⁻²	1.48x10 ⁻²
3	1.30x10 ⁻²	1.15x10 ⁻²	1.01x10 ⁻²	8.94x10 ⁻³	7.89x10 ⁻³	6.87x10 ⁻³	6.16x10 ⁻³	5.45x10 ⁻³	4.82x10 ⁻³	4.27x10 ⁻²
4	3.78x10 ⁻³	3.35x10 ⁻³	2.97x10 ⁻³	2.64x10 ⁻³	2.34x10 ⁻³	2.07x10 ⁻³	1.84x10 ⁻³	1.64x10 ⁻³	1.45x10 ⁻³	1.29x10 ⁻³
5	1.15x10 ⁻³	1.02x10 ⁻³	9.08x10 ⁻⁴	8.09x10 ⁻⁴	7.19x10 ⁻⁴	6.41x10 ⁻⁴	5.71x10 ⁻⁴	5.09x10 ⁻⁴	4.53x10 ⁻⁴	4.04x10 ⁻⁴
6	3.60x10 ⁻⁴	3.21x10 ⁻⁴	2.86x10 ⁻⁴	2.55x10 ⁻⁴	2.28x10 ⁻⁴	2.03x10 ⁻⁴	1.82x10 ⁻⁴	1.62x10 ⁻⁴	1.45x10 ⁻⁴	1.29x10 ⁻⁴
7	1.15x10 ⁻⁴	1.03x10 ⁻⁴	9.22x10 ⁻⁵	8.24x10 ⁻⁵	7.36x10 ⁻⁵	6.58x10 ⁻⁵	5.89x10 ⁻⁵	5.26x10 ⁻⁵	4.71x10 ⁻⁵	4.21x10 ⁻⁵
8	3.77x10 ⁻⁵	3.37x10 ⁻⁵	3.02x10 ⁻⁵	2.70x10 ⁻⁵	2.42x10 ⁻⁵	2.16x10 ⁻⁵	1.94x10 ⁻⁵	1.73x10 ⁻⁵	1.55x10 ⁻⁵	1.39x10 ⁻⁵
9	1.24x10 ⁻⁵	1.11x10 ⁻⁵	9.99x10 ⁻⁶	8.95x10 ⁻⁶	8.02x10 ⁻⁶	7.18x10 ⁻⁶	6.44x10 ⁻⁶	5.77x10 ⁻⁶	5.17x10 ⁻⁶	4.64x10 ⁻⁶
10	4.15x10 ⁻⁶	3.73x10 ⁻⁶	3.34x10 ⁻⁶	3.00x10 ⁻⁶	2.68x10 ⁻⁶	2.41x10 ⁻⁶	2.16x10 ⁻⁶	1.94x10 ⁻⁶	1.74x10 ⁻⁶	1.56x10 ⁻⁶

** Tomada del libro “Well Testing (1982) de Jhon Lee.*

Tabla 4.3

FACTOR DE FORMA PARA VARIAS AREAS DE DRENAJE CON UN SOLO POZO

Dentro de las fronteras del reservorio	C_A	$\ln C_A$	$0.5\ln(2.2458/C_A)$	Exacto Para $t_{DA} >$	Menor al 1% de error para $t_{DA} >$	Usar solución para sistema infinito con un error menor al 1% para $t_{DA} <$
	31.62	3.4538	-1.3224	0.1	0.06	0.10
	31.6	3.4532	-1.3220	0.1	0.06	0.10
	27.6	3.3178	-1.2544	0.2	0.07	0.09
	27.1	3.2995	-1.2452	0.2	0.07	0.09
	21.9	3.0865	-1.1387	0.4	0.12	0.08
	0.098	-2.3228	1.5659	0.9	0.60	0.015
	30.8828	3.4302	-1.3106	0.1	0.05	0.09
	12.9851	2.5638	-0.8774	0.7	0.25	0.03
	4.5132	1.5070	-0.3490	0.6	0.30	0.025
	3.3351	1.2045	-0.1977	0.7	0.25	0.01
	21.8369	3.0836	-1.1373	0.3	0.15	0.025
	10.8374	2.3830	-0.7870	0.4	0.15	0.025
	4.5141	1.5072	-0.3491	1.5	0.50	0.06
	2.0769	0.7309	0.0391	1.7	0.50	0.02
	3.1573	1.1497	-0.1703	0.4	0.15	0.005
	0.5813	-0.5425	0.6758	2.0	0.60	0.02
	0.1109	-2.1991	1.5041	3.0	0.60	0.005
	5.3790	1.6825	-0.4367	0.8	0.30	0.01
	2.6896	0.9894	-0.0902	0.8	0.30	0.01

	0.2318	-1.4619	1.1355	4.0	2.00	0.03
	0.1155	-2.1585	1.4838	4.0	2.00	0.01
	2.3606	0.8589	-0.0249	1.0	0.40	0.025
Dentro de un reservorio con fractura vertical: usar (r_e/L_f) por A/r_w^2 para los sistemas fracturados						
	2.6541	0.9761	-0.0835	0.175	0.08	No se puede usar
	2.0348	0.7104	0.0493	0.175	0.09	No se puede usar
	1.9886	0.6874	0.0608	0.175	0.09	No se puede Usar
	1.6620	0.5080	0.1505	0.175	0.09	No se puede Usar
	1.3127	0.2721	0.2685	0.175	0.09	No se puede Usar
	0.7887	-0.2374	0.5232	0.175	0.09	No se puede Usar
Reservorio con drenaje de agua						
	19.1	2.9497	-1.0703	-	-	-
Reservorio con una producción desconocida						
	25.0	3.2189	-1.2049	-	-	-

* Tomada del libro “Well Testing (1982) de Jhon Lee

APENDICE B

FLUJO RADIAL EN EL RESERVORIO HACIA UN POZO DE RADIO r_w , EN UN YACIMIENTO HOMOGÉNEO QUE ACTÚA COMO SI FUERA INFINITO ($r_e \rightarrow \infty$)).

Solución de la Ecuación de Difusividad.

El Enfoque es el de la transformación de Boltzmann y la solución es de línea fuente ($r_w = 0$)*.

1.- En forma adimensional, la Ec. de Difusividad es:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \text{Ec. 1}$$

Sujeta a:

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad \text{Ec. 2}$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = -1 \quad \text{Ec. 3}$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \quad \text{Ec. 4}$$

- La condición de Ec. (2) es que a tiempo cero, la presión es uniformemente distribuida e igual a p_i .
- La condición de Ec. (3) es que al pozo ($r = r_w$) la tasa de flujo es constante.
- La condición de Ec. (4) es la de la frontera exterior. La presión al radio infinito es p_i (el yacimiento actúa como si fuera de extensión infinita).

2.- La transformación de Boltzmann es

$$E_D = \frac{r_D^2}{4t_D} \quad \text{Ec. 5}$$

3.- Expandiendo $\partial^2 p_D / \partial r_D^2$ tenemos en Ec. (1)

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \left[\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right] + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \text{Ec.6}$$

Aplicando la regla de cadena:

$$\frac{\partial p_D}{\partial x} = \frac{\partial E_D}{\partial x} \frac{\partial p_D}{\partial E_D}$$

La cual combinada con Ec. (6) da

$$\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial E_D} \left[\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \frac{\partial p_D}{\partial E_D} \right] + \frac{1}{r_D} \frac{\partial E_D}{\partial r_D} \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = \frac{\partial E_D}{\partial t_D} \frac{\partial p_D}{\partial E_D}$$

Expandiendo

$$\left[\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \right]^2 \frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} + \left[\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial E_D} \left(\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{r_D} \frac{\partial E_D}{\partial r_D} - \frac{\partial E_D}{\partial t_D} \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0$$

Aislado términos

$$\left[\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \right]^2 \frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} + \left[\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial E_D} \left(\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{r_D} \frac{\partial E_D}{\partial r_D} - \frac{\partial E_D}{\partial t_D} \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0$$

Dividendo para $(\partial E_D / \partial r_D)^2$ se tiene

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} + \frac{1}{(\partial E_D / \partial r_D)^2} \left[\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial E_D} \left(\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{r_D} \frac{\partial E_D}{\partial r_D} - \frac{\partial E_D}{\partial t_D} \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0$$

Simplificando $(\partial E_D / \partial r_D)$

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} + \frac{1}{(\partial E_D / \partial r_D)^2} \left[\frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{\partial E_D}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{r_D} \frac{\partial E_D}{\partial r_D} - \frac{\partial E_D}{\partial t_D} \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} + \frac{1}{(\partial E_D / \partial r_D)^2} \left[\frac{\partial^2 E_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial E_D}{\partial r_D} - \frac{\partial E_D}{\partial t_D} \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0$$

Ejecutando la factorización de $(\partial E_D / \partial r_D)^2$ da

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} + \left[\frac{1}{(\partial E_D / \partial r_D)^2} \frac{\partial^2 E_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{1}{(\partial E_D / \partial r_D)} - \frac{1}{(\partial E_D / \partial r_D)^2} \frac{\partial E_D}{\partial t_D} \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0 \quad \text{Ec 7}$$

4.- Usando la Ec. 5 (la transformación) para obtener las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial E_D}{\partial t_D} = \frac{\partial}{\partial t_D} \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) = \frac{r_D^2}{4} \frac{\partial}{\partial t_D} \left(\frac{1}{t_D} \right) = -\frac{1}{t_D} \frac{r_D^2}{4t_D} = -\frac{1}{t_D} E_D \quad \text{Ec.8}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial r_D} = \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) = \frac{2}{4t_D} r_D = \frac{2}{r_D} \frac{r_D^2}{4t_D} = \frac{2}{r_D} E_D \quad \text{Ec. 9}$$

$$\frac{\partial^2 E_D}{\partial r_D^2} = \frac{\partial}{\partial r_D} \left[\frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{r_D^2}{4t_D} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{2}{r_D} r_D \right) = \frac{2}{4t_D} = \frac{2}{r_D^2} \frac{r_D^2}{4t_D} = \frac{2}{r_D^2} E_D \quad \text{Ec. 10}$$

Sustituyendo Ecs. 8-10 en Ec. 7 obtenemos

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} = \left[\frac{1}{(2E_D/r_D)^2} \frac{2}{r_D^2} E_D + \frac{1}{r_D} \frac{1}{(2E_D/r_D)} - \frac{1}{(2E_D/r_D)^2} \left(-\frac{1}{t_D} E_D \right) \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0$$

Reduciendo

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} = \left[\frac{1}{2E_D} + \frac{1}{2E_D} + 1 \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0$$

Finalmente

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial E_D^2} + \left[1 + \frac{1}{E_D} \right] \frac{\partial p_D}{\partial E_D} = 0 \quad \text{Ec.11}$$

Donde Ec. 11 es nuestra ecuación diferencial transformada de “Boltzmann”.

Ahora necesitamos establecer las condiciones inicial y de frontera en términos de la variable transformación de Boltzmann, E_D .

Recordando la condición inicial, Ec. 2, tenemos:

$$p_D(r_D, 0) = 0$$

donde para, $t \rightarrow 0; E_D \rightarrow \infty$, lo cual da

$$p_D(E_D \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{Ec. 12}$$

Recordando la condición de frontera exterior, Ec. 4, tenemos

$$p_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0$$

o para $r_D \rightarrow \infty, E_D \rightarrow \infty$, lo cual da

$$p_D(E_D \rightarrow \infty) = 0 \quad \text{Ec. 13}$$

Como puede apreciarse Ecs. 12 y 13 son iguales, lo cual muestra que la transformación de Boltzmann contiene 2 condiciones en una. Combinando esta observación con la condición de frontera interior, tendremos 2 condiciones de “frontera”. Acoplado esta observación con el hecho de que la Ec. 11 es solo una función de la variable de Boltzmann, E_D , podemos resolver Ec. 11 sin más condicionamientos. Note que la contracción de las condiciones de frontera exterior e inicial debe darse o de lo contrario la transformación de Boltzmann sería técnicamente inválida.

Asumimos que $r_w = 0$, entonces $r_D = 0$ y la condición de frontera interna de tasa constante, Ec. 3, es:

$$\left[r_D = \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right]_{r_D \rightarrow 0} = -1 \quad (\text{Solución de línea fuente: } r_w \rightarrow 0)$$

La cual puede arreglarse para obtener

$$\left[E_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right]_{E_D \rightarrow 0} = -\frac{1}{2} \quad \text{Ec. 14}$$

Haciendo la sustitución de variable siguiente:

$$v = \frac{dp_D}{dE_D} \quad \text{Ec.15}$$

Y, introduciéndola en Ec. 11 y observando el uso de derivadas ordinarias, se tiene

$$\frac{dv}{dE_D} + \left[1 + \frac{1}{E_D} \right] v = 0$$

$$\frac{1}{v} dv = - \left[1 + \frac{1}{E_D} \right] dE_D = -dE_D - \frac{1}{E_D} dE_D$$

Integrando

$$\ln v = -E_D - \ln(E_D) + \beta \quad \beta = \text{Constante de integración}$$

$$v = \exp[-E_D - \ln(E_D) + \beta]$$

$$v = \exp[-E_D] \exp[-\ln(E_D)] \exp[\beta]$$

Lo cual se reduce a

$$v = \frac{\alpha}{E_D} \exp[-E_D] \quad \text{Ec.16}$$

Donde $\alpha = \exp[\beta]$, esto es, la constante de integración y, $\exp[-\ln E_D] = e^{\ln(E_D)} = \frac{1}{E_D}$.

Trayendo Ec. 15 y combinando con Ec. 16, da

$$\frac{dp_D}{dE_D} = \frac{\alpha}{E_D} \exp[-E_D] \quad \text{Ec. 17}$$

Multiplicando por E_D

$$E_D \frac{dp_D}{dE_D} = \alpha \exp[-E_D] \quad \text{Ec. 18}$$

Sustituyendo Ec. 18 en Ec. 14 se tiene

$$\alpha \lim_{E_D \rightarrow 0} [\exp(-E_D)] = -\frac{1}{2}$$

O

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{Ec. 19}$$

Sustituyendo Ec. 19 en Ec. 17 da

$$\frac{dp_D}{dE_D} = -\frac{1}{2E_D} \exp[-E_D] \quad \text{Ec. 20}$$

Separando e integrando Ec. 20, obtenemos

$$\int_{p_D=0}^{p_D} dp_D = -\frac{1}{2} \int_{E_D=\infty}^{E_D} \frac{1}{E_D} e^{-E_D} dE_D$$

Nótese que $p_D = 0$ a $E_D = \infty$ que es la condición inicial y de frontera exterior (Ecs. 2 y 4). Completando la integración e invirtiendo los límites del miembro del lado derecho tenemos

$$p_D = \frac{1}{2} \int_{E_D = \frac{r_D^2}{4t_D}}^{\infty} \frac{1}{E_D} e^{-E_D} dE_D \quad \text{Ec. 21}$$

Podemos observar que Ec. 21 es la Integral Exponencial

$$-E_i(-x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{y} e^{-y} dy = E_i(x) \quad \text{Ec. 22}$$

Combinando Ecs. 21 y 22 obtenemos nuestro resultado final

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right) \quad \text{Ec. 23}$$

Flujo de estado transitorio (yacimiento actúa como finito).

* Mathews, C.S. & Russell, D.G.: “Pressure Buildup and Flow Tests in Wells”, SPE-1997. Apéndice A.

Profesor Blasingame, T.A.: Notas del Curso Petroleum Engineering-P620, Solution of the Dimensionless Radial Flow Diffusivity Equation-Infinite Acting Reservoir Case. DOPE-Texas A&M University (1992-1994).

Dake, L.P.: *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific Publishing Co., New York City, New York (1978).150;

Lee, J., Rollins, J.B., Spivey, J.P.: *Pressure Transient Testing*. SPE Textbook Series, Richardson, Texas (2003). Appendix B.)

APENDICE C

LA ECUACIÓN DE DIFUSIVIDAD Y SU SOLUCIÓN CONSIDERANDO EFECTOS DE ALMACENAMIENTO (C) DEL POZO Y DE PIEL O DAÑO (S).¹

Primero presentaremos la Ec. de Difusividad con sus condiciones iniciales y de fronteras, pero sin almacenamiento y sin piel. Las condiciones de frontera son: la tasa de producción de líquido q al pozo es constante y el yacimiento es cerrado por lo tanto no hay flujo de fluido que atraviese sus fronteras exteriores. Un solo fluido se desplaza en el yacimiento hacia el pozo. Además hemos asumido en la derivación de la Ec. de Difusividad que:

- 1.- El flujo es radial (toda la sección productiva ha sido disparada).
- 2.- El flujo es laminar (no turbulento), flujo Darcy.
- 3.- El medio poroso tiene una permeabilidad y compresibilidad constantes (medio de comportamiento homogéneo).
- 4.- Los efectos de gravedad son despreciables (yacimiento horizontal).
- 5.- Condiciones isotérmicas (Capacidad de calor del fluido \ll que capacidad de calor de la roca).
- 6.- El fluido tiene una compresibilidad pequeña y constante.
- 7.- El producto compresibilidad por gradiente al cuadrado de presión $C(\partial p / \partial r)^2$, es despreciable.

La ecuación a resolver es:

Ec. de Difusividad, flujo de una sola fase, líquido.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c_t}{0.0002637k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{Ec. (1)}$$

Esta ecuación establece la variación de la presión en el yacimiento en función del radio desde el pozo y tiempo de flujo del pozo, sujeto a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{0.0002637k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

a) Condición Inicial:

a $t = 0$, la presión en el yacimiento a todo radio es uniforme e igual a p_i .

$$p(r, t = 0) = p_i \quad \text{Ec. (2)}$$

b) Condición de frontera exterior:

Yacimiento cerrado, es decir, no hay flujo que atraviese la frontera exterior ($r = r_e$).

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_e} = 0 \quad \text{Ec. (3)}$$

c) Condición de frontera interior:

La producción o tasa de flujo, q , al pozo es constante.

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = 141.2 \frac{q\beta\mu}{kh} = cte. \quad \text{Ec. (4)}$$

2.- En variables adimensionales se tiene:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \text{Ec. (5)}$$

$$\text{Condición Inicial: } p_D(r_D, t_D = 0) = 0 \quad \text{Ec. (6)}$$

$$\text{Condición frontera exterior: } \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=r_{eD}} = 0 \quad \text{Ec. (7)}$$

$$\text{Condición frontera interior: } \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1 \quad \text{Ec. (8)}$$

Siendo las variables adimensionales:

$$p_D = \frac{kh}{141.2 q\beta\mu} (p_i - p) \quad \text{Ec. (9)}$$

$$t_D = \frac{0.0002637k t}{\phi \mu c_t r_w^2} \quad \text{Ec. (10)}$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad \text{Ec. (11)}$$

Para la conversión de la Ec. de Difusividad y sus condiciones, de variables dimensionales a variables adimensionales se puede consultar el Capítulo 3 del texto.

3.- Incluiremos ahora el efecto de almacenamiento como una condición adicional a la que se sujetará la solución de la Ec. de Difusividad. Para modelar este efecto de almacenamiento tenemos que:

$$q = q_{sf} + q_{ws}, \text{ medidos a condiciones estándares.}$$

q = tasa de producción del pozo medida en superficie, *STB/día*

q_{sf} = tasa de producción que entrega el yacimiento al pozo; el subíndice sf viene de cara de la arena (del inglés *sand face* *STB/día*)

q_{ws} = tasa de producción con la que el pozo contribuye a la tasa total debido a la expansión del fluido dentro del pozo; *STB/día*. El subíndice ws viene de almacenamiento del pozo, del inglés *well storage*.

Si hacemos que la q de superficie sea constante, podemos hacer un balance de masa en el pozo, tomando como referencia la figura C.1

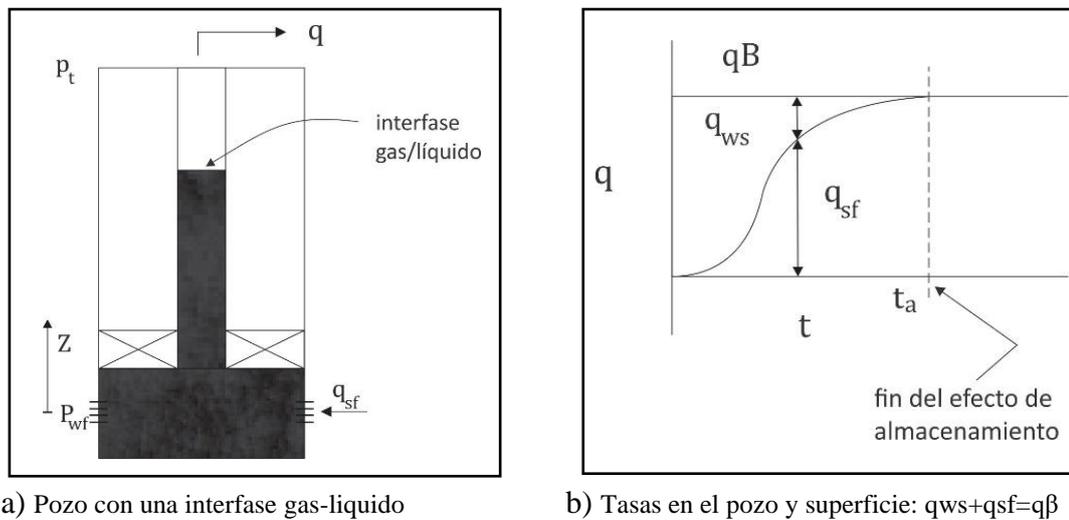


Fig. C.1 Efecto de almacenamiento de pozo

$$\left(\begin{array}{c} \text{tasa de flujo de masa} \\ \text{que entra al pozo} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{tasa de flujo de masa} \\ \text{que sale del pozo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{tasa de acumulacion} \\ \text{de masa en el pozo} \end{array} \right) \quad \text{Ec. (12)}$$

$$(q_{sf} \beta \rho_{sf}) - (q \beta \rho_{sc}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{24 \rho_{wb} V_{wb}}{5.615} \right) \quad \text{Ec. (13)}$$

Donde tiempo está en horas y el volumen respectivo del pozo, V_{wb} , es expresado en pies cúbicos, lo que resulta en tasa de flujo de masa. El subíndice wb en el volumen V_{wb} y en la densidad del fluido ρ_{wb} , términos que se encuentran en el lado izquierdo de la ecuación 13, viene de calibre del pozo donde está almacenado el fluido, en inglés **w**ell**b**ore. El subíndice sc corresponde a condiciones estándares, del inglés **s**tandard **c**onditions

Recuerde que $q\beta$ es el *vol./tiempo* y ρ_{sc} es *masa/vol.*, de modo que: $(q\beta)\rho_{sc}$ es *masa/tiempo*.

Las unidades de cada uno de los parámetros del lado derecho e izquierdo de Ec. 13 son:

Lado izquierdo: $q\beta$, *barriles/día* y ρ_{sc} *lbm/ pie³*, es decir (bbl/d) (lbm/pie³)

Lado derecho: 24 *horas/día*, ρ_{wb} $\frac{lbm}{pie^3}$, V_{wb} *pie³*, $5.615 \frac{pie^3}{barril}$, y t *horas*; es decir, (bbl/d) (lbm/pie³).

El volumen de la parte del pozo donde se almacena el fluido, es: $V_{wb} = A_{wb}Z$, donde A_{wb} = *área*, y Z = *altura columna de fluido*,

Si asumimos un área del pozo (*wellbore*) constante, una densidad también constante y que $\rho_{sf} = \rho_{sc} = \rho_{wb}$ (factible, tratándose del mismo fluido y variaciones de presión y temperatura sin mayor incidencia en la densidad), podemos escribir el Balance de masa como:

$$(q_{sf} - q)\beta = \frac{24}{5.615} A_{wb} \frac{dZ}{dt}, \quad \text{donde } Z \text{ es lo que varía con el tiempo de flujo.}$$

Ec. (14)

La presión de superficie p_t está relacionada con la presión de fondo p_w , a cualquier tiempo, podemos representarla por:

$$p_w = p_t + \frac{\rho Z}{144}$$

Ec. (15)

Donde ρ = densidad del líquido.

Diferenciando con respecto al tiempo nos da

$$\frac{d}{dt}(p_w - p_t) = \frac{\rho}{144} \frac{dZ}{dt}$$

Ec. (16)

Sustituyendo dZ/dt por lo obtenido del balance de masa, Ec. 14, tenemos:

$$\frac{d}{dt}(p_w - p_t) \left(\frac{144}{\rho} \right) = \left(\frac{5.615}{24 A_{wb}} \right) (q_{sf} - q)\beta$$

$$(q_{sf} - q)\beta = 24 \left(\frac{144}{5.615 \rho} A_{wb} \right) \frac{d}{dt}(p_w - p_t)$$

Ec. (17)

Y definiendo un coeficiente de almacenamiento de pozo C , como:

$$C = \frac{144 A_{wb}}{5.615 \rho}, \quad \frac{bbl}{psi}$$

Ec. (18)

Donde A_{wb} está en pies cuadrados, la constante $144 \text{ pulg}^2/\text{pie}^2$ convierte los pies^2 en pulg^2 , ρ está en lbm/pie^3 y las constante $5.615 \text{ pie}^3/\text{bbl}$ convierte barriles a pie^3 . En el sistema de unidades que usamos la densidad tiene el mismo valor del peso específico (lb/pie^3). Entonces:

$$(q_{sf} - q)\beta = 24 C \frac{d}{dt}(p_w - p_t)$$

Y

$$q_{sf} = q + \frac{24 C}{\beta} \frac{d}{dt}(p_w - p_t) \quad \text{Ec. (19)}$$

La tasa de flujo a la casa de la arena viene dada por Darcy como:

$$q_{sf} = \frac{k h}{141.2 \beta \mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad \text{Ec. (20)}$$

Entonces:

$$q = \frac{k h}{141.2 \beta \mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} - \frac{24 C}{\beta} \frac{d}{dt}(p_w - p_t) \quad \text{Ec. (21)}$$

Esta es la condición de frontera interna de almacenamiento para un pozo con una interfase gas-liquido, como se muestra en figura C.1. En algunos casos, podemos asumir que la presión a la cabeza del pozo sea constante, lo que es frecuente durante las pruebas de pozo, entonces

$$\frac{dp_t}{dt} = 0 \quad \text{Ec. (22)}$$

Y la condición de frontera en variables dimensionales queda

$$q = \frac{k h}{141.2 \beta \mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} - \frac{24 C}{\beta} \frac{dp_w}{dt} \quad \text{Ec. (23)}$$

Para expresar esta condición en variables adimensionales, dividimos para q :

$$1 = \frac{k h}{141.2 q \beta \mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} - \frac{24 C}{q \beta} \frac{dp_w}{dt} \quad \text{Ec. (24)}$$

Recordando las definiciones de presión y radio adimensionales:

$$p_D = \frac{k h}{141.2 q \beta \mu} (p_i - p)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad \text{y} \quad t_D = \frac{0.0002637 k t}{\phi \mu c_t r_w^2}$$

$$\frac{d}{dt}(p_i - p) = -\frac{dp}{dr} = 141.2 \frac{q \beta \mu}{k h} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} \quad \text{Ec. (26)}$$

$$= 141.2 \frac{q \beta \mu}{k h} \frac{1}{r_w} \frac{\partial p_D}{\partial r_D}$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = -141.2 \frac{q \beta \mu}{k h} r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \quad \text{Ec. (27)}$$

Si sustituimos esta última ecuación en la condición de frontera, tenemos:

$$1 = -\frac{k h}{141.2 q \beta \mu} \times \frac{141.2 q \beta \mu}{k h} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} - \frac{24 C}{q \beta} \frac{dp_w}{dt} \quad \text{Ec. (28)}$$

Pero

$$p_{wD} = \frac{k h}{141.2 q \beta \mu} (p_i - p_w) \quad \text{Ec. (29)}$$

$$\frac{dp_{wD}}{dt} = \frac{k h}{141.2 q \beta \mu} \left(-\frac{dp_w}{dt} \right) \quad \text{Ec. (30)}$$

$$\frac{dt_D}{dt} \times \frac{dp_{wD}}{dt_D} = \frac{0.0002637k}{\phi \mu c_t r_w^2} \left(\frac{dp_{wD}}{dt_D} \right) \quad \text{Ec. (31)}$$

Entonces:

$$\frac{dp_w}{dt} = -\left(\frac{0.0002637k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) \left(\frac{141.2 q \beta \mu}{k h} \right) \frac{dp_{wD}}{dt_D} \quad \text{Ec. (32)}$$

Sustituyendo en Ec. (28) tenemos,

$$1 = -\left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} + \frac{24 C}{q \beta} \left(\frac{0.0002637k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) \left(\frac{141.2 q \beta \mu}{k h} \right) \frac{dp_{wD}}{dt_D}$$

$$1 = \left(\frac{0.8936C}{\phi h c_t r_w^2} \right) \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad \text{Ec. (33)}$$

Definiendo como coeficiente de almacenamiento adimensional a:

$$C_D = \frac{0.8936C}{\phi h c_t r_w^2} \quad \text{Ec. (34)}$$

Entonces la *condición de frontera interna en variables adimensionales* queda

- Condición frontera interna debida al almacenamiento

$$1 = C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad \text{Ec. (35)}$$

- Y, condición frontera interna debida al efecto de piel o daño

$$p_{wD}(t_D) = p_D(1, t_D) + S \quad \text{Ec. (36)}$$

Donde “S” es el factor de daño (adimensional).

4.- Ahora podemos plantear la Ecuación de Difusividad sujeta a las condiciones de solución, incluyendo los efectos de almacenamiento y de piel, tasa constante.

En término de variables adimensionales

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}$$

Sujeta a:

- Condición inicial $p_D(r_D, t_D = 0) = 0$
- Condición de frontera exterior

Puede darse que se asuma que el yacimiento actúa como infinito

$$p_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0$$

O, que la frontera exterior sea sin flujo

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_{eD}} = 0$$

- Condición de frontera interna

Ahora hay dos condiciones para esta frontera:

- a) Que se debe tener en cuenta el efecto de almacenamiento en el comportamiento de la presión en función del tiempo:

$$1 = C_D \frac{\partial p_{wD}}{\partial t_D} - \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1}$$

- b) Que debe tenerse en cuenta también el efecto de piel o daño:

$$p_{wD}(t_D) = p_D(1, t_D) + S$$

5.- Solución.

Agarwal (1970) presentó esta solución para la Ec. de Difusividad y sus condiciones planteadas arriba en sección 4.

$$P_{wD}(t_D) = \frac{4}{\pi^2} + \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-x^2 t_D}}{x^3} \right) \left\{ \left[x C_D J_0(x) - (1 - C_D S x^2) J_1(x) \right]^2 + \left[x C_D Y_0(x) - (1 - C_D S x^2) Y_1(x) \right]^2 \right\} dx$$

Ec. 37.

Donde J_0 y J_1 = funciones de Bessel de primera clase, orden cero y primero, respectivamente y, Y_0 y Y_1 = funciones de Bessel de segunda clase, orden cero y primero, respectivamente.

La solución, ecuación 37, es difícil de usar y lleva al desarrollo de las “curvas tipo” o representación gráfica de soluciones analíticas. La primera de tales curvas tipo es la de Agarwal, R.G. et al² y Ramey, H.J.Jr.³ que se presenta en la figura C.2. Con esta base, posteriormente otras curvas tipo^{4,5,6}, como las de Gringarten-Bourdet, han sido desarrolladas, tratando de superar ciertas ambigüedades que pudieran surgir con uso de las primeras curvas tipo. La aplicación de estas curvas se verá en detalles en los apuntes de Análisis de Pruebas de Presión Transitoria, en preparación.

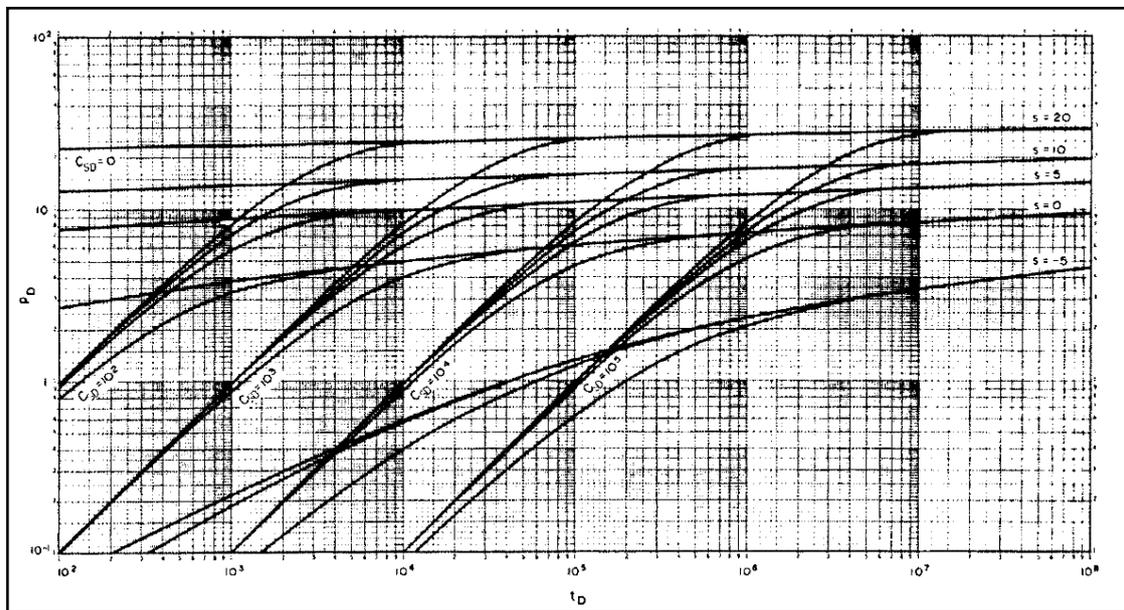


Fig. C.2. P_{wD} vs t_D , C_{SD} y s , para un sistema infinito radial con almacenamiento y efecto de piel³

Referencias

1. Spivey, John P. and Lee W. John: Applied Well Test Interpretation, SPE Textbook Series Vol. 13, SPE (2013). 6-7, Appendix B.
2. Agarwal, R.G., Al-Hussainy, R and Ramey, H.J. Jr.: “An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effects in Unsteady Liquid Flow: I. Analytical Treatment”. SPEJ (Sep. 1970) 278
3. Ramey, H.J.Jr.: “Short Time Well Test Data Interpretation in the Presence of Skin Effect and Wellbore Storage”. JPT (January 1970) 97.
4. Gringarten, A.C., Bourdet, D.P., Landel, P.A. et al: “A Comparison Between Different Skin and Wellbore Storage Types-Curve for Early-Time Transient Analysis”. Paper SPE 8205-MS, presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Las Vegas, Nevada, USA, 23-26 Sep 1979;
5. Bourdet, D.P. et al: “A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis”. World Oil, GPC. Houston. May (1983). 95-106.
6. Bourdet, D., Ayoub, J.A. and Pirard, Y.M.: “Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation”. SPEFE (June 1989) 293-302.

Los autores

Gabriel J. Colmont Moncayo

Ingeniero en Petróleo y Magister en Ciencias de Petróleo y Gas Natural. Cursos de Diplomado en Administración, Medioambiente, Formulación y Evaluación de Proyectos. Investigación sobre Proyectos de Recobro Mejorado de Petróleo, realizado en los Estados Unidos de Norteamérica. Trabajo presentado por dos ocasiones en las reuniones de la Sociedad de Ingenieros de Petróleo de USA, realizadas en Pittsburg, Pensilvania, (1977) y en Cody, Wyoming (1978). Pasantías profesionales en la Corporación Venezolana del Petróleo-CVP, perforación pozos de gas; y, en el Ente Nazionale Idrocarburi-ENI, empresas Snam, Agip, Italgas, Snamprogetti, Raffineria e Petrolchimiche. Varias publicaciones. Experiencia en contratación petrolera y ejercicio de docencia universitaria por más de 35 años.



César I. Pinoargote Rovello

Ingeniero en Petróleo (2010) de la Escuela Superior Politécnica del Litoral y la Universidad Politécnica de Madrid. Curso de Fuel Management System (2012) en Corea del Sur. Maestría en Ingeniería en Petróleo (2013) en Heriot-Watt University-Dubai Campus, Emiratos Árabes Unidos. Complementando su especialización ha realizado estudios de Magister en Relaciones Internacionales en la Universidad Andina Simón Bolívar (2011-2012); Procesos de Refinación, Micro y Macro Economía y, Programa de Liderazgo, en el país, Texas y Carolina del Norte, Estados Unidos. Ha realizado pasantías profesionales en Petrobell y Pacifpetrol; y cuenta con más de 5 años de experiencia en docencia universitaria en la UPSE y ESPOL así como de gestión comunitaria y desarrollo social en la Provincia de Santa Elena.



ISBN: 978-9942-776-03-7

