Técnicas de Integración

500

ejercicios resueltos de

integral indefinida

Primera Edición

Paulo César
Escandón Panchana

UNIVERSIDAD ESTATAL PENÍNSULA DE SANTA ELENA
UPSE
FIAT SCIENTIA, FIAT LUX

Serie de textos académicos de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería

Serie de Textos Académicos de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la UPSE

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN: 500 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRAL INDEFINIDA

Ing. Paulo César Escandón, MSc.

Primera Edición

Universidad Estatal Península de Santa Elena
ECUADOR
2017

Ficha Bibliográfica:

Paulo César Escandón Panchana
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN:
500 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRAL INDEFINIDA
Primera Edición, 2017
Editorial UPSE
ISBN: 978-9942-776-00-6
Formato: 17 x 24 cm # páginas: 330

Ediciones UPSE
Avenida La Libertad-Santa Elena
Ciudadela Universitaria UPSE
http://www.upse.edu.ec

ESTE LIBRO HA SIDO EVALUADO BAJO EL SISTEMA DE PARES ACADÉMICOS Y MEDIANTE LA MODALIDAD DE DOBLE CIEGO.

Portada: Manuel Martínez Santana.

IMPRESO EN ECUADOR
Printed in Ecuador

Presentación

Los años de experiencia como docente de matemáticas, me han llevado al reconocimiento de las diferentes dificultades que presenta el alumnado a la hora de comprender y aplicar las técnicas de integración en un curso de cálculo integral. Es por ello, que decidí volcar toda mi experiencia en un texto que fuera de ayuda para tales fines.

Esta obra de título "Técnicas de Integración, 500 ejercicios resueltos de integral indefinida" está dirigida a todo estudiante de ingeniería o ciencias exactas, así como para profesionales de ámbito no ingenieriles que presenten problemas ante la comprensión en la resolución de integrales indefinidas. Los lectores deben tener conocimientos en matemáticas básicas tales como, algebra, geometría, trigonometría, derivación, para la correcta comprensión del desarrollo del fundamento teórico de cada técnica de integración y así poder evaluar la aplicación favorable a cada problema planteado.

EL texto se divide en 6 capítulos que abordan las cinco técnicas de integración fundamentales y los principios básicos a partir de los que fueron desarrolladas. Capitulo a capitulo se presenta el desarrollo teórico de la técnica de integración y su aplicación mediante 500 ejercicios diferentes, resueltos paso a paso, a tal fin de abordar las diversas circunstancias que puedan darse al resolver una integral indefinida concreta.

Cabe destacar que en cada capítulo se proponen ejercicios para que el lector pueda resolverlos, con su respectiva respuesta, los mismos que simultanean las 5 técnicas de integración expuestas en los capítulos anteriores.

El Autor

CONTENIDO

AGRADECIMIENTO

Agradecimiento absoluto a mi creador Jehová, por la fortaleza y bendición que le da a mi vida.

A mi esposa e hijos por ser mi mayor inspiración de esfuerzo y sacrificio.

A la Universidad Estatal Península de Santa Elena por abrirme sus puertas para compartir mis conocimientos como docente de la asignatura Cálculo Integral.

A mis estudiantes de pregrado que, con su dedicación y el interés por las matemáticas, hicieron posible este ejemplar.

INTRODUCCIÓN

Es importante determinar el concepto y propiedades de la integral indefinida ya que permite realizar el proceso de integración de una forma específica.

Este libro detalla los pasos a seguir para resolver ejercicios de integral indefinida por cualquiera de las técnicas de integración.

Las técnicas de integración utilizan muchas veces teoremas básicos de las matemáticas, como una operación de suma, resta, división, raíz, potencia, factorización, trigonometría, etc., y la forma estratégica de cómo emplearla para la solución de un ejercicio de integrales.

Cabe destacar la importancia de estas técnicas, ya que las mismas sirven en el proceso de la integral definida, encontrar el área de una región plana, el volumen de un sólido de revolución, la solución de una ecuación diferencial, demostrar el teorema de la transformada de Laplace, encontrar series de Fourier, etc.

Sin duda alguna, este libro es preciso y oportuno para todas las asignaturas de CÁLCULO que se utilizan en la ingeniería básica de las universidades del Ecuador y del exterior.

Por tal razón, muestra en detalle las técnicas de integración y resuelve ejercicios paso a paso. Los ejercicios se han colocado en una progresión adecuada, de acuerdo con su nivel de dificultad y abarca gran parte de las técnicas de integración y las propiedades fundamentales del cálculo integral.

Además, considera teoremas básicos de diferenciación e identidades trigonométricas que son consideradas en el apartado apéndices.

1. INTEGRAL INDEFINIDA

1.1CONCEPTO DE INTEGRAL INDEFINIDA

Se tiene una función $\boldsymbol{f(x)}$, existe otra función $\boldsymbol{F'(x)}$ en todo el rango de x para el dominio de $\boldsymbol{f}$, que cumple la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$$

Entonces existe una función $\boldsymbol{F(x)}$ que se conoce como antiderivada o integral indefinida.

Para la representación de esta integral se utiliza la **simbología** $\int$, de tal forma que el teorema se representa de la siguiente manera:

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{F'(x)\,dx = F(x) + C}$$

Es decir que la función $\boldsymbol{f(x)}$ es integrable mientras que la función $\boldsymbol{F(x)}$ corresponde a la integral indefinida de esa función. A $\boldsymbol{C}$ se la conoce como una constante de integración o una constante arbitraria que no afecta en nada al proceso de integración indefinida ya que al derivar una constante toma el valor de 0, por el contrario si existiera una condición inicial para los valores del rango (x) se tendría un valor diferente en $\boldsymbol{C}$**.** (Purcell, E. et al., 2007)

Por ejemplo:

$f(x) = 8\,x^4 + \ 12\,x^2 + 24$

$F'(x) = 32x^3 + \ 24\,x$

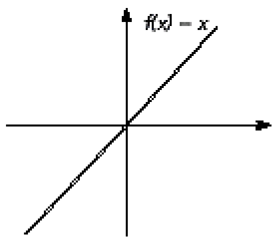
$\int (32x^3 + \ 24\,x)\ dx = \ \ 8\,x^4 + \ 12\,x^2 + C$

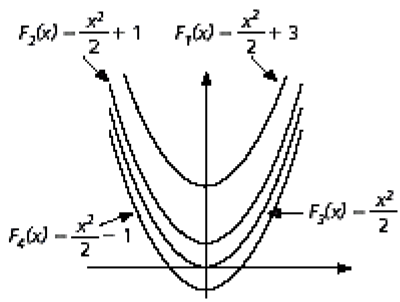
1.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Considerando la definición anterior, la integral indefinida de una función dada, se escribe siempre con una constante de integración. Si una función f(x) está definida en un intervalo y F(x) es un antiderivada (integral indefinida) de f(x), entonces el conjunto de todas las antiderivadas de f(x), viene dado por las funciones: $\boldsymbol{F(x) + C}$, siendo C una constante arbitraria o de integración.

Al interpretar el significado de la constante de integración, se observa el hecho de que la función f(x), es la derivada de la función F(x), es decir que, para cada valor de x, f(x) le asigna la pendiente de F(x). Si se dibuja en cada punto (x, y) del plano cartesiano un pequeño segmento con pendiente f(x), se obtiene un campo vectorial, como el que se muestra a continuación.

Figura 1. Esta figura muestra la gráfica de las diferentes antiderivadas de la función f(x)=x; es decir $\int \boldsymbol{x\, dx} = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{si\ y\ solo\ si\ F1(x)} = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{3}$; $\boldsymbol{F1(x)} = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{3}$; $\boldsymbol{F2(x)} = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{1}$; $\boldsymbol{F3(x)} = \frac{x^2}{2} + \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{F4(x)} = \frac{x^2}{2} - \boldsymbol{1}$





Entonces el problema de encontrar una función F(x), tal que su derivada sea la función f(x) se convierte en el problema de encontrar una función de la gráfica de la cual, en todos los puntos sea tangente a los vectores del campo.

En la figura 1 se observa cómo al variar la constante de integración se obtienen diversas funciones que cumplen esta condición y son traslaciones verticales unas de otras. (Purcell, E. et al., 2007)

1.3 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Según (Demidovich, B. et al., 2001) se tienen los siguientes teoremas:

La integral de una constante por una función: siendo $\boldsymbol{B}$ una constante y $f(x)$ una función.

$$\int B\,f(x)\;dx = \;B\int\;f(x)\;dx$$

La integral de la suma o resta de funciones:

$$\int\;\big(f(x) \pm g(x)\big)\;dx = \int\;f(x)\;dx\;\pm \int\;g(x)\;dx$$

La integral de una potencia:

$$\int x^n\;dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, siendo\;n\;\in R\;si\;solo\;si\;n \neq -1$$

1.4 INTEGRAL ESTÁNDAR

A continuación, se cita las siguientes integrales estándar o inmediata:

$\int e^u\;\,du = \;\,e^u\,du + C$

$\int \frac{1}{u}\;du = \;\ln u\;\;\,du + C$

$\int a^u\;\,du = \;\frac{a^u}{\ln a}du + C$

$\int Sen\, u \quad du = -Cos\, u\, du + C$

$\int Cos\, u \quad du = Sen\, u\, du + C$

En el **apéndice C** se encuentran más integrales estándar.

1.5TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Las técnicas de integración nos permiten obtener una función que sea integrable por medio de teoremas definidos durante el proceso de integración, como son:

Cambio de variable.

Integración por partes.

Integración Trigonométrica.

Sustitución Trigonométrica.

Fracciones Parciales.

2. CAMBIO DE VARIABLE

Este método de integración se utiliza cuando no se encuentra una integral inmediata o estándar.

Se tiene $\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$, se puede realizar el siguiente cambio de variable,

$\boldsymbol{x = u(t)\ entonces\ dx = u'(t)\,dt}$, donde $\boldsymbol{u(t)}$ es una función derivable.

Entonces $\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \int \boldsymbol{f(u(t))\ u'(t)\,dt}$

Para realizar el cambio de variable se debe reemplazar por la nueva función $\boldsymbol{u(t)}$ y completar el diferencial con respecto a la misma función en t, de tal forma que se pueda integrar inmediatamente. (Demidovich, B. et al., 2001)

2.1EJERCICIOS. - CAMBIO DE VARIABLE

$\boldsymbol{1. -\ Resolver}: \int \boldsymbol{sen^5\left(\frac{x}{3}\right) cos\left(\frac{x}{3}\right) dx}$

Solución.-

$$= 3\int u^5\,du = \frac{3u^6}{6} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{sen^6(x/3)}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{C}$$

Cambio de Variable

$$u = sen\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$du = \frac{1}{3} cos\left(\frac{x}{3}\right)\,dx$$

$\boldsymbol{2. -\ Resolver}: \int \boldsymbol{tan^7\left(\frac{x}{2}\right) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx}$

Solución.-

$$= 2\int u^7\,du = \frac{2u^8}{8} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{tan^8(x/2)}}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{C}$$

Cambio de Variable

$$u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$$

$3.-$ ***Resolver***: $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$

Solución.-

$$= 6\int u^5\,du = \frac{6u^6}{6} + C =$$

Respuesta: $\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^6 + C$

Cambio de Variable

$$u = \left(\frac{r^3}{18}-1\right)$$

$$du = \frac{r^2}{6}dr$$

$4.-$ ***Resolver***: $\int x^{1/2}\ sen\left(x^{3/2}+1\right)dx$

Solución.-

$$= \frac{2}{3}\int sen(u)du\ = -\frac{2}{3}\cos u + C =$$

Respuesta: $-\frac{2}{3}\cos\left(x^{3/2}+1\right) + C$

Cambio de Variable

$$u = x^{3/2}+1$$

$$du = \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx$$

$5.-$ ***Resolver***: $\int x^{1/3} sen\left(x^{4/3}-8\right) dx$

Solución.-

$$\frac{3}{4}\int sen(u)du\ = -\frac{3}{4}\cos u + C =$$

Respuesta: $-\frac{3}{4}\cos\left(x^{4/3}-8\right) + C$

Cambio de Variable

$$u = x^{\frac{4}{3}} - 8$$

$$du = \frac{4}{3}x^{1/3}\,dx$$

$6.-$ ***Resolver***: $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Solución.-

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} + \int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\int \frac{2(u-1)}{u}\,du + \int \frac{(u-1)^2(u-1)(2)}{u}\,du =$$

$$2\int \frac{u-1}{u}\,du + 2\int \frac{(u-1)^3}{u}\,du =$$

$$2\int \frac{u-1}{u}\,du + 2\int \frac{(u^3-3u^2+3u-1)}{u}\,du$$

$$2\left(\int \frac{u}{u}\,du - \int \frac{du}{u}\right) + 2\int \frac{u(u^2-3u+3)-1}{u}\,du =$$

Cambio de Variable

$$u = \left(1+\sqrt{x}\right)$$

$$du = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$x = (u-1)^2$$

$$2u-2\ln|u|+2\left(\int u^2-3\int u+3\int du-\int\frac{du}{u}\right)=$$

$$2u-2\ln|u|+\frac{2u^3}{3}-3u^2+6u-2\ln|u|+C=$$

$$2(1+\sqrt{x})-2\ln\left|(1+\sqrt{x})\right|+\frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3}-3(1+\sqrt{x})^2$$
$$+6(1+\sqrt{x})-2\ln\left|(1+\sqrt{x})\right|+C=$$

$$2+2\sqrt{x}-2\ln\left|(1+\sqrt{x})\right|+\frac{2}{3}(1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x})$$
$$-3(1+2\sqrt{x}+x)+6+6\sqrt{x}-2ln(1+\sqrt{x})+C=$$

$$-4\ln\left|(1+\sqrt{x})\right|+5+4\sqrt{x}+\frac{2}{3}-x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C=$$

Respuesta: $\boldsymbol{-4\ln\left|(1+\sqrt{x})\right|+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}-x+\frac{17}{3}+C}$

7. $\boldsymbol{-}$***Resolver***: $\boldsymbol{\int \cos\left(\frac{1}{2}x\right)dx}$

Cambio de Variable

$$u=\frac{1}{2}x$$
$$du=\frac{1}{2}dx$$

Solución.-

$$2\int \cos u\,du=2\,sen\,u+C=$$

Respuesta: $\boldsymbol{2\,sen\left(\frac{1}{2}x\right)+C}$

8. $\boldsymbol{-}$***Resolver***: $\boldsymbol{\int t^2\sqrt{t^3+1}\,dt}$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u=t^3+1$$
$$du=3t^2\,dt$$

$$\frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du=\frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du=\frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C=$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{2}{9}\sqrt{(t^3+1)^3}+C}$

9. $\boldsymbol{-}$***Resolver***: $\boldsymbol{\int\frac{x}{(3x^2-1)}\,dx}$

Cambio de Variable

$$u=3x^2-1$$
$$du=6x\,dx$$

Solución.-

$$=\frac{1}{6}\int\frac{du}{u^3}=\frac{1}{6}\int u^{-3}\,du=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{u^{-2}}{-2}+C=-\frac{u^{-2}}{12}+C=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:-\frac{(3x^2-1)^{-2}}{12}+C$$

$$\mathbf{10.-}\boldsymbol{Resolver}:\int\frac{y^2+2y}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}\,dy$$

Solución.-

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^{1/3}}=\frac{1}{3}\int u^{-1/3}\,du=\frac{1}{3}\frac{u^{2/3}}{2/3}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u^2}+C=$$

Cambio de Variable

$u=y^3+3y^2+4$

$du=3(y^2+2y)dy$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\frac{1}{2}\sqrt[3]{(y^3+3y^2+4)^2}+C$$

$$\mathbf{11.-}\boldsymbol{Resolver}:\int\frac{w}{(1+w)^{3/4}}\,dw$$

Solución.-

Cambio de Variable

$u=1+w$

$w=u-1$

$du=dw$

$$=\int\frac{u-1}{u^{3/4}}\,du=\int\frac{u}{u^{3/4}}\,du-\int\frac{du}{u^{3/4}}=$$

$$=\int u^{1-3/4}\,du-\int u^{-3/4}\,du=$$

$$=\int u^{1/4}\,du$$

$$-\int u^{-3/4}\,du=$$

$$=\frac{u^{5/4}}{5/4}-\frac{u^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}+C=\frac{4}{5}u^{5/4}-4\,u^{\frac{1}{4}}+C=$$

$$=\frac{4}{5}(1+w)^{5/4}-4(1+w)^{\frac{1}{4}}+C=$$

$$=\frac{4}{5}\sqrt[4]{(1+w)^4(1+w)}-4\sqrt[4]{(1+w)^1}+C=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\frac{4}{5}(1+w)\sqrt[4]{(1+w)}-4\sqrt[4]{(1+w)^1}+C$$

$$\mathbf{12.-Resolver}: \int x^2\sqrt{x-4}\,dx$$

Solución.-

$$= \int (u+4)^2\sqrt{u}\,du =$$

$$= \int (u^2+8u+16)\left(u^{\frac{1}{2}}\right)du =$$

$$= \int \left(u^{5/2}+8u^{3/2}+16\,u^{1/2}\right)du =$$

$$= \int u^{5/2}du + 8\int u^{\frac{3}{2}} + 16\int u^{1/2}\,du =$$

$$= \frac{u^{7/2}}{7/2} + 8\frac{u^{5/2}}{5/2} + 16\frac{u^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{7}\,u^{7/2} + \frac{16}{5}u^{5/2} + \frac{32}{3}u^{3/2} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{2}{7}\sqrt{(x-4)^7} + \frac{16}{5}\sqrt{(x-4)^5} + \frac{32}{3}\sqrt{(x-4)^3} + C$$

Cambio de Variable

$u = x - 4$

$x = u + 4$

$du = dx$

$$\mathbf{13.-Resolver}: \int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$$

Solución.-

$$= -2\int u^3\,du = -\,2\,\frac{u^4}{4} + C =$$

$$= -\,\frac{u^4}{2} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\,\frac{\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^4}{2} + C$$

Cambio de Variable

$u = \left(7 - \frac{r^5}{10}\right)$

$du = -\frac{r^4}{2}\,dr$

$$\mathbf{14.-Resolver}: \int \frac{1}{3+t^2}\,dt$$

Solución.-

$$= \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,tg^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{1}{\sqrt{3}}\,tg^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Cambio de Variable

$a = \sqrt{3}$

$u = t$

$du = dt$

$15.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{x\, sen\left(\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+4}}\ dx$

Solución.-

$$= \int sen\, u\ du = -\cos u + C =$$

Respuesta: $-\cos\left(\sqrt{x^2+4}\right) + C$

Cambio de Variable

$$u = (x^2+4)^{1/2}$$
$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ dx$$

$16.-\boldsymbol{Resolver}: \int x^6(7x^7 + \pi)^8\ sen(7x^7 + \pi)^9\ dx$

Solución.-

$$= \frac{1}{441}\int sen\, u\, du =$$

$$= -\frac{1}{441}\cos u + C =$$

Respuesta: $-\frac{1}{441}\cos\left(7x^7 + \pi\right)^9 + C$

Cambio de Variable

$$u = (7x^7 + \pi)^9$$
$$du = 441\ x^6(7x^7+\pi)^8\ dx$$

$17.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = \sqrt{2x+1}\,;\, u^2 = \left(\sqrt{2x+1}\right)^2\ ;\ \frac{u^2-1}{2} = x$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}\quad ;\quad du = \frac{dx}{u};\quad u\,du = dx$$

$$= \int \frac{u}{\left(\frac{u^2-1}{2}\right)u}\ du = \int \frac{du}{\left(\frac{u^2-1}{2}\right)} = \int \frac{2\,du}{u^2-1} =$$

$$= 2\int \frac{du}{u^2-1}\qquad ;\qquad -2\int \frac{du}{1-u^2} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}\right| + C =$$

$-\left(\ln\left|\sqrt{2x+1}+1\right|-\ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right|+C\right)=$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{-\ln\left|\sqrt{2x+1}+1\right|+\ln\left|\sqrt{2x+1}-1\right|+C}$

18. $\boldsymbol{-Resolver}$: $\displaystyle\int\frac{\ln|2x|\,dx}{\ln|4x|\,x}$

Solución.-

$$\int\frac{\ln|2x|-\ln|4x|}{x}\,dx=$$

$$\int\frac{\ln|2x|}{x}\,dx-\int\frac{\ln|4x|}{x}\,dx$$

$$\int u\,du-\int v\,dv=$$

$$\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}+C=$$

Cambio de Variable

$u=\ln 2x\,;\ v=\ln 4x;$

$du=\dfrac{dx}{x}\,;\ dv=\dfrac{dx}{x}$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{\dfrac{(\ln 2x)^2}{2}-\dfrac{(\ln 4x)^2}{2}+C}$

19. $\boldsymbol{-Resolver}$: $\displaystyle\int\frac{dx}{sen^2\,x\cos^4 x}$

Solución.-

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica

$sen^2x+\cos^2x=1$

$$=\int\frac{sen^2x+\cos^2x}{sen^2\,x\cos^4x}\,dx=$$

Se descompone la fracción en:

$$\int\frac{sen^2\,x}{sen^2\,x\cos^4x}dx+\int\frac{cos^2\,x}{sen^2\,x\cos^4x}\,dx=$$

$$\int\frac{1}{\cos^4x}\,dx+\int\frac{1}{sen^2\,x\cos^2x}\,dx=$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica

$sen^2x+\cos^2x=1$

$$\int\sec^4x+\int\frac{sen^2x+\cos^2x}{sen^2\,x\cos^2x}\,dx=$$

$$\int\sec^2x\sec^2x+\int\frac{sen^2\,x}{sen^2\,x\cos^2x}dx+\int\frac{cos^2\,x}{sen^2\,x\,cos^2x}\,dx=$$

$$\int \sec^2 x(1+\tan^2 x)dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{sen^2\, x}\ dx =$$

$$\int \sec^2 x + \sec^2 x \tan^2 x\, dx + \int \sec^2 x\, dx + \int \csc^2 x\ dx =$$

$$\int sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x \tan^2 x\ dx + \int \sec^2 x\, dx + \int \csc^2 x\ dx =$$

$$\int \sec^2 x \tan^2 x\ dx + 2\int sec^2 x\, dx + \int \csc^2 x\, dx =$$

Cambio de Variable

$\boldsymbol{u = \tan x}$

$\boldsymbol{du = \sec^2 x}$

$$\int u^2\, du + 2\int \sec^2 x\, dx + \int \csc^2 x\, dx =$$

$$\frac{u^3}{3} + 2\tan x - \cot x + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{tan^3 x}{3} + 2\tan x - \cot x + C}$

$\boldsymbol{20.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int \tan^3 x\ dx}$

Solución.-

$$\int \tan^2 x\ \tan x\ dx =$$

Cambio de Variable

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x dx;\ \ dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

Se aplica la identidad trigonométrica $\sec^2 x - 1 = \ tan^2 x$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\tan x\, dx = \int (\sec^2 x \tan x - \tan x)\ dx =$$

$$= \int \sec^2 x \tan x\, dx - \int \tan x\, dx =$$

$$= \int \sec^2 x\, u \frac{du}{\sec^2 x} - \int \tan x\, dx = \int u\, du - \int \tan x\, dx =$$

$$= \frac{u^2}{2} + \ln|\cos x| + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\dfrac{\boldsymbol{tan^2 x}}{\mathbf{2}} + \mathbf{ln}|\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{C}$

$\mathbf{21.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{cot^4}\,\boldsymbol{x}\;\boldsymbol{dx} =$

Solución.-

$$\textit{Cambio de Variable}$$
$$u = \cot x$$
$$du = -csc^2\,x\;\;dx\,;\;\;dx = -\frac{du}{\csc^2 x}$$

Se aplica la identidad trigonométrica $\;csc^2\text{x} - 1 = \cot^2 x$

$= \int \cot^2 x\;\cot^2 x\;\,dx = \int \cot^2 x\,(csc^2\text{x} - 1) =$

$= \int (\csc^2 x \cot^2 x - \cot^2 x)\;dx =$

$= \int (\csc^2 x \cot^2 x - \csc^2 x + 1\;)\;dx =$

$= \int \csc^2 x \cot^2 x\;dx - \int \csc^2 x\;dx + \int dx =$

$= \int \csc^2 x\;u^2\left(-\dfrac{du}{\csc^2 x}\right) + \cot x + x + C$

$= -\int u^2\;du + \cot x + x + C = -\dfrac{u^3}{3} + \cot x + x + C$

$\boldsymbol{Respuesta}: -\dfrac{\boldsymbol{cot^3 x}}{\mathbf{3}} + \mathbf{cot}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$

$\mathbf{22.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \dfrac{(\mathbf{2}\;\boldsymbol{sen\;w}) - \mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}\,\boldsymbol{w}}\;\boldsymbol{dw}$

Solución.-

Se descompone la fracción de origen en:

$$\textit{Cambio de Variable}$$
$$u = \cos w$$
$$du = -sen\;w\;dw$$
$$dw = -\frac{du}{sen\;w}$$

$= \int \dfrac{2\;sen\;w}{\cos^2 w} dw - \int \dfrac{dw}{\cos^2 w} =$

$= 2\int \dfrac{sen\;w}{\cos^2 w}\;dw - \int \sec^2 w\;dw =$

$= 2\int \dfrac{\cancel{sen\;w}}{u^2}\left(-\dfrac{du}{\cancel{sen\;w}}\right) - \int \sec^2 w\;dw =$

$$= -2\int \frac{du}{u^2} - \int \sec^2 w\, dw = -2\int u^{-2}\, du - \int \sec^2 w\, dw =$$

$$= -2\frac{u^{-1}}{-1} - \tan w + C = \frac{2}{u} - \tan w + C = \frac{2}{\cos w} - \tan w + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{2\sec w - \tan w + C}$

23.–*Resolver*: $\displaystyle\int \frac{dx}{sen^5 x \cos^3 x}$

Solución.-

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^5 x \cos^3 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\cancel{sen^2 x}}{\cancel{sen^5 x} \cos^3 x}\, dx + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{sen^5 x \cancel{\cos^3 x}}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{sen^3 x \cos^3 x} + \int \frac{1}{sen^5 x \cos x} =$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^3 x \cos^3 x}\, dx + \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^5 x \cos x}\, dx =$$

Se descompone la fraccion anterior en :

$$\int \frac{\cancel{sen^2 x}}{\cancel{sen^3 x} \cos^3 x} + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{sen^3 x \cancel{\cos^3 x}} + \int \frac{\cancel{sen^2 x}}{\cancel{sen^5 x} \cos x} + \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{sen^5 x \cancel{\cos x}} =$$

$$\int \frac{dx}{sen\, x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{sen^3 x \cos x} + \int \frac{dx}{sen^3 x \cos x} + \int \frac{cosx}{sen^5 x}\, dx =$$

$$\int \frac{dx}{sen\, x \cos^3 x} + 2\int \frac{dx}{sen^3 x \cos x} + \int \frac{cosx}{sen^5 x}\, dx =$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica

$sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen\, x \cos^3 x}\, dx + 2\int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^3 x \cos x}\, dx + \int \frac{cosx}{sen\, x} * \frac{1}{sen^4 x}\, dx =$$

$$\int \left(\frac{sen\,x}{\cos^3 x} + \frac{1}{sen\,x\cos x}\right) dx + 2\int \left(\frac{1}{sen\,x\cos x} + \frac{\cos x}{sen^3 x}\right) dx + \int \cot x\ \csc^4 x\ dx =$$

$$\int \frac{sen\,x}{\cos^3 x}\ dx + \int \frac{1}{sen\,x\cos x}\ dx + 2\int \frac{1}{sen\,x\cos x} dx + 2\int \frac{\cos x}{sen^3 x} + \int \cot x\ \csc^2 x\ \csc^2 x\ =$$

$$\int \frac{sen\,x}{\cos^3 x}\ dx + \int \frac{1}{sen\,x\cos x}\ dx + 2\int \frac{1}{sen\,x\cos x} dx + 2\int \frac{\cos x}{sen^3 x} + \int \cot x\ \csc^2 x\ (1+\cot^2 x)\, dx =$$

$$\int \left(\frac{sen\,x}{\cos x} * \frac{1}{\cos^2 x}\right) + 3\int \frac{dx}{sen\,x\cos x} + 2\int \frac{\cos x}{sen\,x} * \frac{1}{sen^2 x} + \int \cot x \csc^2 x + \cot^3 x \csc^2 x\ =$$

$$\int \tan x \sec^2 x\ + 6\int \frac{dx}{2\,sen\ x\cos x} + 2\int \cot x \csc^2 x\ dx + \int cotx \csc^2 x + \int \cot^3 x \csc^2 x$$

$$\int \tan x\, sec^2 x + 6\int \frac{dx}{sen\,(2x)} + 3\int \cot x \csc^2 x\, dx + \int \cot^3 x \csc^2 x\ \ dx =$$

Cambio de Variable

$u = \tan x \qquad du = \sec^2 x\, dx$

$v = 2x \qquad dv = 2\ dx$

$w = \cot x \qquad dw = -\csc^2 x\ dx$

$$= \int u\, du + 3\int \frac{1}{sen\ v}\ dv - 3\int w\ dw - \int w^3\ dw =$$

$$= \frac{u^2}{2} + 3\int \csc v\, dv - \frac{3}{2}\, w^2 - \frac{w^4}{4} + C$$

$$= \frac{tan^2 x}{2} + 3\ln|\csc v - \cot v| - \frac{3}{2}\cot^2 x - \frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{tan^2 x}}{\mathbf{2}} + \mathbf{3\ln|\csc 2}\boldsymbol{x} - \mathbf{\cot 2}\boldsymbol{x}\mathbf{|}$$
$$-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{\cot^2}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{\cot^4}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{24.}-\boldsymbol{Resolver}: \int (\boldsymbol{sen\,2x} + \boldsymbol{cos\,3x})$$

Solución.-

$$= \int sen\,2x\,dx + \int cos\,3x\;\,dx$$
$$= \int sen\,u\,\frac{du}{2} + \int cos\,v\,\frac{dv}{3}$$
$$= \frac{1}{2}\int sen\,u\,du + \frac{1}{3}\int cos\,v\;\,dv$$
$$= -\frac{1}{2}cos\,u + \frac{1}{3}sen\,v + C = -\frac{1}{2}cos\,2x + \frac{1}{3}sen\,3x + C$$
$$= \frac{-3\,cos\,2x + 2\,sen\,3x}{6} + C$$

Cambio de Variable

$$u = 2x \qquad v = 3x$$
$$du = 2\,dx \qquad dv = 3\,dx$$
$$dx = \frac{du}{2} \qquad dx = \frac{dv}{3}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\mathbf{2}\,\boldsymbol{sen}\,\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\,\boldsymbol{cos}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{25.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \sqrt{\boldsymbol{x}}\sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}}}\;\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

$$= \int \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(x.x^{1/2}\right)}\,dx$$
$$= \int \sqrt{x}\sqrt{1 + x^{3/2}}\,dx$$
$$= \int \left(x^{1/2}\right)\left(1 + x^{3/2}\right)^{1/2} dx$$
$$= \int \left(\cancel{x^{1/2}}\right)(u)^{1/2}\frac{2du}{3\cancel{x^{1/2}}}$$
$$= \frac{2}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{2}{3}.\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C$$

Cambio de variable

$$u = 1 + x^{3/2}$$
$$du = \frac{3}{2}\;x^{1/2}$$
$$dx = \frac{2du}{3x^{1/2}}$$
$$u = 1 + x^{3/2}$$
$$du = \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx$$
$$dx = \frac{2}{3}\frac{du}{x^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{4}{9}\left(1 + x^{3/2}\right)^{3/2} + C$$

$$= \frac{4}{9}\sqrt{\left(1 + x^{3/2}\right)^{3}} + C = \frac{4}{9}\left(1 + \sqrt{x^3}\right)\sqrt{1 + \sqrt{x^3}} + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{\frac{4}{9}\left(1 + x\sqrt{x}\right)\sqrt{1 + x\sqrt{x}} + C}$

$\mathbf{26.-Resolver}$: $\int \mathbf{sen\,\pi x \cos \pi x \, dx}$

Solución.-

$$= \int \operatorname{sen} u \cos u \frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int \operatorname{sen} u \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int \cancel{\operatorname{sen}(u)}\, v.\left(-\frac{dv}{\cancel{\operatorname{sen}(u)}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int v \, dv = -\frac{1}{\pi}.\frac{v^2}{2} + C = -\frac{v^2}{2\pi} + C$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos^2 u + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{-\frac{1}{2\pi}\cos^2 \pi x + C}$

Cambio de Variable

$u = \pi x$

$du = \pi dx$

$dx = \frac{du}{\pi}$

$v = \cos u$

$dv = -\operatorname{sen} u \, du$

$du = -\frac{dv}{\operatorname{sen} u}$

$\mathbf{27.-Resolver}$: $\int \mathbf{3 \csc^2 2x \, dx}$

Solución.-

$$= 3\int \csc^2 2x \, dx = \frac{3}{2}\int \csc^2 u \, du$$

$$= \frac{3}{2}(-\cot u) + C \qquad Reemplazamos\ u$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{-\frac{3}{2}\cot(2x) + C}$

Cambio de Variable

$u = 2x$

$du = 2dx$

$dx = \frac{du}{2}$

28.−*Resolver*: $\int \sec^2\left(\frac{1}{2}\pi t\right)\tan\left(\frac{1}{2}\pi t\right) dt$

Solución.-

$$= \frac{2}{\pi}\int \sec^2 u \tan u \, du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int v \cancel{\tan u} \frac{dv}{\cancel{\tan u}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int v \, dv = \frac{\cancel{2}}{\pi}.\frac{v^2}{\cancel{2}} + C$$

$$= \frac{v^2}{\pi} + C \text{ Se reemplaza } v$$

$$= \frac{\sec^2 u}{\pi} + C \text{ Se reemplaza } u$$

Cambio de Variable

$$u = \frac{1}{2}\pi t$$

$$du = \frac{1}{2}\pi dt$$

$$dt = \frac{2}{\pi}du$$

$$v = \sec^2 u$$

$$dv = \tan u \, du$$

$$du = \frac{dv}{\tan u}$$

***Respuesta*:** $\dfrac{\sec^2\left(\frac{1}{2}\pi t\right)}{\pi} + C$

29.−*Resolver*: $\int \dfrac{(\text{arc sen } x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Solución.-

$$= \int \frac{(\text{sen}^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{u^2}{\sqrt{1-x^2}}.\sqrt{1-x^2}\, du$$

$$= \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C$$

Cambio de Variable

$$u = \text{sen}^{-1} x$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dx = \sqrt{1-x^2}du$$

***Respuesta*:** $\dfrac{(\sin^{-1} x)^3}{3} + C$

30.−*Resolver*: $\int \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

Solución.-

$$= \int \frac{(e^x)^2}{\sqrt{e^x+1}}dx \quad \text{Se aplica propiedades de los exponentes}$$

$$= \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}.e^x dx \quad \text{Se realiza el cambio de variable}$$

$$= \int \frac{(u^2-1)}{u} . 2u\, du$$

Cambio de Variable
$u = \sqrt{e^x+1}$
$u^2 = e^x + 1$
$u^2 - 1 = e^x$
Se deriva ambos miembros
$2\, u\, du = e^x\, dx$

$$= \int (u^2-1)\ 2\, du$$

$$= \int (2u^2-2)\, du$$

$$= 2\int u^2 du - 2\int du$$

$$= 2\frac{(u^3)}{3} - 2u + C = 2u\left(\frac{u^2-3}{3}\right) + C$$

$$= 2\left(\sqrt{e^x+1}\right)\left(\frac{(e^x+1)-3}{3}\right) + C = 2\left(\sqrt{e^x+1}\right)\left(\frac{e^x+1-3}{3}\right) + C$$

$$= 2\left(\frac{e^x-2}{3}\right)\left(\sqrt{e^x+1}\right) + C$$

Respuesta: $\mathbf{\frac{2}{3}(e^x-2)\left(\sqrt{e^x+1}\right)+C}$

31.−***Resolver***: $\int \sqrt{\mathbf{1+sen^2(x-1)}}\,\mathbf{sen(x-1)\cos(x-1)\,dx}$

Solución.-

Cambio de Variable
$u = (x-1)$
$du = dx$
$v = \operatorname{sen}(u)$
$dv = \cos u\ \ du$
$du = \dfrac{dv}{\cos u}$

$$= \int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(u)}\, \operatorname{sen}(u) \cos(u)\, dx$$

$$= \int \sqrt{1+v^2}\, .v. \cancel{\cos(u)} \frac{dv}{\cancel{\cos(u)}}$$

$$= \int \sqrt{1+v^2}\, .v. dv$$

$$= \int \sqrt{w}\, .v. \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2}\int (w)^{1/2}\, dw$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{w^{3/2}}{3/2} + C \qquad \textit{Se reemplaza } w$$

Cambio de Variable
$w = 1 + v^2$
$dw = 2v\ dv$
$dv = \dfrac{dw}{2v}$

$$= \frac{1}{3}(1+v^2)^{3/2} + C \qquad \textit{Se reemplaza } v$$

$$= \frac{1}{3}(1+\operatorname{sen}^2 u)^{3/2} + C \qquad \textit{Se reemplaza } u$$

$$= \frac{1}{3}(1+\operatorname{sen}^2(x-1))^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2(x-1))^3} + C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2(x-1))^2(1+\operatorname{sen}^2(x-1))}+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{1}+\mathbf{sen^2}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}))\sqrt{(\mathbf{1}+\mathbf{sen^2}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}))}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{32.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{cos}\sqrt{\boldsymbol{\theta}}}{\sqrt{\boldsymbol{\theta}}\,\mathbf{sen^2}\sqrt{\boldsymbol{\theta}}}\, \boldsymbol{d\theta}$$

Solución.-

$$=\int \frac{\cos\theta^{1/2}}{\theta^{1/2}\operatorname{sen}^2\left(\theta^{1/2}\right)}\, d\theta$$

$$=\int \frac{\cos u}{\cancel{\theta^{1/2}}\operatorname{sen}^2(u)}\, 2\cancel{\theta^{1/2}}du$$

$$=2\int \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2(u)}du = 2\int \frac{\cancel{\cos(u)}}{v^2}.\frac{dv}{\cancel{\cos(u)}}$$

$$=2\int \frac{dv}{v^2}=2\int v^{-2}dv$$

$$=2\frac{v^{-1}}{-1}+C=-\frac{2}{v}+C \quad Se\ reemplaza\ \ v$$

$$=-2\frac{1}{\operatorname{sen} u}+C \quad Se\,reemplaza\ \ u$$

$$=-2\frac{1}{\operatorname{sen} u}+C=-2\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\theta^{1/2}\right)}+C$$

$$=-2\csc\theta^{1/2}+C \quad Se\ aplica\ equivalencia\ de: \ \frac{1}{sen}=csc$$

camb. variable

$$u=\theta^{1/2}$$

$$du=\frac{1}{2}\theta^{-1/2}\,d\theta$$

$$du=\frac{1}{2\theta^{1/2}}\,d\theta$$

$$d\theta = 2\theta^{1/2}\,du$$

Cambio de Variable

$$v=\operatorname{sen} u$$

$$dv=\cos u\ du$$

$$du=-\frac{dv}{\cos u}$$

$$u=\theta^{\frac{1}{2}}$$

$$du=\frac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$$d\theta=\frac{2du}{\theta^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\mathbf{2}\,\mathbf{csc}\sqrt{\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{33.}-\boldsymbol{Resolver}: \int (\boldsymbol{s}^3+\mathbf{2}\boldsymbol{s}^2-\mathbf{5}\boldsymbol{s}+\mathbf{5})(\mathbf{3}\boldsymbol{s}^2+\mathbf{4}\boldsymbol{s}-\mathbf{5})\ \boldsymbol{ds}$$

Solución.-

$$=\int u(3s^2+4s-5).\frac{du}{3s^2+4s-5}$$

$$=\int u\ du=\frac{u^2}{2}+C \qquad Se\ reemplaza\,u$$

Cambio de Variable

$$u=s^3+2\,s^2-5\,s+5$$

$$du=3s^2+4\,s-5\,ds$$

$$ds=\frac{du}{3s^2+4\,s-5}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{(\boldsymbol{s}^3+\mathbf{2}\boldsymbol{s}^2-\mathbf{5}\boldsymbol{s}+\mathbf{5})^2}{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C}$$

$$34.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{18\tan^2 x \sec^2 x}{(2+\tan^3 x)}\, dx$$

Solución.-

$$= \int \frac{18u^2}{(2+u^3)} . \cancel{\sec^2 x} \left(\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}\right)$$

$$= \int \frac{18u^2}{(2+u^3)} du = \int \frac{\cancel{18 u^2}}{(2+v)} . \frac{dv}{\cancel{3u^2}}$$

$$= \int \frac{6}{(2+v)} dv = \int \frac{6}{w} dw$$

$= 6\int \frac{dw}{w} = 6\ln w + C$ *Se reemplaza* w

$= 6\ln(2+v) + C$ *Se reemplaza* v

$= 6\ln(2+u^3) + C$ *Se reemplaza* u

Cambio de Variable

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\, dx$

$dx = \dfrac{du}{\sec^2 x}$

$v = u^3$

$dv = 3u^2 du$

$du = \dfrac{dv}{3u^2}$

$w = 2 + v$

$dw = dv$

Respuesta: $\mathbf{6\ln(2+\tan^3 x) + C}$

$$35.-\boldsymbol{Resolver}: \int \sqrt{\cot y}\, \csc^2 y\ dy$$

Solución.-

$$= \int \sqrt{u}\, \cancel{\csc^2 y} \left(-\frac{du}{\cancel{\csc^2 y}}\right)$$

$$= -\int \sqrt{u}\, du = -\int u^{1/2}\, du$$

$$= -\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C$$

$= -\dfrac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\dfrac{2}{3} u^{3/2} + C$ *Se reemplaza* u

Cambio de Variable

$u = \cot y$

$du = -\csc^2 y\, dy$

$dy = -\dfrac{du}{\csc^2 v}$

Respuesta: $-\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}(\mathbf{\cot y})^{3/2} + \boldsymbol{C}$

36.−*Resolver*: $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\cos\sqrt{t}+3\right)dt$

Cambio de Variable

$u = t^{1/2} + 3$

$du = \frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt$

$du = \frac{dt}{2t^{1/2}}$

$dt = 2t^{1/2}\,du$

Solución.-

$= \int \frac{1}{t^{1/2}}\cos\left(t^{1/2}+3\right)dt$

$= \int \frac{1}{\cancel{t^{1/2}}}\cos u\,.\,2\cancel{t^{1/2}}\,du = 2\int \cos u\;du$

$= 2\operatorname{sen} u + C = 2\operatorname{sen}\left(t^{1/2}+3\right)+C$

***Respuesta*: $\mathbf{2\,sen\left(\sqrt{t}+3\right)+C}$**

37.−*Resolver*: $\int \frac{1}{\theta^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\theta}\right)\cos\left(\frac{1}{\theta}\right)d\theta$

Solución.-

$= \int \frac{1}{\cancel{\theta^2}}\operatorname{sen}(u)\cos(u)\,.\,(-\cancel{\theta^2}du)$

$= -\int \operatorname{sen}(u)\cos(u)\,du$

$= -\int \cancel{\operatorname{sen}(u)}\,v\,.\left(-\frac{dv}{\cancel{\operatorname{sen} u}}\right)$

$= \int v\,dv = \frac{v^2}{2}+C$ *Se reemplaza v*

$= \frac{\cos^2 u}{2}+C$ *Se reemplaza u*

***Respuesta*:** $\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{1}{\theta}\right)+C$

Cambio de Variable

$u = \frac{1}{\theta}$

$du = -\frac{1}{\theta^2}\,d\theta$

$d\theta = -\theta^2 du$

$v = \cos u$

$dv = -\operatorname{sen} u\,du$

$du = -\frac{dv}{\operatorname{sen} u}$

38.−*Resolver*: $\int (\theta^4-2\theta^2+8\theta-2)(\theta^3-\theta+2)\,d\theta =$

Cambio de Variable

$u = \theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2$

$du = 4\theta^3 - 4\theta + 8\,d\theta$

$du = 4(\theta^3-\theta+2)\,d\theta$

$d\theta = \frac{du}{4(\theta^3-\theta+2)}$

Solución.-

$= \int u\cancel{(\theta^3-\theta+2)}\,.\,\frac{du}{4\cancel{(\theta^3-\theta+2)}}$

$= \int \frac{u}{4}\,du = \frac{1}{4}\int u\;du = \frac{1}{8}u^2 + C$

***Respuesta*:** $\frac{1}{8}\left(\theta^4-2\theta^2+8\theta-2\right)^2+C$

39. $-$***Resolver***: $\int t^3\left(1+t^4\right)^3 dt$

Solución.-

$= \int t^3u^3 . \frac{du}{4t^3} = \frac{1}{4}\int u^3\ du$

$= \frac{1}{4} . \frac{u^4}{4} = \frac{1}{16}u^4 + C =$

Respuesta: $\frac{1}{16}(1+t^4)^4 + C$

Cambio de Variable

$u = 1 + t^4$

$du = 4t^3 dt$

$dt = \frac{du}{4t^3}$

40. $-$***Resolver***: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Solución.-

$= \int \frac{1}{x\cancel{\sqrt{x^2-1}}} . \frac{\cancel{\sqrt{x^2-1}}}{x} du$

$= \int \frac{1}{x^2} du = \int \frac{1}{u^2+1} du =$

Se aplica la integral estándar

$\int \frac{1}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$

$= \tan^{-1}(u) + C$

Respuesta: $\tan^{-1}\left(\sqrt{x^2-1}\right) + C$

Cambio de Variable

$u = \sqrt{x^2-1}$

$du = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$

$du = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ dx$

$dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ du$

$u^2 = x^2 - 1$

$x^2 = u^2 + 1$

41. $-$ ***Resolver***: $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

Solución.-

$= \int \frac{e^u}{x^2} . x^2 du = \int \frac{e^u}{\cancel{x^2}} . \cancel{-x^2} du$

$= -\int e^u\, du = -e^u + C$

Respuesta: $-e^{1/x} + C$

Cambio de Variable

$u = \frac{1}{x}$

$du = -\frac{1}{x^2}\ dx$

$dx = -x^2\ du$

$$\mathbf{42.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{sen}^3\, \boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}}} \boldsymbol{dx} =$$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = \cos x$$

$$du = -\, sen\ x\ \ dx$$

$$dx = \frac{-\, du}{sen\ x}$$

$$= \int \frac{\text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$= \int \frac{\text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x}{\cos^{1/2} x} dx$$

Se aplica identidad trigonometrica pitagórica

$$= \int \frac{(1-\cos^2 x)\,\text{sen}\, x}{\cos^{1/2} x} dx \quad \textit{Se realiza el cambio de variable}$$

$$= \int \frac{(1-u^2)\cancel{\text{sen}\, x}}{\text{u}^{1/2}} . \left(-\frac{du}{\cancel{\text{sen}\, x}}\right) = -\int \frac{(1-u^2)}{\text{u}^{1/2}} du$$

$$= -\int (1-u^2)\text{u}^{-1/2} du = -\int \left(\text{u}^{-1/2} - u^{3/2}\right) du$$

$$= -\int \text{u}^{-1/2} du + \int u^{3/2}\, du = -\frac{\text{u}^{1/2}}{1/2} + \frac{u^{5/2}}{5/2} + C$$

$$= -2\text{u}^{1/2} + \frac{2u^{5/2}}{5} + C = -2\cos^{1/2} x + \frac{2\cos^{5/2} x}{5} + C$$

$$= -2\sqrt{\cos x} + \frac{2\sqrt{\cos^5 x}}{5} + C = -10\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{\cos^5 x} + C$$

$$= \frac{1}{5}\left(2\sqrt{\cos^5 x} - 10\sqrt{\cos x}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\left(\mathbf{2}(\mathbf{cos}^2 \boldsymbol{x})\sqrt{\mathbf{cos}\ \boldsymbol{x}} - \mathbf{10}\sqrt{\mathbf{cos}\, \boldsymbol{x}}\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{43.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\left(\mathbf{r}^{1/3} + \mathbf{2}\right)^{\mathbf{4}}}{\sqrt[3]{\mathbf{r}^2}}\ \mathbf{dr}$$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = r^{1/3} + 2$$

$$du = \frac{1}{3} r^{-2/3}\, dr$$

$$dr = \frac{3\, du}{r^{-2/3}}$$

$$= \int \frac{(\text{u})^4}{\cancel{\sqrt[3]{\text{r}^2}}} 3\cancel{\sqrt[3]{\text{r}^2}}\ \text{du} \ = 3\int \text{u}^4\ \text{du} = 3\,\frac{\text{u}^5}{5} + \text{c} =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\left(\mathbf{r}^{1/3} + \mathbf{2}\right)^{\mathbf{5}} + \mathbf{c}$$

44.−*Resolver*: $\displaystyle\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)dt$

Solución.-

$= \int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(\frac{t^2}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)dt =$

$= \displaystyle\int \left(t+\frac{1}{t}\right)^{3/2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt =$

$= \displaystyle\int u^{3/2}\,du = \frac{u^{5/2}}{5/2}+c = \frac{2}{5}\,u^{5/2}+c$

Cambio de Variable

$u = t+\frac{1}{t}$

$u = t + t^{-1}$

$du = 1-\frac{1}{t^2}\,dt$

***Respuesta*:** $\displaystyle\frac{2}{5}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{5/2}+C$

45.− *Resolver*: $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cdot \operatorname{sen}(\cos x)\,dx$

Cambio de Variable

$u = \cos x$

$du = -\operatorname{sen} x\,dx$

Solución.-

$= -\displaystyle\int \sin\,u\,du = \cos u + c =$

***Respuesta*:** $\cos(\cos x)+c$

46.−*Resolver*: $\displaystyle\int \sec x\cdot \tan x\cos(\sec x)\,dx$

Cambio de Variable

$u = \sec x$

$du = \sec x\tan x\,dx$

Solución.-

$= \displaystyle\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c =$

***Respuesta*:** $\operatorname{sen}(\sec x)+c$

47.− *Resolver*: $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx$

Solución.-

$= \displaystyle\int \frac{x\cdot x^2}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{u-4}{u^{3/2}}\,du =$

$= \displaystyle\frac{1}{2}\int (u-4)\,u^{-3/2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2} - 4\,u^{-3/2}$

Cambio de Variable

$u = x^2+4$

$x^2 = u-4$

$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} - 4\,\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right] + c = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}u^{1/2} + \cancel{8}\,u^{-1/2}\right] + c =$$

$$= u^{1/2} + 4u^{-1/2} + c =$$

Respuesta: $\sqrt{\mathbf{x^2+4}} + \dfrac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{x^2+4}}} + \mathbf{C}$

48.−*Resolver*: $\int \sqrt{3\,x^2+1}\;x\,dx$

Solución.-

Cambio de Variable

$u = 3x^2 + 1$

$du = 6x\,dx$

$$= \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

Respuesta: $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\,(3x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

49.−*Resolver*: $\displaystyle\int \frac{4\,\mathrm{sen}\,x}{(1+\cos x)^2}\,dx$

Solución.-

Cambio de Variable

$u = 1 + \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$= -\int \frac{4\,du}{u^2} = -4\int u^{-2}\,du =$$

$$= -4\,\frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{4}{u} + c =$$

Respuesta: $\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{1+\cos x}} + \mathbf{c}$

50.−*Resolver*: $\displaystyle\int \frac{y^2-1}{(y^3-3y)^2}\,dy$

Solución.-

Cambio de Variable

$u = y^3 - 3y$

$du = 3\,y^2 - 3$

$du = 3(y^2-1)\;dy$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3(y^2-1)}{(y^3-3y)^2}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u} + c =$$

Respuesta: $-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3(y^3-3y)}} + \mathbf{C}$

51.—*Resolver*: $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}}\, dx$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = 1 - 2x^2$$
$$du = -4\,x\,dx$$
$$x^2 = -\frac{u-1}{2}$$
$$x^2 = \frac{1-u}{2}$$

$$= \int x^3(1-2x^2)^{-1/2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int 4x \cdot x^2\ (1-2x^2)^{-1/2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1-u}{2}\right)(1-2x^2)^{-1/2}\, 4x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1-u}{2}\right) u^{-1/2}\, du = -\frac{1}{4}\int \frac{u^{-1/2} - u^{1/2}}{2}\, du$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int u^{-1/2} - u^{1/2}\ du = -\frac{1}{8}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} - \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + c$$

$$= -\frac{1}{\cancel{8}}\left[\cancel{2}\,u^{1/2} - \frac{\cancel{2}}{3}\ u^{3/2}\ \right] + c = -\ \frac{1}{4}\ u^{1/2} + \frac{1}{12}\ u^{3/2} + c =$$

$$-\frac{1}{4}(1-2x^2)^{1/2} + \frac{1}{12}(1-2x^2)^{3/2} + c$$

***Respuesta*:** $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\sqrt{\mathbf{1-2x^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\sqrt{(\mathbf{1-2x^2})^3} + \mathbf{c}$

52.—*Resolver*: $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3-3x^2+1}}$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = x^3 - 3x^2 + 1$$
$$du = 3x^2 - 6x$$
$$du = 3(x^2+2x)\ dx$$

$$= \int (x^2+2x)\ (x^3-3x^2+1)^{-1/2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-1/2}\ du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}u^{1/2}$$

***Respuesta*:** $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{x^3-3x^2+1}} + \mathbf{C}$

$$\mathbf{53.-\textit{Resolver}:\int \frac{sec^2\ 3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ dt}$$

Solución.-

$$= \int sec^2\left(3t^{1/2}\right)\cdot t^{-1/2}\ dt = \frac{2}{3}\int sec^2 u\ du$$

$$= \frac{2}{3}\tan u + c = \frac{2}{3}\tan 3t^{1/2} + c$$

Cambio de Variable

$$u = 3t^{1/2}$$

$$du = \frac{3}{2}t^{-1/2}\ dt$$

$$\textbf{\textit{Respuesta}}: \mathbf{\frac{2}{3}\tan 3\sqrt{t} + c}$$

$$\mathbf{54.-\textit{Resolver}:\int sen\ 2x\ \sqrt{2-\cos 2x}\ dx}$$

Solución.-

$$= \frac{1}{2}\int 2\,sen\ 2x\sqrt{2-\cos 2x}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ d$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + c = \frac{u^{3/2}}{3} + c = \frac{(2-\cos 2x)^{-/2}}{3} + c$$

Cambio de Variable

$$u = 2 - cos\ 2x\ \ dx$$

$$du = 2\ sen\ 2x\ \ dx$$

$$\textbf{\textit{Respuesta}}: \mathbf{\frac{\sqrt{(2-\cos 2x)^3}}{3} + C}$$

$$\mathbf{55.-\textit{Resolver}:\int x\,(x^2+1)\sqrt{4-2x^2-x^4}\ dx}$$

Solución.-

$$= -\frac{1}{4}\int -4\ (x^3+x)\sqrt{4-2x^2-x^4}\ dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \sqrt{u}\ du = -\frac{1}{4}\int u^{1/2}\ du =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + c = -\frac{1}{6}u^{3/2} + c = -\frac{1}{6}\left(4-2x^2-x^4\right)^{3/2} + c$$

Cambio de Variable

$$u = 4 - 2x^2 - x^4$$

$$du = -4x - 4x^3$$

$$du = -4(x + x^3)dx$$

$$\textbf{\textit{Respuesta}}: \mathbf{-\frac{1}{6}\sqrt{(4-2x^2-x^4)^3} + C}$$

56.$-$***Resolver***: $\int \mathbf{y\sqrt{y^2-4}\ \ dy}$

Solución.-

$\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ \ du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + c = \frac{u^{3/2}}{3} + c = \frac{(y^2-4)^{3/2}}{3} + c$

Cambio de Variable
$u = y^2 - 4$
$du = 2y\ \ dy$

Respuesta: $\mathbf{\frac{\sqrt{(y^2-4)^3}}{3} + C}$

57.$-$***Resolver***: $\int \mathbf{z\,(2z^2-3)^{1/3}\,dz}$

Solución.-

Cambio de Variable
$u = 2z^2 - 3$
$du = 4z\,dz$

$= \frac{1}{4}\int u^{1/3}\ du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c =$

$= \frac{3}{16}u^{4/3} + c = \frac{3}{16}(2z^2-3)^{4/3} + c$

Respuesta: $\mathbf{\frac{3\sqrt[3]{(2z^2-3)^4}}{16} + c}$

58.$-$***Resolver***: $\int \mathbf{\frac{t^3}{\sqrt{t^4+9}}\ dt}$

Solución.-

$= \frac{1}{4}\int \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+9}}\ dt = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^{1/2}} =$

$= \frac{1}{4}\int u^{-1/2}\ du = \frac{1}{4} \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + c =$

Cambio de Variable
$u = t^4 - 9$
$du = 4t^3\ dt$

$= \frac{1}{2}u^{1/2} + c = \frac{1}{2}(t^4+9)^{1/2} + c =$

Respuesta: $\mathbf{\frac{\sqrt{t^4+9}}{2} + C}$

$\mathbf{59.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \mathbf{(x+1)\tan^2(3x^2+6x)\sec^2(3x^2+6x)\,dx}$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = tan\,(3x^2 + 6x)$$
$$du = (6x + 6)\,sec^2(3x^2 + 6x)\,dx$$
$$du = 6(x + 1)\,sec^2(3x^2 + 6x)\,dx$$

$$\frac{1}{6}\int 6\,(x+1)\tan(3x^2+6x)\sec^2(3x^2+6x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int u^2\,du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{18}u^3 + c =$$

Respuesta: $\displaystyle\mathbf{\frac{1}{18}\tan^3(3x^2+6x)+c}$

$\mathbf{60.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \mathbf{\frac{y^3}{(1-2y^4)^5}\,dy}$

Solución.-

$$-\tfrac{1}{8}\int -8\,y^3(1-2y^4)^{-5}dy =$$

$$-\frac{1}{8}\int u^{-5}\,du = -\frac{1}{8}\cdot\frac{u^{-4}}{-4} + c = \frac{1}{32u^4} + c =$$

Cambio de Variable

$$u = 1 - 2y^4$$
$$du = -8y^3\,dy$$

Respuesta: $\displaystyle\mathbf{\frac{1}{32(1-2y^4)^4}+c}$

$\mathbf{61.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \mathbf{\frac{s}{\sqrt{3s^2+1}}\,ds}$

Solución.-

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6s}{\sqrt{3s^2+1}}\,ds = \frac{1}{6}\int u^{-1/2}\,du =$$

$$\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + c = \frac{u^{1/2}}{3} + c =$$

Cambio de Variable

$$u = 3s^2 + 1$$
$$du = 6s\,ds$$

Respuesta: $\displaystyle\mathbf{\frac{\sqrt{3s^2+1}}{3}+c}$

$$\mathbf{62.-\mathit{Resolver}}: \int \frac{\mathbf{16x^4}}{\sqrt[3]{\mathbf{25x^5+4}}}\,\mathbf{dx}$$

Solución.-

Cambio de Variable
$u = 25x^5 + 4$
$du = 125\,x^4\,dx$

$$= 16\int \frac{x^4}{(25x^5+4)^{1/3}}\,dx =$$

$$= 16\cdot\frac{1}{125}\int\frac{du}{u^{1/3}} = \frac{16}{125}\int u^{-1/3}\,du =$$

$$= \frac{16}{125}\cdot\frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{\cancel{16}}{125}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}u^{2/3} + c = \frac{24}{125}u^{2/3} + c$$

$$= \frac{24}{125}(25x^5+4)^{2/3} + c =$$

$$\mathbf{\mathit{Respuesta}}: \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{125}}\sqrt[3]{\mathbf{(25x^5+4)^2}} + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{63.-\mathit{Resolver}}: \int \left(\mathbf{e^{x/a} + e^{-x/a}}\right)^{\mathbf{2}}\,\mathbf{dx}$$

Solución.-

$$= \int e^{2x/a} + 2\,e + e^{-2x/a}\,dx = \int e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}\,dx =$$

$$= \int e^{2x/a}\,dx + \int 2\,dx + \int e^{-2x/a}\,dx$$

$$= \int e^u\,\frac{a\,du}{2} + \int 2\,dx + \int e^u\cdot\left(-\frac{a}{2}du\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\int e^u\,du + \int 2\,dx - \frac{a}{2}\int e^u\,du$$

$$= \frac{a}{2}e^u + 2x - \frac{a}{2}e^u + c =$$

$$\mathbf{\mathit{Respuesta}}: \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e}^{\mathbf{2x/a}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{e}^{\mathbf{-2x/a}} +$$

Cambio de Variable
$u = \frac{2x}{a}$; $du = \frac{2}{a}\,dx$
$\frac{a\,du}{2} = dx$
$u = -\,{}^{2x}/_{a};$
$du = -\frac{2}{a}dx$
$-\frac{a\,du}{2} = dx$

$$\mathbf{64.-\mathit{Resolver}}: \int \frac{(\boldsymbol{a^x} - \boldsymbol{b^x})^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{a^x b^x}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

$$= \int \frac{(a^{2x} - 2a^x b^x + b^{2x})}{a^x b^x}\,dx$$

$$= \int \frac{a^{2x}}{a^x b^x} dx - \int \frac{2\, a^x b^x}{a^x b^x} dx + \int \frac{b^{2x}}{a^x b^x} dx$$

Cambio de Variable
$u = x$
$du = dx$

$$= \int \frac{a^x}{b^x} dx - \int 2\, dx + \int \frac{b^x}{a^x} dx =$$

$$= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx - \int 2\, dx + \int \left(\frac{b}{a}\right)^x dx =$$

Se aplica la siguiente integral estándar $\int a^u\, du = \dfrac{a^u}{\ln a}$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^u}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} - 2x + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^u}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln a - \ln b} - 2x + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln b - \ln a} + c$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln a - \ln b} - 2x - \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a - \ln b} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\dfrac{1}{\ln a - \ln b}\left(\dfrac{a^x}{b^x} - \dfrac{b^x}{a^x}\right) - 2x + c}$

65.—*Resolver*: $\boldsymbol{\int e^{-(x^2+1)} \cdot x\, dx}$

Solución.-

Cambio de Variable
$u = (x^2 + 1)$
$du = 2x\, dx$
$\dfrac{du}{2} = x\, dx$

$$= \int e^{-u} \cdot \frac{du}{2} = = \frac{1}{2}\int e^{-u}\, du = \frac{1}{2}(-e^{-u}) + c$$

$$-\frac{1}{2} e^{-(x^2+1)} + c =$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\ \ e^{(x^2+1)}} + c}$

66.—*Resolver*: $\boldsymbol{\int x \cdot 7^{x^2} dx}$

Solución.-

Cambio de Variable
$u = x^2$
$du = 2x\, dx$
$\dfrac{du}{2} = x\, dx$

$$= \int 7^u\, du \quad \text{Se aplica} \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$= \int 7^u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7^u}{\ln 7}\right) + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{7^{x^2}}{\ln 7} + c =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\dfrac{7^{\,x^2}}{2 \ln 7} + c}$

67.− *Resolver*: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$

Solución.-

Cambio de Variable
$u = x$
$du = dx$

$$= \int \frac{dx}{(x)^{1/n}} = \int (x)^{-1/n}\,dx$$

$$= \int u^{-1/n}\,du \; = u^{-\frac{1}{n}+1} + c = \frac{u^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}} + c \; =$$

Respuesta: $\displaystyle\frac{n\,x^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} + c$

68.− *Resolver*: $\displaystyle\int (\mathrm{n\,x})^{\frac{1-\mathrm{n}}{\mathrm{n}}}\,\mathrm{dx}$

Solución.-

Cambio de Variable
$u = nx$
$du = n\,dx$
$\frac{du}{n} = dx$

$$= \int u^{\frac{1-\mathrm{n}}{\mathrm{n}}} \cdot \frac{du}{n} = \frac{1}{n}\int u^{\frac{1-\mathrm{n}}{\mathrm{n}}}\,du \; =$$

$$= \frac{1-\mathrm{n}}{\mathrm{n}} + 1 = \frac{1-n+n}{n} \; = \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{u^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} + c = \frac{n}{n} \cdot u^{\frac{1}{n}} + c \; = (n\,x)^{1/n} + c =$$

Respuesta: $\sqrt[n]{n\,x} + c$

69.− *Resolver*: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{a}^{2\mathrm{x}} - 1}{\sqrt{\mathrm{a}^{\mathrm{x}}}}\,dx$

Cambio de Variable
$u = \frac{3x}{2}$
$du = \frac{3}{2}\,dx$
$u = -\frac{x}{2}$
$du = -\frac{dx}{2}$

Solución.-

$$= \int \frac{a^{2x}}{a^{x/2}}\,dx - \int \frac{dx}{a^{x/2}}$$

$$= \int a^{2x} \cdot a^{-\frac{x}{2}}\,dx - \int a^{-\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$\int a^{\frac{3}{2}x}\,dx - \int a^{-\frac{x}{2}}\,dx \quad Se\ aplica \int a^u\,du =$$

$$= \int a^u\,\frac{2}{3}\,du - \int a^u \cdot -2\,du$$

$$=\frac{2}{3}\int a^u\,du+2\int a^u\,du=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^u}{\ln a}+2\cdot\frac{a^u}{\ln a}+c$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{a^{\frac{3}{2}x}}{\ln a}+\frac{2\,a^{-x/2}}{\ln a}=\frac{2}{\ln a}\left(\frac{a^{\frac{3}{2}x}}{3}+a^{-x/2}\right)+c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ \frac{\mathbf{2}}{\ln \boldsymbol{a}}\left(\frac{\boldsymbol{a}^{\frac{3}{2}x}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^{x/2}}\right)+\boldsymbol{c}$$

70.$-$***Resolver***: $\int\left(\mathbf{a}^{2/3}-\mathbf{x}^{2/3}\right)^3\mathbf{dx}$

Solución.-

$$=\int\left(a^{2/3}\right)^3-3\left(a^{2/3}\right)^2\left(x^{2/3}\right)+3\left(a^{2/3}\right)\left(x^{2/3}\right)^2-\left(x^{2/3}\right)^3dx=$$

$$=\int a^2\,dx-\int 3\,a^{4/3}\,x^{2/3}\,dx+\int 3\,a^{2/3}\,x^{4/3}\,dx-\int x^2\,dx=$$

$$=a^2x-3\int a^{4/3}\,u^{2/3}\,du+3\int a^{2/3}\,u^{4/3}\,du-\int u^2\,du$$

$$=a^2x-3\,a^{4/3}\,\frac{x^{5/3}}{5/3}+3\,a^{2/3}\,\frac{x^{7/3}}{7/3}-\frac{x^3}{3}+c$$

$$=a^2x-\frac{9}{5}a^{4/3}\cdot x^{5/3}+\frac{9}{7}\,a^{2/3}\cdot x^{7/3}-\frac{x^3}{3}+c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\frac{\mathbf{105}\,\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{x}-\mathbf{189}\,\boldsymbol{a}^{4/3}\cdot\boldsymbol{x}^{5/3}+\mathbf{135}\,\boldsymbol{a}^{2/3}\cdot\boldsymbol{x}^{7/3}-\mathbf{35}\,\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{105}}+\boldsymbol{c}$$

71.$-$***Resolver***: $\int\left(\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{1}\right)\left(\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{x}}+\mathbf{1}\right)$

Solución.-

Cambio de Variable
$u=x$
$du=dx$

$$=\int\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+1\right)dx$$

$$=\int\left(x\sqrt{x}-x+x+1\right)dx$$

$$=\int\left(x\sqrt{x}+1\right)dx=\int x\sqrt{x}\,dx+\int dx=\int x(x)^{1/2}\,dx+\int dx$$

$$= \int u^{3/2}\, du + \int dx = \frac{u^{5/2}}{5/2} + x + c$$

$$= \frac{2}{5} x^{5/2} + x + c = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 \cdot x^2 \cdot x} + x + c = \frac{2\,x^2\,\sqrt{x}}{5} + x + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{2\,x^2\,\sqrt{x} + 5x}}{\mathbf{5}} + \boldsymbol{c}$$

72.− *Resolver*: $\displaystyle\int \frac{\mathbf{e^{\theta}}}{\mathbf{c + a\,e^{\theta}}}\,\mathbf{d\theta}$

Solución.-

$$= \int \frac{du}{a} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}\ln u + c =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\mathbf{ln}|\boldsymbol{c} + \mathbf{a\,e^{\theta}}| + \boldsymbol{c}$$

Cambio de Variable

$u = c + \mathrm{a\,e^{\theta}}$

$du = \mathrm{a\,e^{\theta}\,d\theta}$

$\frac{du}{a} = \mathrm{e^{\theta}\,d\theta}$

73.−*Resolver*: $\displaystyle\int \frac{\mathbf{3x^2 + 2}}{\mathbf{x - 1}}\,\mathbf{dx}$

Solución.-

Se descompone la fracción de orígen en:

$$= \int \frac{3x^2}{x-1}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = 3\int \frac{x^2}{x-1}dx + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

A x^2 se le suma 1 y se le resta 1:

$$= 3\int \frac{(x^2-1)+1}{x-1}dx + 2\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= 3\int \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 3\left(\int \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} + \frac{1}{x-1}\right)dx + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 3\left(\int (x+1)\,dx + \int \frac{1}{(x-1)}\,dx\right) + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 3\left(\int x\,dx + \int dx + \int \frac{dx}{x-1}\right) + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= 3\left(\int u\,du + \int dx + \int \frac{du}{u}\right) + 2\int \frac{du}{u}$$

Cambio de Variable

$u = x$

$du = dx$

$u = x - 1$

$du = dx$

$$= 3\frac{u^2}{2} + 3x + 3\ln u + 2\ln u + c$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 3x + 3\ln(x-1) + 2\ln(x-1) + c$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 3x + 5\ln(x-1) + c = \frac{3x^2 + 6x + 10\ln(x-1)}{2} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{3x^2 + 6x + \ln(x-1)^{10}}{2} + c}$

74.− *Resolver*: $\int \sqrt{m + ny}\, dy$

Cambio de Variable

$u = m + ny$

$du = n\, dy$

$\frac{du}{n} = dy$

Solución.-

$$= \int (m+ny)^{1/2}\, dy$$

$$= \int u^{1/2}\, \frac{du}{n} = \frac{1}{n}\int u^{1/2}\, du = \frac{1}{n}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3n}u^{3/2} + c = \frac{2}{3n}\sqrt{(m+ny)^3} + c$$

$$= \frac{2}{3n}\sqrt{(m+ny)^2\,(m+ny)} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{2}{3n}(m+ny)\sqrt{m+ny} + c}$

75.− *Resolver*: $\int x^n\, \sqrt{ax^{n+1} + b}\;\; dx$

Cambio de Variable

$u = ax^{n+1} + b$

$du = a(n+1)x^n\, dx$

$\frac{du}{a(n+1)} = x^n\, dx$

Solución.-

$$= \int x^n(ax^{n+1} + b)^{1/2}\, dx \quad =$$

$$= \int u^{1/2}\, \frac{du}{a(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}\int u^{1/2}\, du = \frac{1}{a(n+1)}\cdot\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + c$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{a(n+1)}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}$$

$$= \frac{2}{3a(n+1)}\sqrt{(ax^{n+1}+b)^3}+c$$

$$= \frac{2}{3a(n+1)}\sqrt{(ax^{n+1}+b)^2\ \ (ax^{n+1}+b)}+c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3a(n+1)}}(\boldsymbol{ax^{n+1}+b})\sqrt{(\boldsymbol{ax^{n+1}+b})}+\boldsymbol{c}$$

$\mathbf{76.-}$ ***Resolver***: $\int \mathbf{csc^2 3x \cdot \cos 3x\ \ dx}$

Solución.-

Se aplica el equivalente de $\csc \mathrm{x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\mathrm{x}}$

$$= \int \frac{1}{sen^2 3x}\cdot \cos 3x\ dx$$

$$= \int \frac{du}{3\ u^2}\ \ = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-2}\ du\ \ \ = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+c = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+c$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u}+c\ \ \ = -\frac{1}{3\operatorname{sen}3x}+c\ =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{csc}\ \mathbf{3}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$$

Cambio de Variable

$$u = \operatorname{sen} 3x$$

$$du = 3\cos 3x\ dx$$

$$\frac{du}{3} = \cos 3x\ \ dx$$

$\mathbf{77.-}$ ***Resolver***: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}\,\mathbf{ln}\,\mathbf{3}\boldsymbol{x}}$

Solución.-

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\ln 3x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{3\ du}{u} = \ \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \ \ \frac{3}{2}\ln u + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\ \mathbf{ln}|\mathbf{ln}\,\mathbf{3}\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{c}$$

Cambio de Variable

$$u = \ln 3x$$

$$du = \frac{1}{3x}$$

$$3du = \frac{1}{x}dx$$

78.– *Resolver*: $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$

Solución.-

$= \int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot x^{-3}\,dx$

$= \int e^{u} \cdot \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}\int e^{u}\,du =$

$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c =$

Respuesta: $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}} + c$

Cambio de Variable

$u = x^{-2}$

$du = -2x^{-3}\,dx$

$-\frac{du}{2} = x^{-3}\,dx$

79.– *Resolver*: $\int \left(\sqrt[3]{e^x}\right)^4 dx$

Solución.-

$= \int \left(\sqrt[3]{e^x}\right)^4 dx = \int e^{4x/3}\,dx$

$= \int e^{u}\frac{3}{4}du = \frac{3}{4}\int e^{u}\,du =$

$\frac{3}{4}(e^{u}) + c = \frac{3}{4}e^{\frac{4x}{3}} + c$

Respuesta: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{e^{4x}} + c$

Cambio de Variable

$u = \frac{4x}{3}$

$du = \frac{4}{3}dx$

$\frac{3}{4}du = dx$

80.– *Resolver*: $\int \cot x\,(2 + \ln|\operatorname{sen} x|)\,dx$

Solución.-

$= \int u\,du = \frac{u^{1+1}}{1+1} + c =$

$\frac{u^2}{2} + c = \frac{(2 + \ln(\operatorname{sen} x))^2}{2} + c$

$= \frac{4 + 4\ln|\operatorname{sen} x| + \ln|\operatorname{sen} x|^2}{2}$

Cambio de Variable

$u = 2 + \ln(\operatorname{sen} x)$

$du = \cot x\,dx$

Se aplica propiedad de los logaritmos $n\ln|m| = \ln|m|^n$

$= \frac{4}{2} + \frac{4}{2}ln|\operatorname{sen} x| + \frac{\ln|\operatorname{sen} x|}{2} = 2 + 2\,ln|\operatorname{sen} x| + ln|\operatorname{sen} x| + c$

$= 2 + 3\,ln|\text{sen}\,x| + c \quad =$

Respuesta: $\mathbf{2 + ln|sen\,x|^3 + c}$

81.– *Resolver*: $\displaystyle\int \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(x+1)^3}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{(x+1)^2}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{(x+1)}}\right)\mathbf{dx} =$

Solución.-

$$= \int \frac{2}{(x+1)^3}\,dx - \int \frac{3}{(x+1)^2}dx + \int \frac{4}{(x+1)}dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{(x+1)^3} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} + 4\int \frac{dx}{(x+1)}$$

$$= 2\int \frac{du}{u^3} - 3\int \frac{du}{u^2} - 4\int \frac{du}{u}$$

Cambio de Variable

$u = x + 1$

$du = dx$

$$= 2\int u^{-3}\,du - 3\int u^{-2}\,du - 4\ln u + c$$

$$= 2\cdot\frac{u^{-2}}{-2} - 3\cdot\frac{u^{-1}}{-1} - 4\ln u + c$$

$$= -(x+1)^{-2} + 3(x+1)^{-1} - 4\ln u + c$$

Respuesta: $\mathbf{-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)} - 4\ln|x+1| + c}$

82.–*Resolver*: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$

Solución.-

Cambio de Variable

$u = \sqrt{t}$

$u^2 = t$

$2\,u\,du = dt$

$$= \int \frac{u}{u^2+1}\;2udu = 2\int \frac{u^2}{u^2+1}\;du$$

Se aplica artificio matemático

$$= 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}.\,du = 2\int \left(\frac{u^2+1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1}\right) du$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right) du = 2\left(\int du - \int \frac{1}{u^2+1}\,du\right)$$

$$= 2\int du - 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

Se aplica integral básica $\int \frac{1}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}tan^{-1}\frac{u}{a}$

$$= 2u - 2(tan^{-1}u) + C = 2\sqrt{t} - 2tan^{-1}\sqrt{t} + C$$

Respuesta: $\mathbf{2\left(\sqrt{t} - tan^{-1}\sqrt{t}\right) + C}$

83.− *Resolver*: $\int \boldsymbol{t(3t+2)^{3/2}dt}$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = \sqrt{3t+2}$$
$$u^2 = 3t+2$$
$$t = \frac{u^2-2}{3}$$
$$2udu = 3dt$$
$$dt = \frac{2u\,du}{3}$$

$$= \int t(3t+2)^{1/2\,\cdot\,3}dt = \int t\left(\sqrt{3t+2}\right)^3 dt$$
$$= \int \frac{u^2-2}{3}\ \ u^3\ \ \frac{2u}{3}du$$
$$= \int \frac{2}{9}\ \ (u^2-2)\,u^4\ \ du = \frac{2}{9}\int (u^6 - 2u^4)\,du$$
$$= \frac{2}{9}\left(\int u^6\,du\ -2\int u^4\,du\right)$$
$$= \frac{2}{9}\left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5}\right) + C = \frac{2}{63}u^7 - \frac{4}{45}u^5 + C$$
$$= \frac{2}{63}(3t+2)^{1/2\,\cdot\,7} - \frac{4}{45}(3t+2)^{1/2\,\cdot\,5} + C$$
$$= \frac{2}{63}(3t+2)^{7/2} - \frac{4}{45}(3t+2)^{5/2} + C$$

Se pueden expresar los términos en radicales:

$$= \frac{2}{63}\sqrt{(3t+2)^6(3t+2)} - \frac{4}{45}\sqrt{(3t+2)^4(3t+2)} + C$$
$$= \frac{2}{63}(3t+2)^3\sqrt{(3t+2)} - \frac{4}{45}(3t+2)^2\sqrt{(3t+2)} + C$$

***Respuesta*:** $\boldsymbol{(3t+2)^2\sqrt{(3t+2)}\left(\frac{2}{63}(3t+2) - \frac{4}{45}\right) + C}$

84.− *Resolver*: $\int \boldsymbol{x(1-x)^{2/3}\,dx}$

Solución.-

Cambio de Variable

$$u = (1-x)^{1/3}$$
$$u^3 = (1-x)$$
$$x = 1-u^3$$
$$3u^2du = -dx$$
$$dx = -3u^2du$$

$$= \int x(1-x)^{1/3\,\cdot\,2}\,dx$$
$$= \int (1-u^3)(u)^2(-3u^2du)$$
$$= -3\int (1-u^3)u^4du = -3\int (u^4-u^7)du$$
$$= -3\left(\int u^4du - \int u^7du\right) = -3\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^8}{8}\right) + C$$
$$= \frac{-3(1-x)^{1/3\,\cdot\,5}}{5} + \frac{3(1-x)^{1/3\,\cdot\,8}}{8} = \frac{3(1-x)^{8/3}}{8} - \frac{3(1-x)^{5/3}}{5}$$

$$= \frac{15(1-x)^{8/3} - 24(1-x)^{5/3}}{40}$$

$$= \frac{1}{40}\left(15(1-x)^{8/3} - 24(1-x)^{5/3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{40}\left(15(1-x)^{8/3} - 24(1-x)^{5/3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{40}\left(15\sqrt[3]{(1-x)^6(1-x)^2} - 24\sqrt[3]{(1-x)^3(1-x)^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{40}\left(15(1-x)^2\ \sqrt[3]{(1-x)^2} - 24(1-x)\ \sqrt[3]{(1-x)^2}\right) + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{40}(1-x)\sqrt[3]{(1-x)^2}(15(1-x)-24)+C}$

85.− *Resolver*: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{sen^2 x - 6sen\,x + 12}\,dx$

Solución.-

$$\int \frac{du}{u^2 - 6u + 12} = \int \frac{du}{(u-3)^2 + 3} =$$

$$\int \frac{dx}{x^2+3} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\,tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,tan^{-1}\left(\frac{u-3}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Cambio de Variable

$u = sen\ x$

$du = \cos x\ dx$

$x = u - 3$

$dx = du$

$a^2 = 3$

$a = \sqrt{3}$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}\,tan^{-1}\left(\frac{sen\,x-3}{\sqrt{3}}\right)+C}$

86.−*Resolver*: $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Solución.-

$$\int (u^2-1)\,u\,2u\,du = 2\int (u^2-1)\,u^2\,du =$$

$$2\left(\int u^4 du - \int u^2 du\right) = 2\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right] + C =$$

$$\frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^5 - \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^3 + C =$$

Cambio de Variable

$u = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$u^2 = x + 1$

$x = u^2 - 1$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{2}{5}\sqrt[2]{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{(x+1)^3} + C}$

$$\mathbf{87.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int \frac{\boldsymbol{dt}}{\sqrt{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{e}}$$

Solución.-
Se aplica el siguiente artificio

$$\frac{u-e+e}{u+e}=\frac{u}{u+e}$$

Cambio de Variable

$$u=\sqrt{t}$$
$$u^2=t$$
$$dt=2u\,du$$
$$a=u+e$$
$$da=du$$

$$\int \frac{2u}{u+e}\,du=$$

$$2\int \frac{u}{u+e}\,du=2\int \frac{u-e+e}{u+e}\,du=$$

$$2\left(\int \frac{u+e}{u+e}\,du-\int \frac{e}{u+e}\,du\right)=2\left(\int du-e\int \frac{du}{u+e}\right)=$$

$$2\left(u-e\int \frac{da}{a}\right)=2(u-e\ln|a|)+C$$

$$2\left(\sqrt{t}-e\ln|u+e|\right)+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{t}}-\mathbf{2}\ \boldsymbol{e}\ln\left|\sqrt{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{e}\right|+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{88.-}\ \boldsymbol{Resolver}\text{:}\int \boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\ \boldsymbol{dx}=$$

Solución.-
Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\frac{1}{2}};\ \boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{x}+\mathbf{1};\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1};\ \boldsymbol{dx}=\mathbf{2}\boldsymbol{udu}$$

$$=\int (u^2-1)\,u\,2u\,du=2\int (u^2-1)\,u^2\,du=$$

$$=2\left(\int u^4du-\int u^2du\right)$$

$$=2\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]+C=\frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^5-\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^3+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{:}\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\sqrt[2]{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{5}}}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt[2]{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}}}+\boldsymbol{C}$$

$$89.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{e^{4t}+2e^{2t}-e^{t}}}{\boldsymbol{e^{2t}+1}}\boldsymbol{dt}$$

Solución.-

Se realiza una división de polinomios:

$$\begin{array}{l|l} e^{4t}+2e^{2t}-e^{t} & e^{2t}+1 \\ \cline{2-2} \underline{-e^{4t}-e^{2t}\qquad} & e^{2t}+1 \\ \qquad e^{2t}-\ e^{t} & \\ \underline{\quad -e^{2t}\qquad -1} & \\ \qquad\quad -\ \boldsymbol{e^{t}-1} & \end{array}$$

$$=\int (e^{2t}+1)dt-\int \frac{e^{t}+1}{e^{2t}+1}dt=$$

Se aplica el siguiente artificio a la segunda integral:

$$=\int (e^{2t}+1)dt-\int \frac{e^{t}+1-1}{e^{2t}+1-1}dt=$$

$$=\int (e^{2t}+1)dt-\int \frac{e^{t}}{e^{2t}}dt=\int e^{2t}\,dt+\int dt-\int e^{-t}dt$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=2t}\,;\ \boldsymbol{du=2\,dt};\quad \boldsymbol{u=\ -t};\ \ \boldsymbol{du=\ -dt}$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du+\int dt+\int e^{u}dt$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\quad \frac{\boldsymbol{e^{2t}}}{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{t}+\boldsymbol{e^{-t}}+\boldsymbol{C}$$

$$90.-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{y(2y+5)^{10}dy}=\int \left(\frac{u-5}{2}\right)u^{10}\,du$$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=2y+5;du=2dy;y=\frac{u-5}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int (u-5)u^{10}du=\frac{1}{2}\int u^{11}du-\frac{1}{2}\int 5u^{10}du$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u^{11+1}}{(11+1)}-\frac{5}{2}\frac{u^{10+1}}{(10+1)}=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } \frac{\mathbf{(2y+5)^{12}}}{\mathbf{22}}-\frac{\mathbf{5(2y+5)^{11}}}{\mathbf{21}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{91.}-\boldsymbol{Resolver}\text{: } \int \frac{\sqrt{\boldsymbol{y}}+\ln \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}}\,\boldsymbol{dy}=$$

Solución.-

Se descompone la expresión de la siguiente manera:

$$=\int \frac{\sqrt{\boldsymbol{y}}}{\boldsymbol{y}}dy+\int \frac{\ln y}{y}dy$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u}=\ln \boldsymbol{y}\ ;\ \boldsymbol{du}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{dy}$$

$$=\int y^{1/2}y^{-1}dy+\int u\,du=\int y^{-1/2}dy+\frac{u}{1+1}^{1+1}$$

$$=\frac{y^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{(\ln y)^2}{2}=\frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}}+\frac{(\ln y)^2}{2}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } \mathbf{2}\boldsymbol{y}^{1/2}+\frac{(\ln \boldsymbol{y})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{92.}-\boldsymbol{Resolver}\text{: } \int \boldsymbol{e^y}\sqrt{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{e^y}}\,\boldsymbol{dy}=$$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e^y};\ \boldsymbol{du}=\boldsymbol{e^y}\,\boldsymbol{dy};\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{bu};\ \ \boldsymbol{dv}=-\boldsymbol{bdu}$$

$$=\int \sqrt{a-bu}\,du=\int -\frac{\sqrt{v}}{b}dv=-\frac{1}{b}\int \sqrt{v}\,dv=$$

$$=-\frac{1}{b}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)=-\frac{1}{b}\ \frac{(a-be^y)^{3/2}}{\frac{3}{2}}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } -\frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{e^y})^{3/2}}{\mathbf{3}\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{93.-\textit{Resolver}}: \int (e^{y/c}+1)^{1/3}\, e^{y/c} dy =$$

Solución.-
Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=\frac{y}{c}; du=\frac{1}{c}dy; dy=cdu;\ v=(e^{u}+1); dv=e^{u}du}$$

$$=\int \sqrt[3]{e^{u}+1}e^{u}cdu \ = c\int \sqrt[3]{v}dv = c\int v^{1/3}dv =$$

$$=c\left(\frac{v^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right)=c\frac{3(e^{y/c}+1)^{4/3}}{4}+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{3c(e^{y/c}+1)^{4/3}}}{\boldsymbol{4}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{94.-\textit{Resolver}}: \int \frac{\tan^{-1}(\frac{x}{2})}{4+x^{2}}dx$$

Solución.-
Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right); du=\ \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^{2}}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4+x^{2}}{4}}=\frac{2}{x^{2}+4}}$$

$$=2\int u\ du=2\frac{u^{1+1}}{1+1}=2\frac{(tan^{-1})^{2}(\frac{x}{2})}{2}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{(tan^{-1})^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+C}$$

$$\mathbf{95.-\textit{Resolver}}: \int \mathbf{sen}(\boldsymbol{m+nx})\boldsymbol{dx}$$

Solución.-
Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=m+nx;\ du=ndx;}$$

$$=\frac{1}{n}\int sen(u)du=\frac{1}{n}(-\cos(u))+C=-\frac{1}{n}\cos(\mathrm{m+nx})+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{\cos(m+nx)}}{\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{96.-\mathit{Resolver}}: \int \frac{\cos(my)}{sen^6(my)} dy$$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$u = sen\,(my); du = m\cos\,(my)dy$$

$$= \frac{1}{m}\int \frac{du}{u^6} = \frac{1}{m}\int u^{-6}du = \frac{1}{m}\frac{u^{-6+1}}{-6+1}$$

$$\mathbf{Respuesta}: -\frac{sen^{-5}(my)}{5m} + C$$

$$\mathbf{97.-\mathit{Resolver}}: \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$u = 1 + \ln x\,; du = \frac{1}{x}dx$$

$$= \int \sqrt[3]{u}\,du = \frac{u^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} =$$

$$\mathbf{Respuesta}: \frac{3(1+\ln x)^{4/3}}{4} + C$$

$$\mathbf{98.-\mathit{Resolver}}: \int \frac{dx}{sen^2(x)\,cos^2(x)} =$$

Solución.-

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica $sen^2(x)cos^2(x) = 1$

$$= \int \frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{sen^2(x\,)cos^2(x)} dx$$

$$= \int \frac{sen^2(x)}{sen^2(x)cos^2(x)} dx + \int \frac{cos^2(x)}{sen^2(x)cos^2(x)} dx$$

$$= \int \frac{1}{cos^2(x)} dx + \int \frac{1}{sen^2(x)} dx = \int sec^2(x)dx + \int csc^2(x)dx$$

$$\mathbf{Respuesta}: tan(x) - cot(x) + C$$

$$\mathbf{99.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int\sqrt{\frac{\ln(\mathbf{y}+\sqrt{\boldsymbol{y}^{2}+\mathbf{1}})}{\mathbf{1}+\boldsymbol{y}^{2}}}\,\boldsymbol{dy}$$

Solución.-

$$=\int\frac{\sqrt{\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)}}{\sqrt{1+y^{2}}}dy$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u}=\ln\left(\boldsymbol{y}+\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{y}^{2}}\right);\boldsymbol{du}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{y}^{2}+\mathbf{1}}}\boldsymbol{dy}$$

$$=\int u^{1/2}\,du=\frac{u^{1/2+1}}{\frac{3}{2}}=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{: }\frac{\mathbf{2}\ \boldsymbol{ln}^{3/2}(\boldsymbol{y}+\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{y}^{2}})}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{100.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int\boldsymbol{e}^{-\,\boldsymbol{tan}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{sec}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}=$$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{tan}\,(\boldsymbol{x});\boldsymbol{du}=-\boldsymbol{Sec}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$$

$$=-\int e^{u}du=-e^{u}+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{: }-\boldsymbol{e}^{(-\tan(x))}+\boldsymbol{C}$$

2.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE CAMBIO DE VARIABLE

Utilizando la técnica de integración del cambio de variable, resuelva las siguientes integrales:

1.- $\displaystyle\int \frac{Cos\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\, Sen^2\sqrt{\beta}}\, d\beta$

2.- $\displaystyle\int \frac{Cos^5\, 2\theta}{\sqrt{Sen\, 2\theta}}\, d\theta$

3.- $\displaystyle\int \frac{\gamma - \sqrt{Tan^{-1}(2\gamma)}}{1+4\gamma^2}\, d\gamma$

4.- $\displaystyle\int \frac{d\rho}{2+3\, Cos^2\rho}$

5.- $\displaystyle\int \frac{e^{Sen^{-1}t} - 4t + 2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$

Respuestas a los ejercicios propuestos

1: $-2\, Csc\sqrt{\beta} + C$

2: $Sen^{1/2}(2\theta) - \frac{2}{5} Sen^{5/2}(2\theta) + \frac{1}{9} Sen^{9/2}(2\theta) + C$

3: $\frac{1}{8}\ln|1+4\gamma^2| - \frac{1}{3}\left(Tan^{-1}(2\gamma)\right)^{\frac{3}{2}} + C$

4: $\frac{1}{\sqrt{10}} Tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\, Tan\, \rho}{\sqrt{5}}\right) + C$

5: $e^{Sen^{-1}t} + 4\sqrt{1-t^2} + 2\, Sen^{-1}t + C$

3. INTEGRACIÓN POR PARTES

Esta técnica de integración parte del producto de dos funciones, se identifica a $\boldsymbol{u = u(x)}$; $\boldsymbol{v = v(x)}$. Recordemos la derivada del producto de dos funciones (primera función por la derivada de la segunda función más la segunda función por la derivada de la primera):

$$\boldsymbol{d(u \quad v) = u \quad v' + v \quad u'}$$

Se integra ambos miembros de la igualdad:

$$\int \boldsymbol{d(u \quad v)} = \int \boldsymbol{u \quad v' + v \quad u'}$$

$$\int \boldsymbol{d(u \quad v)} = \int \boldsymbol{u \quad v'} + \int \boldsymbol{v \quad u'}$$

Entonces se tiene que:

$$\boldsymbol{(u)(v)} = \int \boldsymbol{u \quad v'} + \int \boldsymbol{v \quad u'}$$

$$\boldsymbol{(u)(v)} - \int \boldsymbol{v \quad u'} = \int \boldsymbol{u \quad v'}$$

Reemplazando con respecto al diferencial de x, tenemos lo siguiente:

$\int \boldsymbol{u \quad dv = (u)(v)} - \int \boldsymbol{v \quad du}$ **Integración por partes**

Es decir para poder integrar por partes se necesita identificar la función u con su respectivo diferencial du y el diferencial dv con su respectiva función v. (Demidovich, B. et al., 2001)

3.1EJERCICIOS DE INTEGRACIÓN POR PARTES

$\mathbf{1.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int(\mathbf{x^2-2x+5})\mathbf{e^{-x}dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=x^2-2x+5} \quad \boldsymbol{du=2x-2\ dx}$

$\Rightarrow \int \boldsymbol{dv}=\int \boldsymbol{e^{-x}dx} \qquad \boldsymbol{v=-\ e^{-x}}$

$=-(x^2-2x+5)e^{-x}+\int(2x-2)\ e^{-x}dx$

$=-(x^2-2x+5)e^{-x}+\left(-(2x-2)(e^{-x})+\int e^{-x}2\ dx\right)$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=(2x-2)} \quad \boldsymbol{du=2\ dx}$

$\Rightarrow \int \boldsymbol{dv}=\int \boldsymbol{e^{-x}\ dx} \qquad \boldsymbol{v=-e^{-x}}$

$=-(x^2-2x+5)e^{-x}-(2x-2)(e^{-x})+2\int e^{-x}\ dx$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=-x} \quad \boldsymbol{du=-dx}$

$=-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-5e^{-x}-2xe^{-x}+2e^{-x}+(-2e^{-x})+c$

$=-x^2e^{-x}+2xe^{-x}-5e^{-x}-2xe^{-x}+2e^{-x}-2e^{-x}+c$

$=-x^2e^{-x}-5e^{-x}+c \quad =$

$\boldsymbol{Respuesta}\text{:}\ \boldsymbol{e^{-x}(-x^2-5)+c}$

$\mathbf{2.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int \mathbf{x^3\,e^{-x/3}\,dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=x^3} \quad \boldsymbol{du=3x^2\ dx}$

$\Rightarrow \int \boldsymbol{dv}=\int \boldsymbol{e^{-x/3}\ dx}\ ; \quad \boldsymbol{v=-3e^{-x/3}} \qquad \boldsymbol{u=-x/3} \quad \boldsymbol{du=-1/3\,dx}$

$=-3x^3e^{-x/3}+\int 3x^2\cdot 3e^{-x/3}\ dx$

$$= -3x^2e^{-x/3} + 9\int x^2 \cdot e^{-x/3}\,dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^2 \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int e^{-x/3}\,dx \qquad v = -3e^{-x/3}}$

$$= -3x^2e^{-x/3} + 9\left(-x^2 3e^{-x/3} + \int 3e^{-x/3} \cdot 2x\,dx\right)$$

$$= -3x^2e^{-x/3} + 9\left(-3x^2e^{-x/3} + 6\int e^{-x/3} \cdot x\,dx\right)$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x \quad du = dx \qquad \Rightarrow \qquad \int dv = \int e^{-x/3}\,dx \qquad v = -3e^{-x/3}}$

$$= -3x^2e^{-x/3} + 9\left(-3x^2e^{-x/3} + 6\left(-3xe^{-x/3} + 3\int e^{-x/3}\,dx\right)\right)$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = -x/3 \quad du = -1/3\,dx}$

$$= -3x^2e^{-x/3} + 9\left(-3x^2e^{-x/3} + 6\left(-3xe^{-x/3} + 3\left(-3e^{-x/3}\right)\right)\right) + c$$

$$= -3x^2e^{-x/3} + 9\left(-3x^2e^{-x/3} + 6\left(-3xe^{-x/3} - 9e^{-x/3}\right)\right) + c$$

$$= -3x^2e^{-x/3} + 9\left(-3x^2e^{-x/3} - 18xe^{-x/3} - 54e^{-x/3}\right) + c$$

$$= -3x^3e^{-x/3} - 27x^2e^{-x/3} - 162xe^{-x/3} - 486e^{-x/3} + c$$

$\boldsymbol{Respuesta: -3e^{-x/3}(x^3 + 9x^2 + 54x + 162) + c}$

$\boldsymbol{3.- Resolver: \int x\,\mathrm{sen}\,x \cos x \;\; dx}$

Solución.-

Se utiliza la identidad trigonométrica del ángulo doble:

$$\boldsymbol{= \int x \cdot \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2x\,dx \; = \frac{1}{2}\int x \; \cdot \mathrm{sen}\,2x}$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x \quad du = dx \qquad \Rightarrow \qquad \int dv = \int \mathrm{sen}\,2x\,dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x}$

$$= \frac{1}{2}\left(-x \cdot \frac{1}{2}\cos 2x - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right) + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(-\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\mathbf{cos}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{sen}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{c}$$

$$\mathbf{4.} - \boldsymbol{Resolver}: \int (\mathbf{x^2 + 5x + 6})\,\mathbf{cos\,2x\,dx} =$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = (x^2 + 5x + 6) du = 2x + 5} \Rightarrow \int \boldsymbol{dv} = \int \mathbf{cos\,2}\boldsymbol{x\,dx} \quad \boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{sen\,2}\boldsymbol{x}$$

$$= x^2 + 5x + 6 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \int \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,(2x+5)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 6)\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,(2x+5)\,dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = 2x + 5} \quad \boldsymbol{du = 2\,dx} \Rightarrow \int \boldsymbol{dv} = \int \mathbf{sen\,2}\boldsymbol{x\,dx} \quad \boldsymbol{v} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{cos\,2}\boldsymbol{x}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2 + 5x + 6)\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{2}\left(2x + 5\left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\tfrac{1}{2}\cos 2x \cdot 2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}(x^2 + 5x + 6)\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{2}\left(2x + 5\left(-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right) + \int \cos 2x\,dx\right)$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2x \;\; du = 2\,dx}$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 6)\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\left(2x + 5\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 6)\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}(2x + 5) \cdot \cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 6)\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}(2x + 5) \cdot \cos 2x + c$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x)\left(x^2 + 5x + 6 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}(2x + 5\cos 2x) + c$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \left(\frac{2x^2 + 10x + 12 - 1}{2} \right) + \frac{1}{4} (2x + 5) \cos 2x + c$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \left(\frac{2x^2 + 10x + 11}{2} \right) + \frac{1}{4} (2x + 5) \cos 2x + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{2x^2 + 10x + 11}{4} \cdot \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} (2x + 5) \cos 2x + c}$

5.-*Resolver*: $\int \mathbf{x^2 \ln x \ dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int x^2 \ dx \quad v = \frac{x^3}{3}}$

$$= \ln x \cdot \frac{1}{3} x^3 - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \ = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c}$

6.-*Resolver*: $\int \mathbf{(x^2 - 2x + 3) \ln x \, dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln x \quad du = {}^1\!/_x \ dx \Rightarrow \int dv = \int x^2 - 2x + 3 \ dx \quad v = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x}$

$$\ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) - \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

$$\ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) - \int \frac{x^2}{3} - x + 3 \, dx$$

$$\ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + c}$

$$\mathbf{7.-\textit{Resolver}}: \int \mathbf{x \ln \frac{1-x}{1+x}\ dx}$$

Solución.-

Se aplica propiedad de logaritmos naturales:

$$= \int x\ln(1-x)\,dx - \int x\,ln\,(1+x)\,dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\mathbf{1)}\quad \boldsymbol{u = \ln(1-x)\quad du = -\frac{1}{1-x}\,dx \qquad \Rightarrow \int dv = \int x\,dx \quad v = \frac{x^2}{2}}$$

$$= \ln(1-x)\frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1-x} = \ln(1-x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1-x}dx$$

$$= \ln(1-x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \boldsymbol{\ln(1-x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + x - \ln(1-x)\right)}$$

$$\mathbf{2)}\quad \boldsymbol{u = \ln(1+x)\quad du = \frac{1}{1+x}dx \qquad \Rightarrow \int dv = \int x\,dx \quad v = \frac{x^2}{2}}$$

$$= \ln(1+x)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

$$= \ln(1+x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x - 1 + \frac{1}{1+x}dx$$

$$= \ln(1+x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right)$$

$$= \boldsymbol{\ln(1+x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \ln\frac{(1+x)}{2}}$$

$\boldsymbol{unimos\ 1\ y\ 2}$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$$
$$- \frac{1}{2}\ln(1-x)$$
$$- \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{x^2}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - x$$

$$= \ln(1-x)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \ln(1+x)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) - x + c$$

$$= \ln(1-x)\left(\frac{x^2-1}{2}\right) - \ln(1+x)\left(\frac{x^2-1}{2}\right) - x\ + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \left(\frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\mathbf{2}}\right)\ln\left(\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}}\right) - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

$$\mathbf{8.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{ln^2 x}}{\mathbf{x^2}}\mathbf{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\mathbf{u} = (\ln x)^2 \quad du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \int dv = \int x^{-2}\, dx \qquad v = -x^{-1}$$

$$= -ln^2 x \cdot \frac{1}{x} - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{2\ln x}{x} =$$

$$-\frac{ln^2 x}{x} + \int \frac{2\ln x}{x^2} = -\frac{ln^2 x}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = \ln x \quad du = {}^{1}\!/_{x}\, dx \qquad \Rightarrow \int dv = \int x^{-2}\, dx \quad v = -x^{-1}$$

$$= -\frac{ln^2 x}{x} + 2\left(\ln x\left(-\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) dx\right)$$

$$= -\frac{ln^2 x}{x} + 2\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx\right)$$

$$= \left(-\frac{ln^2 x}{x} + 2\left(\left(-\frac{\ln x}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\right) + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{ln^2 x}}{\boldsymbol{x}} - \frac{\mathbf{2}\ln \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} - \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}$$

$$\mathbf{9.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{ln(ln\,x)}}{\mathbf{x}}\mathbf{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = ln(ln\, x) \quad du = \frac{1}{ln\, x} \cdot \frac{1}{x}\, dx \qquad \Rightarrow \int dv = \int {}^{1}\!/_{x}\, dx \qquad v = ln\, x$$

$$= \ln(\ln x) \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x \ln x}\, dx$$

$$= \ln(\ln x) \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x \ln x}\, dx = \ln(\ln x) \ln x - \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \ln(\ln x) \ln x - \ln x + c =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\ln x\, (ln(\ln x) - 1) + c}$

10.−*Resolver*: $\int \mathbf{x\, sec^2 x\, dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x \quad du = dx \qquad \Rightarrow \qquad \int dv = \int sec^2 x\, dx \qquad v = \tan x}$

$$= x \tan x - \int \tan x \ dx$$

Respuesta: $\boldsymbol{x \tan x + \ln(\cos x) + c}$

11.−*Resolver*: $\int \mathbf{x^5 \sqrt{x^3 + 4}\, dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^3 \ du = 3x^2 dx \Rightarrow \int dv = \int x^2 (x^3 + 4)^{1/2}\, dx \quad v = \frac{2}{9}(x^3 + 4)^{3/2}}$

$\boldsymbol{\Rightarrow u = x^3 + 4 \quad du = 3x^2 dx}$

$$= x^3 \cdot \frac{2}{9}(x^3 + 4)^{3/2} - \int \frac{2}{9}(x^3 + 4)^{3/2}\, 3x^2 dx$$

$$= x^3 \cdot \frac{2}{9}(x^3 + 4)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x^3 + 4)^{3/2}\, x^2 dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^3 + 4 \qquad du = 3x^2 dx}$

$$= \frac{2}{9} x^3 (x^3 + 4)^{3/2} - \frac{2}{3}\int u^{3/2} \frac{du}{3} = \frac{2}{9} x^3 (x^3 + 4)^{3/2} - \frac{2}{9}\frac{u^{5/2}}{5/2} + c$$

$$= \frac{2}{9} \cdot x^3 (x^3 + 4)^{3/2} - \frac{4}{45}(x^3 + 4)^{5/2} + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{10x^3\left(x^3+4\right)^{3/2} - 4\left(x^3+4\right)^{3/2}}{45} + c$$

$$\mathbf{12.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{x^{13}\sqrt{x^7+1}\,dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x^7 \quad du = 7x^6\,dx \quad \Rightarrow \int dv = \int x^6\sqrt{x^7+1}\,dx \quad v = \frac{2}{21}(x^7+1)^{3/2}}$$

$$= \frac{2x^7}{21}(x^7+1)^{3/2} - \int \frac{2(x^7+1)^{3/2}}{21} \cdot 7x^6\,dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u = x^7 + 1 \qquad du = 7x^6\,dx}$$

$$= \frac{2x^7}{21}(x^7+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int u^{3/2}\,du$$

$$= \frac{2x^7}{21}(x^7+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(x^7+1)^{5/2} + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{2x^7}{21}\left(x^7+1\right)^{3/2} - \frac{4}{15}\left(x^7+1\right)^{5/2} + c$$

$$\mathbf{13.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{\frac{t^7}{(7-3t^4)^{3/2}}\,dt}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\mathbf{u = t^4 \quad du = 4t^3\,dt \quad \Rightarrow \int dv = \int \frac{t^3}{(7-3t^4)^{3/2}}dt \quad v = \frac{1}{6(7-3t^4)^{1/2}}}$$

$$= \frac{t^4}{6(7-3t^4)^{1/2}} - \int \frac{4t^3}{6(7-3t^4)^{1/2}}\,dt \; =$$

$$= \frac{t^4}{6(7-3t^4)^{1/2}} - \frac{2}{3}\int \frac{du}{-12\,u^{1/2}}$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{u = 7 - 3t^4 \quad du = -12t^3 dt}$$

$$= \frac{t^4}{6(7-3t^4)^{1/2}} - \frac{2}{36}\int u^{-1/2}\,du = \frac{t^4}{6(7-3t^4)^{1/2}} - \frac{1}{18}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + c$$

Respuesta: $\mathbf{\dfrac{t^4}{6\left(7-3t^4\right)^{1/2}} + \dfrac{1}{9}\left(7-3t^4\right)^{1/2} + c}$

14.—*Resolver*: $\displaystyle\int \mathbf{x^3\sqrt{4-x^2}\,dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x^2 \quad du = 2x\,dx \;\Rightarrow\; \int dv = \int x\sqrt{4-x^2}\,dx \quad v = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}\,dx}$$

$$= -\frac{x^2}{3}(4-x^2)^{3/2} + \int \frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}\cdot 2x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{3}(4-x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}\int (4-x^2)^{3/2}\,x\,dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 4 - x^2 \qquad du = -2x\,dx}$

$$= \frac{x^2}{3}(4-x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}\int u^{3/2}\frac{du}{-2} = \frac{x^2}{3}(4-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}u^{5/2} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2} - \dfrac{2}{15}\left(4-x^2\right)^{5/2} + c}$

15.—*Resolver*: $\displaystyle\int \mathbf{x\,2^x\,dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x \quad du = dx \qquad \Rightarrow \quad \int dv = \int 2^x \quad v = \frac{2^x}{\ln 2}}$$

$$= \frac{x\,2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,dx = \frac{x\,2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx$$

$$= \frac{x\,2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}$$

Respuesta: $\boldsymbol{\dfrac{2^x\,x}{\ln 2} - \dfrac{2}{(\ln 2)^2} + c}$

$$16.-\boldsymbol{Resolver}: \int z\, a^z\, dz$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = z \qquad du = dz \qquad \Rightarrow \quad \int dv = \int a^z\, dz \qquad v = \frac{a^z}{\ln a}$$

$$= \frac{z\, a^z}{\ln a} - \int \frac{a^z}{\ln a}\, dz =$$

$$= \frac{z\, a^z}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\int a^z\, dz \;=\; \frac{z\, a^z}{\ln a} - \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{a^z}{\ln a} \;=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{z\, a^z}{\ln a} - \frac{a^z}{(\ln a)^2}$$

$$17.-\boldsymbol{Resolver}: \int t\,(t-1)^{12}\, dt$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = t \quad du = dt \qquad \Rightarrow \quad \int dv = \int (t-1)^{12}\; dt \qquad v = \frac{(t-1)^{13}}{13}$$

$$= \frac{t(t-1)^{13}}{13} - \int \frac{(t-1)^{13}}{13}\, dt = \frac{t(t-1)^{13}}{13} - \frac{1}{13}\int (t-1)^{13}\, dt$$

$$= \frac{t(t-1)^{13}}{13} - \frac{1}{13}\cdot\frac{(t-1)^{14}}{14} + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{t(t-1)^{13}}{13} - \frac{(t-1)^{14}}{182} + c$$

$$18.-\boldsymbol{Resolver}: \int x\,\mathrm{senh}\;x\;\, dx$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = x \quad du = dx \qquad \Rightarrow \quad \int dv = \int \mathrm{senh}\; x\;\, dx \qquad v = \cos h\;\, x$$

$$x \cos hx - \int \cos h\, x\;\, dx$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: x \cos h\;\, x - senh\;\, x + c$$

$$\mathbf{19.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int \mathbf{x\ (3x+10)^{49}\ dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x \quad du = dx} \quad \Rightarrow \quad \int \mathbf{dv} = \int \mathbf{(3x+10)^{49}} \qquad \mathbf{v = \frac{(3x+10)^{50}}{150}}$$

$$\frac{x\,(3x+10)^{50}}{150} - \int \frac{(3x+10)^{50}}{150}\,dx$$

$$= \frac{x\,(3x+10)^{50}}{150} - \frac{1}{150}\int (3x+10)^{50}\,dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u = 3x+10 \qquad du = 3\,dx}$$

$$= \frac{x\,(3x+10)^{50}}{150} - \frac{1}{150}\cdot\frac{(3x+10)^{51}}{51\cdot 3} + c$$

$$= \frac{x\,(3x+10)^{50}}{150} - \frac{1}{150}\cdot\frac{(3x+10)^{51}}{153} + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{:}\ \boldsymbol{\frac{x\,(3x+10)^{50}}{150} - \frac{(3x+10)^{51}}{22950} + c}$$

$$\mathbf{20.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int \boldsymbol{(t+7)\,e^{2t+3}\ \ dt =}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = t+7\,; \quad du = dt}$$

$$\boldsymbol{\int dv = \int e^{2t+3} \ \ ; \ \ \int dv = \frac{1}{2}\int e^{u} \ \ ; \ \ v = \frac{1}{2}e^{u} \ \ ; v = \frac{1}{2}e^{2t+3}}$$

$$\boldsymbol{u = 2t+3 \ \ ; \ \ du = 2dt}$$

$$uv - \int v\,du = (t+7)\frac{1}{2}e^{2t+3} - \int \frac{1}{2}e^{2t+3}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(t+7)e^{2t+3} - \frac{1}{2}\int e^{2t+3}\,dt$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u = 2t+3 \qquad du = 2dt}$$

$$\frac{1}{2}(t+7)e^{2t+3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}(t+7)e^{2t+3} - \frac{1}{4}e^{u} + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{1}{2}(t+7)e^{2t+3}\ \frac{1}{4}e^{2t+3}+c$$

$$\mathbf{21.} - \boldsymbol{Resolver}: \int x\cos x\ \ dx$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x} \quad \boldsymbol{du = dx}\ ; \quad \int \boldsymbol{dv} = \int \cos x\ \boldsymbol{dx}\ ; \quad \boldsymbol{v = sen\, x}$$

$$x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ \ dx$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: x\,\mathbf{sen}\,x + \cos x + c$$

$$\mathbf{22.} - \boldsymbol{Resolver}: \int x\ \operatorname{sen} 2x\ \ dx$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x} \quad \boldsymbol{du = dx}$$

$$\int \boldsymbol{dv} = \int \operatorname{sen} 2x\ \ dx \quad \boldsymbol{u} = 2x \quad \boldsymbol{du} = 2dx$$

$$\int \boldsymbol{dv} = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\ du \quad \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$-\frac{1}{2}\ x\cos 2x - \ \int -\frac{1}{2}\cos 2x\ \ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ x\cos 2x + \frac{1}{2}\int cos\, 2x\ \ dx = -\frac{1}{2}\ x\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int cos\, u\ \ du$$

$$= -\frac{1}{2}\ x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + c\ =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{1}{2}\ x\cos 2x + \frac{1}{4} sin 2x + c$$

$$\mathbf{23.} - \boldsymbol{Resolver}: \int (x-\pi)\operatorname{sen} x\ \ dx$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = (x-\pi) \quad du = dx \qquad \int dv = \int \operatorname{sen} x \qquad v = -\ cos\, x$$

$$(x-\pi)(-\cos x)-\int -cosx\,dx = -(x-\pi)\cos x+\int cos\,x\,dx$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{(\pi - x)\cos x + \operatorname{sen} x + c}$

$\boldsymbol{24.-Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{z^7}}{\boldsymbol{(4-z^4)^2}}\boldsymbol{dz} \quad \rightarrow \quad \int \frac{\boldsymbol{z^4 \cdot z^3}}{\boldsymbol{(4-z^4)^2}}\ \boldsymbol{dz}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = z^4 \quad du = 4z^3\ dz}$

$$\int \boldsymbol{dv} = \int \frac{\boldsymbol{z^3}}{\boldsymbol{(4-z^4)^2}}\ ;\ \boldsymbol{dv} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\int \frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{m^2}} \quad \boldsymbol{dv} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\int \boldsymbol{m^{-2}\,dm}$$

$$\boldsymbol{dv} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{m^{-1}}\ ;\ \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4(4-z^4)}};\quad \boldsymbol{m = 4 - z^4 \quad dm = -4z^3dz}$$

$$= z^4 \cdot \frac{1}{4(4-z^4)} - \int \frac{1}{4(4-z^4)} \cdot 4z^3dz$$

$$= \frac{z^4}{4(4-z^4)} - \int \frac{z^3}{(4-z^4)}dz =$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{m = 4 - z^4 \quad dm = -4z^3dz}$

$$= \frac{z^4}{4(4-z^4)} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{z^4}{4(4-z^4)} + \frac{1}{4}ln|u| + c =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\displaystyle\frac{\boldsymbol{z^4}}{\boldsymbol{4(4-z^4)}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{ln|4-z^4| + c}$

$\boldsymbol{25.-Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{(t-3)\cos(t-3)\ dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = t - 3}$; $\quad \boldsymbol{du = dt}$; $\boldsymbol{dv} = \int \boldsymbol{cos(t-3)dt} \ \rightarrow \boldsymbol{u = t - 3 \ \ du = dt}$

$\rightarrow \boldsymbol{dv} = \int \boldsymbol{cos\,u\ du}$; $\ \boldsymbol{v = \operatorname{sen}(t-3)}$

$$= (t-3)\operatorname{sen}(t-3) - \int \operatorname{sen}(t-3)\,dt$$

$$(t-3)\operatorname{sen}(t-3) - \int \operatorname{sen} u\ du; = (t-3)\operatorname{sen}(t-3) + \cos u + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}: (\boldsymbol{t}-\mathbf{3})\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{t}-\mathbf{3})+\mathbf{cos}(\boldsymbol{t}-\mathbf{3})+\boldsymbol{c}$

$\mathbf{26.}-\boldsymbol{Resolver}: \displaystyle\int \boldsymbol{x\ cosh\ \ x\,dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x \quad du = dx}\ ; \qquad\qquad \boldsymbol{dv} = \displaystyle\int \boldsymbol{cos\,h\ \ x} \quad \boldsymbol{v} = \mathbf{sen}\,\boldsymbol{h\ \ x}$

$$x\,\mathrm{sen}\,h\ \ x - \int sen\,h\ \ x\ \ dx =$$

$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{x}\,\mathbf{sen}\,\boldsymbol{h\ \ x}-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{hx}+\boldsymbol{c}$

$\mathbf{27.}-\boldsymbol{Resolver}: \displaystyle\int \frac{\boldsymbol{ln}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}\,\boldsymbol{dx} \ \rightarrow \ \int \boldsymbol{lnx\ \ x^{-1/2}\,dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = lnx \quad du} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}\ ; \qquad \boldsymbol{dv} = \displaystyle\int \boldsymbol{x^{-1/2}dx} \quad \boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{x^{1/2}}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} \quad \boldsymbol{v} = \mathbf{2}\boldsymbol{x^{1/2}}$

$$2x^{1/2}\ln x - \int 2x^{1/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = 2x^{1/2}\ln x - 2\int x^{1/2}\cdot x^{-1}dx$$

$$= 2x^{1/2}\ln x - 2\int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\ln x - 2\cdot\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2x^{1/2}\ \ln x - 4x^{1/2} + c =$$

$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}\,\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{1}/2}+\boldsymbol{c}$

$\mathbf{28.}-\boldsymbol{Resolver}: \displaystyle\int \boldsymbol{x\,e^{3x}\ dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x \quad du = dx}$

$\boldsymbol{dv} = \displaystyle\int \boldsymbol{e^{3x}\ \ dx \rightarrow m = 3x \rightarrow dm = 3dx \rightarrow dv} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\int \boldsymbol{e^m\ dm}$

$\rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{e^m} \rightarrow \ \boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{e^{3x}}$

$$\frac{1}{3}e^{3x} \cdot x - \int \frac{1}{3}e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable

$\rightarrow \boldsymbol{w} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{dw} = \mathbf{3}\boldsymbol{dx} \rightarrow$

$$\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int e^w\,dw = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^w + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{xe^{3x}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{e^{3x}} + \boldsymbol{c}$

29.−*Resolver*: $\int \boldsymbol{x}\sec\boldsymbol{x}\tan\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{du} = \boldsymbol{dx}$; $\quad \int \boldsymbol{dv} = \int \sec \boldsymbol{x} \tan \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{dx}$; $\quad \boldsymbol{v} = \sec \boldsymbol{x}$

$$x\sec x - \int sec\ x\ \ dx =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{x}\sec\boldsymbol{x} - \boldsymbol{ln}|\sec\boldsymbol{x} + \tan\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{c}$

30.−*Resolver*: $\int \boldsymbol{x}\cos \mathbf{2}\boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{du} = \boldsymbol{dx}$; $\int \boldsymbol{dv} = \int \cos \mathbf{2}\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{dx} \rightarrow \boldsymbol{w} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{dw} = \mathbf{2}\boldsymbol{dx}$

$\boldsymbol{dv} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int \cos \boldsymbol{w}\ \boldsymbol{dw} \rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{sen}\ \boldsymbol{w} \rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{sen}\ \mathbf{2}\boldsymbol{x}$

$$\frac{1}{2}\ x\,\mathrm{sen}\ 2x - \int \frac{1}{2}\mathrm{sen}\ 2x\ \ dx = \frac{1}{2}\ x\,\mathrm{sen}\ 2x - \frac{1}{2}\int sen\,2x\ dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable

$\rightarrow \boldsymbol{t} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{dt} = \mathbf{2}\boldsymbol{dx}$

$$= \frac{1}{2}\ x\,\mathrm{sen}\ 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int sen\,t\ \ dt = -\frac{1}{2}\ x\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{4}\cos t + c =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{x}\,\mathbf{sen}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\cos\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$

$$\mathbf{31.-Resolver}: \int x\,3^x\,dx$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = x \quad du = dx; \qquad dv = \int 3^x\,dx \quad v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3}\,dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x\,dx$$

$$= \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + c =$$

$$\mathbf{Respuesta}: \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{2\ln 3} + c$$

$$\mathbf{32.-\ Resolver}: \int \ln 5x\,dx$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$u = \ln 5x\,;\ du = 5 \cdot \frac{1}{5x}dx \quad du = \frac{dx}{x} \to \int dv = \int dx \to v = x$$

$$x \cdot \ln 5x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln 5x - \int dx = x\ln 5x - x + c$$

$$\mathbf{Respuesta}: x(\ln 5x - 1) + c$$

$$\mathbf{33.-Resolver}: \int \frac{cot^{-1}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,dz \to 2\int cot^{-1} w\,dw$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$w = \sqrt{z} = z^{1/2}; \quad dw = \frac{1}{2}z^{-1/2} \quad dw = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

$$u = cot^{-1} w \quad du = \frac{-1}{1+w^2}\,dw \to \int dv = \int dw \qquad v = w$$

$$2wcot^{-1}w - 2\int w\left(\frac{-1}{1+w^2}\right)dw = 2w\,cot^{-1}w + 2\int \frac{w}{1+w^2}\,dw$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$m = 1 + w^2 \qquad dm = 2w\,dw$$

$$2w\cot^{-1}w + \int \frac{dm}{m} = 2w\cot^{-1}w + \ln|m| + c$$
$$= 2w\cot^{-1}w + \ln|1+w^2| + c =$$
$$= 2\sqrt{z}\cot^{-1}\sqrt{z} + \ln\left|1+\left(\sqrt{z}\right)^2\right| + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{2\sqrt{z}\cot^{-1}\sqrt{z} + \ln|1+z| + c}$

34.−*Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{\cos^{-1} 2x \ \ dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = \cos^{-1} 2x \quad du = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} \rightarrow \quad \int dv = \int dx \quad v = x}$$

$$x \cdot \cos^{-1} 2x - \int x\left(\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx$$
$$= x \cdot \cos^{-1} 2x + 2\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{m = 1-4x^2 \qquad dm = -8x\, dx}$$

$$x \cdot \cos^{-1} 2x + 2\left(-\frac{1}{8}\right)\int \frac{dm}{\sqrt{m}} = x \cdot \cos^{-1} 2x - \frac{1}{4}\int \frac{dm}{m^{1/2}}$$
$$= x \cdot \cos^{-1} 2x - \frac{1}{4}\int m^{-1/2}\, dm =$$
$$= x \cdot \cos^{-1} 2x - \frac{1}{4}\cdot\frac{m^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = x \cdot \cos^{-1} 2x - \frac{1}{2}m^{1/2} + c$$
$$= x \cdot \cos^{-1} 2x - \frac{1}{2}\sqrt{m} + c =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{x \cdot \cos^{-1} 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c}$

35.−*Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{x^2\, 3^x \ \ dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x^2 \quad du = 2x\, dx \ \rightarrow dv = 3^x \quad v = \frac{3^x}{\ln 3}}$$

$$x^2 \cdot \frac{3^x}{ln3} - \int \frac{3^x}{ln3}\,(2x)dx = \frac{x^2 \cdot 3^x}{ln3} - \frac{2}{ln3}\int 3^x\, x\, dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x \quad du = dx \;\rightarrow dv = \int 3^x \quad v = \frac{3^x}{ln3}}$$

$$\frac{x^2 \cdot 3^x}{ln3} - \frac{2}{ln3}\left[\frac{x \cdot 3^x}{ln3} - \int \frac{3^x}{ln3}\,dx\right]$$

$$= \frac{x^2 \cdot 3^x}{ln3} - \frac{2}{ln3}\left[\frac{x \cdot 3^x}{ln3} - \frac{1}{ln3} \cdot \frac{3^x}{ln3}\right] + c$$

Se aplica propiedad de logaritmos naturales:

$$= \frac{x^2 \cdot 3^x}{ln3} - \frac{2}{ln3}\left[\frac{x \cdot 3^x}{ln3} - \frac{3^x}{2ln3}\right] + c =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{\frac{x^2 \cdot 3^x}{ln3} - \frac{2x \cdot 3^x}{2ln3} - \frac{2 \cdot 3^x}{3ln3} + c}$$

$$\boldsymbol{36.-Resolver}: \boldsymbol{\int tan^{-1}\sqrt{x}\,dx \rightarrow \int 2\ t\ tan^{-1}\sqrt{t^2}\ dt}$$

$$\boldsymbol{\rightarrow \int 2t\ tan^{-1}\ t\ dt}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{x = t^2; t = \sqrt{x} \quad dx = 2t\ dt \rightarrow u = tan^{-1}t \quad du = \frac{1}{1+t^2}\ dt}$$

$$\boldsymbol{dv = \int 2t\,dt \quad v = 2 \cdot \frac{t^2}{2} \quad v = t^2 \quad artificio\ matemático\ v = t^2 + 1}$$

$$(t^2+1)tan^{-1}\,t - \int t^2 \ +1 \cdot \frac{1}{1+t^2}\ dt = (t^2+1)tan^{-1} - \int dt$$

$$= (t^2+1)tan^{-1}\,t\ - t + c =$$

$$\left((\sqrt{x})^2 + 1\right)tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{(x + 1)tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c}$$

$$\mathbf{37.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{\cos\sqrt{x}\,dx} \rightarrow \int \boldsymbol{2t\cos\sqrt{t^2}\,dt}$$

$$\rightarrow \int \boldsymbol{2t\cos t\,dt} =$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{x = t^2;\ t = \sqrt{x};\ dx = 2t\,dt \rightarrow u = 2t\ du = 2dt \rightarrow dv = \int \cos t;\ v}$$

$$= \mathbf{sen}\ \boldsymbol{t}$$

$$2t\,\mathrm{sen}\,t - \int 2\,\mathrm{sen}\,t\ dt = 2t\,\mathrm{sen}\,t - 2\int \mathrm{sen}\,t\ d$$

$$= 2t\,\mathrm{sen}\,t + 2\cos t + c =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{2}\ \boldsymbol{\sqrt{x}\ sen\sqrt{x} + 2\ cos\sqrt{x} + c}$$

$$\mathbf{38.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{x^2 e^{3x}}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{= \int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

$$\boldsymbol{u = x^2;\ du = 2x\,dx;\ \int dv = \int e^{3x}\,dx;\ w = 3x;\ dw = 3dx;\ dx}$$

$$\boldsymbol{= \frac{dw}{3};\ v = \frac{1}{3}\int e^w dw\ ;\ v = \frac{1}{3}e^w;\ v = \frac{1}{3}e^{3x}}$$

$$= x^2\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int x\,e^{3x}\ dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\ \int dv = \int e^{3x}\,dx;\ v = \frac{1}{3}e^{3x}}$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(x.\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}\int e^{3x}\ dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}.\frac{1}{3}e^{3x}$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{e^{3x}}}{\boldsymbol{3}}\left(\boldsymbol{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{9}}\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{39.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e^x}}\,;\ \int \boldsymbol{x\,e^{-x}dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\ \int dv = \int e^{-x}dx;\ \ v = -e^{-x}}$$

$$= x.-e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{(x+1)}}{\boldsymbol{e^x}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{40.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{x\ 2^{-x}dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = x;\ du = dx; \int dv = \int 2^{-x}dx\,; \int dv = \int \frac{dx}{2^x};\ v = -\frac{2^{-x}}{ln\ 2}}$$

$$= x\ .-\frac{2^{-x}}{ln\ 2} - \int \frac{-2^{-x}}{ln\ 2}dx = \frac{-2^{-x}x}{ln\ 2} + \int \frac{2^{-x}}{ln\ 2}dx$$

$$= \frac{-2^{-x}x}{ln\ 2} + \frac{1}{ln\ 2}\int \frac{dx}{2^x} = \frac{-2^{-x}x}{ln\ 2} + \frac{1}{ln\ 2}.-\frac{2^{-x}}{In\ 2} + C$$

$$= \frac{-2^{-x}x}{In\ 2} - \frac{2^{-x}}{In^2\ 2} + C$$

$$= \frac{-2^{-x}x(In\ 2) - 2^{-x}}{In^2\ 2} + C$$

$$= -2^{-x}.\frac{x(In\ 2) + 1}{In^2\ 2} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{x(In\ 2) + 1}}{\boldsymbol{2^x In^2\ 2}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{41.-}\boldsymbol{Resolver}\text{: }\int \boldsymbol{x}\ \mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\ \int dv = \int \mathbf{sen}\,x\,dx\ ;\ v = -\mathbf{cos}\,x}$

$$= -\mathrm{x}\cos x - \int -\cos x\ dx = -\mathrm{x}\cos x + \int \cos x\ dx$$

$$= -\mathrm{x}\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x} - \mathbf{x}\ \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$

$$\mathbf{42.-}\boldsymbol{Resolver}\text{: }\int \boldsymbol{x}\ \mathbf{cos}\,\mathbf{3}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\int\ dv = \int \mathbf{cos}\,3x\ dx;\ \int\ dv = \int \mathbf{cos}\,w\ \frac{dw}{3}}$;

$\boldsymbol{w = 3x;\ dw = 3dx;\ dx = \frac{dw}{3}}$

$\boldsymbol{v = \frac{1}{3}\int \mathbf{cos}\,w\,dw\ ;\ v = \frac{1}{3}\mathbf{sen}\,w;\ = \frac{1}{3}\mathbf{sen}\ 3x}$;

$$= \mathrm{x}\,.\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{x}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3x\ dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable

$\boldsymbol{u = 3x;\ du = 3dx;\ dx = \frac{du}{3}}$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{x}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\ \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{x}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}.\frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\ du$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{x}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{9}\int \operatorname{sen} u\ du$$

$$= \frac{1}{3}\mathrm{x}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9}\cos u + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x}\ \mathbf{sen}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\mathbf{cos}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$

43.–Resolver: $\int t^5 \ \ln|t^7|\,dt$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$u = \ln|t^7|;\ du = \frac{7}{t};\ \int dv = \int t^5\ ;\ v = \frac{t^6}{6}$

$$= \ln|t^7|\frac{t^6}{6} - \int \frac{\cancel{t^6}}{6}.\frac{7}{\cancel{t}}\ dt = \ln|t^7|\frac{t^6}{6} - \frac{7}{6}\int t^5 dt$$

$$= \frac{1}{6}t^6 \ln|t^7| - \frac{7}{6}\ \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}t^6 \ln|t^7| - \frac{7}{36}\ t^6 + C$$

Respuesta: $\frac{1}{6}\ t^6\left(\ln|t^7| - 7/6\right) + C$

44.–Resolver: $\int \mathrm{x}\csc^2 x\ dx$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$u = x;\ du = dx;\ \int dv = \csc^2 x\ ;\ v = -\cot x$

$$= x(-\cot x) - \int -\cot x\, dx = -x\cot x + \int \cot x\, dx$$

$$= -x\cot x + \ln|\mathrm{sen}\, x| + C$$

Respuesta: $\ln|\mathrm{sen}\, x| - x\cot x + C$

45.–Resolver: $\int x^2 \cos x\ dx$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$u = x^2;\ du = 2x\,dx;\ \int dv = \int \cos x\,dx\ ;\ v = \mathrm{sen}\, x$

$$= x^2\,\mathrm{sen}\, x - \int \mathrm{sen}\, x\ .\ 2x\,dx = x^2\,\mathrm{sen}\, x - 2\int x\,\mathrm{sen}\, x\ dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$u = x;\ du = dx;\ \int dv = \int \mathrm{sen}\, x\,dx\ ;\ v = -\cos x$

$$= x^2\,\mathrm{sen}\, x - 2\left(-x\cos x - \int -\cos x\ dx\right)$$

$$= x^2\,\mathrm{sen}\, x + 2x\cos x - 2\int \cos x\ dx$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C}$

$\boldsymbol{46.-Resolver}$: $\int \textbf{arc tan}\left({}^{1}/_{t}\right)\ \boldsymbol{dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$= \int \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt \ =$$

$\boldsymbol{u = \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right);\ du = -\frac{1}{t^2+1}\ dt;\ \int dv = \int dt;\ v = t}$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \quad .\, t - \int t\left(-\frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= t\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) + \int \left(\frac{t}{t^2+1}\right) dt$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = t^2 + 1;\ du = 2t\, dt}$

$$= t\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) + \int \frac{\cancel{t}}{u}.\frac{du}{2\cancel{t}} \ = t\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= t\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{t\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + 1\right| + C}$

$\boldsymbol{47.-Resolver}$: $\int \textbf{ t arc tan}\boldsymbol{t}\ \ \boldsymbol{dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \tan^{-1} t\ ;\ du = \frac{1}{1+t^2}\ dt;\ \int dv = \int t\ dt\ ;\ v = \frac{t^2}{2}}$

$$= \tan^{-1} t.\frac{t^2}{2} - \int \frac{t^2}{2}.\frac{1}{1+t^2} dt \ = \frac{1}{2}t^2\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2\tan^{-1} t - \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1+t^2}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\left(\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}t^2\tan^{-1}t-\frac{1}{2}(t-\tan^{-1}t)$$
$$=\frac{1}{2}t^2\tan^{-1}t-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\tan^{-1}t+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{2}t^2\ \tan^{-1}t+\frac{1}{2}\tan^{-1}t-\frac{1}{2}t+C}$

$\boldsymbol{48.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int r^2\,\mathrm{sen}\,r\ dr}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=r^2;\ du=2r\,dr;\ \int dv=\int \mathrm{sen}\,r;\ v=-\cos r\,dr}$

$$=-r^2\cos r-\int -\cos r\ .2r\,dr\ =-r^2\cos r+2\int r\cos r\ dr$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=r;\ du=dr;\ \int dv=\int \cos r\,dr\ ;\ v=\mathrm{sen}\,r}$

$$=-r^2\cos r+2\left(r\,\mathrm{sen}\,r-\int \mathrm{sen}\,r\ dr\right)$$
$$=-r^2\cos r+2r\,\mathrm{sen}\,r-2\int \mathrm{sen}\,r\ dr$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-r^2\cos r+2r\,\mathrm{sen}\,r+2\cos r+C}$

$\boldsymbol{49.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int z^3\ln z\ dr}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=\ln z;\ du=\frac{1}{z}\,dz;\ \int dv=\int z^3dz\ ;\ v=\frac{z^4}{4}}$

$$=\ln z.\frac{z^4}{4}-\int\frac{\cancel{z^4}}{4}.\frac{1}{\cancel{z}}dz\ =\frac{1}{4}z^4\ln z-\frac{1}{4}\int z^3\,dz$$

$$=\frac{1}{4}z^4\ln z-\frac{1}{4}\ \frac{z^4}{4}+C\ =\frac{1}{4}z^4\ln z-\frac{1}{16}\ z^4+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{16}z^4(4\ln z-1)+C}$

$\mathbf{50.-}\boldsymbol{Resolver}$: $\int \ln^2 x^{20}\ dx$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=\ln^2 x^{20};\ du=\frac{40\ln\ x^{20}}{x}\ dx; \int dv=\int dx;\ v=x}$

$$=x\ln^2 x^{20}-\int\frac{\cancel{x}.40\ln x^{20}}{\cancel{x}}dx=x\ln^2 x^{20}-\int 40\ln x^{20}\,dx$$

$$=x\ln^2 x^{20}-40\int \ln x^{20}\,dx$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=\ln x^{20}; du=\frac{20}{x}\ dx; \int dv=\int dx;\ v=x}$

$$=x\ln^2 x^{20}-40\left(x\ln x^{20}-\int \cancel{x}.\frac{20}{\cancel{x}}dx\right)$$

$$=x\ln^2 x^{20}-40x\ln x^{20}+40.20\int dx$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{x\ln^2 x^{20}-40x\ln x^{20}+800x+C}$

$\mathbf{51.-}\boldsymbol{Resolver}$: $\int x^5e^x\ dx$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=x^5;\ du=5x^4\ dx;\ \int dv=\int e^x;\ v=e^x}$

$$=x^5e^x-\int\ e^x5x^4d\,x\ =x^5e^x-5\int x^4e^xd\,x$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u=x^4; du=4x^3\ dx; \int dv=\int e^x;\ v=e^x}$

$$= x^5e^x - 5\left(x^4e^x - \int e^x 4x^3 d\,x\right)$$

$$= x^5e^x - 5x^4e^x + 5.4\int x^3\, e^x d\,x$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^3; du = 3x^2\ dx;\ \int dv = \int e^x; v = e^x}$

$$= x^5e^x - 5x^4e^x + 20\left(x^3\, e^x - \int e^x 3x^2 dx\right)$$

$$= x^5e^x - 5x^4e^x + 20x^3\, e^x - 20.3\int x^2e^x dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^2; du = 2x\ dx;\ \int dv = \int e^x;\ v = e^x}$

$$= x^5e^x - 5x^4e^x + 20x^3\, e^x - 60\left(x^2e^x - \int e^x 2xdx\right)$$

$$= x^5e^x - 5x^4e^x + 20x^3\, e^x - 60x^2e^x + 60.2\int xe^x dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x; du = dx;\ \int dv = \int e^x;\ v = e^x}$

$$= x^5e^x - 5x^4e^x + 20x^3\, e^x - 60x^2e^x + 120\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^5e^x - 5x^4e^x + 20x^3\, e^x - 60x^2e^x + 120xe^x - 120e^x + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{e^x\left(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120\right) + C}$

$\boldsymbol{52.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int e^t \cos t\ dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^t; du = e^t\ dt;\ \int dv = \int \cos t;\ \ v = \operatorname{sen} t\, dx}$

$$\int e^t \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\ \ e^t\ dt$$

$$\int e^t \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - \int e^t\ \operatorname{sen} t\ \ dt$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^t; du = e^t\ dt;\ \int dv = \int \operatorname{sen}\ t;\ \ v = -\cos\ t\, dx}$

$$\int e^t \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t - \left(e^t . -\cos t - \int -\cos t\, e^t\, dt\right)$$

$$\int e^t \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t - \int e^t \cos t\, dt$$

$$\int e^t \cos t\, dt + \int e^t \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t$$

$$2\int e^t \cos t\, dt = e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \ = \frac{1}{2} e^t \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} e^t \cos t + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{2} e^t (\operatorname{sen} t + \cos t) + C}$

53.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int e^{at} \operatorname{sen} t \ \ dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^{at}; du = ae^{at}\, dt; \int dv = \int \operatorname{sen} t;\ \ v = -\cos t\, dt}$

$$\int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt = e^{at} . -\cos t - \int -\cos t\ a\, e^{at}\, dt$$

$$\int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt = -e^{at} \cos t + a \int e^{at} \cos t\ dt$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^{at}; du = ae^{at}\, dt; \int dv = \int \cos t;\ \ v = \operatorname{sen}\ t\, dt}$

$$\int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt = -e^{at} \cos t + a\left(e^{at} \operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\, a\, e^{at}\, dt\right)$$

$$\int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt = -e^{at} \cos t + a\, e^{at} \operatorname{sen} t - a^2 \int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt$$

$$\int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt + a^2 \int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt = -e^{at} \cos t + a\, e^{at} \operatorname{sen} t$$

$$\int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt\, (1 + a^2) = a\, e^{at} \operatorname{sen} t - e^{at} \cos t$$

$$(1 + a^2) \int e^{at} \operatorname{sen} t\, dt = a\, e^{at} \operatorname{sen} t - e^{at} \cos t$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{e^{at}(a \operatorname{sen} t - \cos t)}{(1 + a^2)} + C}$

$$\mathbf{54.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:} \int \boldsymbol{x^2}\ \mathbf{senh}\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^2;\ du = 2\ x};\ \int \boldsymbol{dv} = \int \mathbf{senh}\ \boldsymbol{x}\,;\ \boldsymbol{v} = \mathbf{cosh}\ \boldsymbol{x\,dx}$

$$= x^2 \cosh x - \int \cosh x\ 2x\ dx$$

$$= x^2 \cosh x - 2\int x\ \cosh x\, dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x;\ du = dx};\ \int \boldsymbol{dv} = \int \mathbf{cosh}\ \boldsymbol{x}\,;\ \boldsymbol{v} = \mathbf{senh}\ \boldsymbol{x}$

$$= x^2 \cosh x - 2\left(x\ senh\, x - \int \operatorname{senh} x\, dx\right)$$

$$= x^2 \cosh x - 2\,x\ \operatorname{senh} x + 2\int \operatorname{senh} x\, dx$$

$$= x^2 \cosh x - \ 2x\ \operatorname{senh} x + 2\cosh x + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{(x^2 + 2)}\mathbf{cosh}\,\boldsymbol{x - 2\ x}\ \mathbf{senh}\,\boldsymbol{x + C}$

$$\mathbf{55.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:} \int \frac{\boldsymbol{e^{2x}}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - e^x}}}\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{e^x}.\frac{\boldsymbol{e^x}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - e^x}}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = e^x;\ du = e^x\ dx};\ \int \boldsymbol{dv} = \int \frac{\boldsymbol{e^x}}{\sqrt{\boldsymbol{1 - e^x}}}\boldsymbol{dx};\ \boldsymbol{w = 1 - e^x};\, d\boldsymbol{w = -e^x\ dx}$$

$$\boldsymbol{dx} = -\frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{e^x}};\ \boldsymbol{v} = \int \frac{\boldsymbol{e^x}}{\sqrt{\boldsymbol{w}}}.-\frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{e^x}};\ \boldsymbol{v} = -\int \boldsymbol{w}^{-1/2}\,\boldsymbol{dw};\ \boldsymbol{v} = -\ \frac{\boldsymbol{w}^{1/2}}{\mathbf{1/2}}$$

$$\boldsymbol{v = \ -2w^{1/2}}$$

$$= -2e^x\sqrt{1 - e^x} + 2\int e^x\sqrt{1 - e^x}\, dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 1 - e^x;\ du = -e^x\ dx;\ dx} = -\frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{e^x}}$

$$= -2e^x\sqrt{1 - e^x} + 2\left(\int e^x\sqrt{u}\,.-\frac{du}{e^x}\right)$$

$$= -2e^x\sqrt{1-e^x} - 2\left(\int u^{1/2}\,du\right) = -2e^x\sqrt{1-e^x} - 2\int u^{1/2}\,du$$

$$= -2e^x\sqrt{1-e^x} - 2\,\frac{u^{3/2}}{3/2} = -2e^x\sqrt{1-e^x} - \frac{4}{3}(1-e^x)^{3/2} + C$$

$$= -2e^x\sqrt{1-e^x} - \frac{4}{3}\sqrt{(1-e^x)^3} + C$$

$$= \frac{-6e^x\sqrt{1-e^x} - 4(1-e^x)\sqrt{1-e^x}}{3} + C$$

$$= -\frac{2}{3}\left(3e^x\sqrt{1-e^x} + 2(1-e^x)\sqrt{1-e^x}\right) + C$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-e^x}(3e^x + 2 - 2e^x) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{e^x}}(\boldsymbol{e^x}+\mathbf{2}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{56.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x^3}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}\boldsymbol{dx} = \int \boldsymbol{x^2}.\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}\boldsymbol{dx} =$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^2;\ du = 2x\,dx; \int dv = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx;\ w = 1 - x^2;\ dw = -\,2x\,dx}$

$\boldsymbol{dx = -\frac{dw}{2x};\ v = \int -\frac{x}{\sqrt{w}}.\frac{dw}{2x};\ v = -\frac{1}{2}\int w^{-1/2}\,dw;\ v = -\frac{1}{2}\,\frac{w^{1/2}}{1/2};}$

$\boldsymbol{v = -w^{1/2};\ v = -\sqrt{1-x^2}}$

$$= x^2\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int -\sqrt{1-x^2}\,2x\,dx$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} + 2\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 1 - x^2;\ du = -\,2x\,dx;\ dx = -\frac{du}{2x}}$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} + 2\left(\int x\sqrt{u}\,.-\frac{du}{2x}\right)$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{2}\left(\int u^{1/2}\,du\right) = -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{u^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{-3x^2\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(3x^2\sqrt{1-x^2} - 2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(3x^2 + 2 - 2x^2) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{57.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{sen}\,\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx} = \int \mathbf{sen}(\mathbf{2}\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{sen}\ \mathbf{2}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{du} = \mathbf{2}\cos\mathbf{2}\boldsymbol{x};\ \int \boldsymbol{dv} = \int \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}};\ \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}}$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} = \operatorname{sen}(2x)\,.-e^{-x} - \int -e^{-x}2\cos(2x)\ dx$$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} = -\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} + 2\int e^{-x}\ \cos(2x)\ dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u} = \cos\mathbf{2}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{du} = -\mathbf{2}\ \mathbf{sen}\ \mathbf{2}\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{dx};\int \boldsymbol{dv} = \int \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}}\quad;\ \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}}$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} = -\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} + 2(\cos(2x)\,.-e^{-x} - \int -e^{-x}(-2\operatorname{sen}(2x)\ dx))$$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} = -\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} - 2\cos(2x)\,e^{-x} - 2.2\int \operatorname{sen}(2x)\ e^{-x}\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} = -\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} - 2\cos(2x)\,e^{-x} - 4\int \operatorname{sen}(2x)\ e^{-x}\,dx$$

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} + 4\int \operatorname{sen}(2x)\ e^{-x}\,dx = -\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} - 2\cos(2x)\,e^{-x}$$

$$5\int \operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} = -\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} - 2\cos(2x)\,e^{-x} + C$$

$$= \frac{1}{5}(-\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x} - 2\cos(2x)\,e^{-x}) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\frac{1}{5}e^{-x}(-\text{sen}(2x) - 2\cos(2x)) + C$

$58.-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{ln^2 x\, dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$u = \ln^2 x\ ;\ du = \frac{2\ln x}{x};\ dv = dx;\ v = x$

$$ln^2x * x - \int \cancel{x} * \frac{2\,lnx}{\cancel{x}} = x\,ln^2x - 2\int \ln x\, dx =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$u = ln\ x\ ;\ du = \frac{1}{x}dx\ ;\ dv = dx;\ v = x$

$$= x\,ln^2x - 2\left(x\,lnx - \int dx\right) = x\,ln^2x - 2(x\,lnx - x) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $x\,ln^2x - 2x\,lnx + 2x + C$

$59.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\ln x}{x^3}\, dx = \int \ln x\,.x^{-3}\, dx$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$u = \ln x;\ du = \frac{1}{x};\ dv = x^{-3};\ v = -\frac{x^{-2}}{2};$

$$\ln x\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) - \int -\frac{x^{-2}}{2} * \frac{1}{x}\, dx = -\frac{x^{-2}}{2}\ln x + \frac{1}{2}\int x^{-3}\, dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) + C\ =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

$60.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln x;\ du = \frac{1}{x};\ dv = x^{-1/2};\ v = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}}$

$$= \ln x\,.\,2x^{1/2} - \int 2x^{1/2}.\frac{1}{x}\,dx = 2x^{1/2}\ln x - 2\int \cancel{x^{1/2}}.\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= 2x^{1/2}\ln x - 2\int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\ln x - 2\left(2x^{1/2}\right) + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{2x^{1/2}\ \ln x - 4x^{1/2} + C}$

$\boldsymbol{61.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{xe^{x}}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}\ \boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = xe^{x};\ du = e^{x}(1+x)dx;\ dv = (x+1)^{-2}dx\ ;\ v = -\frac{1}{(x+1)}}$

$$= xe^{x}\left(-\frac{1}{(x+1)}\right) - \int -\frac{1}{\cancel{(x+1)}}\ e^{x}\cancel{(1+x)}dx$$

$$= -\frac{xe^{x}}{(x+1)} + \int e^{x}\ dx = -\frac{xe^{x}}{(x+1)} + e^{x} + C$$

$$= -\frac{xe^{x} + e^{x}(x+1)}{(x+1)} + C = -\frac{xe^{x} + xe^{x} + e^{x}}{x+1} + C =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\dfrac{e^{x}}{x+1} + C}$

$\boldsymbol{62.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \boldsymbol{x^2 sen\ 3x\ dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^2;\ du = 2x\ dx;\ dv = sen\ 3x\ dx;\ v = -\frac{\cos 3x}{3}}$

$$= -\frac{x^2\cos 3x}{3} - \int -\frac{\cos 3x}{3}\ (2x)dx =$$

$$= -\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\ dx =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\ dv = cos\ 3x\ dx;\ v = \frac{sen\ 3x}{3}}$

$$= -\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\left[x\left(\frac{1}{3}\ sen\ 3x\right) - \int \frac{1}{3}\ sen\ 3x\ dx\right] =$$

$$-\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{9}\ x\ sen\ 3x - \frac{2}{9}\int sen\ 3x\ dx =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{x^2\cos 3x}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\ \boldsymbol{x\ sen\ 3x} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{27}}\mathbf{\cos 3x} + \boldsymbol{C}$$

$\mathbf{63.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen}\ (\mathbf{ln}\boldsymbol{y})\ \boldsymbol{dy}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = sen\ (\ln y); du = \frac{1}{y}\cos(\ln y)\ dy; dv = dy;\ v = y}$

$$= y\ sen \ln y - \int y\ \frac{1}{y}\cos(\ln y)\ dy =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = cos\ (\ln y); du = -\frac{1}{y}sen(\ln y)dx;\ dv = dy;\ v = y}$

$$= y\ sen \ln y - \left(y cos\ (\ln y) + \int y\frac{1}{y}\ sen \ln y\, dy\right) =$$

$$= y\ sen \ln y - \left(y cos\ (\ln y) + \int sen \ln y\, dy\right) =$$

$$= y\ sen \ln y - y\cos\ln y - \int sen \ln y\ dy =$$

$$= \int sen \ln y\ dy = y\ sen \ln y - y\cos\ln y - \int sen \ln y\ dy$$

$$= 2\int sen \ln y\, dy = y(sen \ln y - \cos\ln y) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \int \boldsymbol{sen}\,\mathbf{ln}\,\boldsymbol{y\ dy} = \frac{\boldsymbol{y(sen\,\ln y - \cos\ln y)}}{\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$$

$\mathbf{64.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen\ t}\,\mathbf{ln}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln\cos t;\ du = -\frac{1}{\cos t} sen\ t\ dt;\ dv = sen\ t;\ v = -cost}$

$$= \ln\cos t(-\cos t) - \int (-cost)\left(-\frac{1}{\cos t}\ sen\ t\right)\ dt =$$

$$= -\ln\cos t\ cost - \int sen\ t\ dt = -\cos t\ln\cos t - (-\cos t) + C$$

$$= -\cos t\ln\cos t + \cos t + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\cos t\ (-\ln\cos t + 1) + C}$

$\boldsymbol{65.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int e^x \cos x\ dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^x;\ du = e^x\ dx;\ dv = \cos x;\ v = sen\ x}$

$$= e^x sen\ x - \int sen\ x\ (e^x) dx =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^x;\ du = e^x\ dx;\ dv = \mathrm{sen}\ x;\ v = -\cos x}$

$$= e^x sen\ x - \left[e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)e^x\ dx\right] =$$

$$= e^x sen\ x - \left(-e^x\cos x + \int(\cos x)e^x\ dx\right) =$$

$$= e^x sen\ x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\ dx =$$

$$= \int e^x\cos x\ dx = e^x sen\ x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\ dx =$$

$$= 2\int e^x\cos x\, dx = e^x(sen\ x + \cos x) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\int e^x\cos x\ dx = \boldsymbol{\frac{e^x(sen\ x + \cos x)}{2} + C}$

$\boldsymbol{66.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int t\sqrt{t+1}\ dt = \int t(t+1)^{1/2}\ dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = t; du = dt;\ dv = (t+1)^{1/2}\ ;\ v = \frac{2(t+1)^{3/2}}{3}}$

$$= t\left(\frac{2(t+1)^{3/2}}{3}\right) - \int \frac{2(t+1)^{3/2}}{3}\ dt =$$

$$= \frac{2}{3}\ t(t+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (t+1)^{3/2}\ dt\ =$$

$$= \frac{2}{3}\ t(t+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\theta^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right) + C = \frac{2}{3}\ t(t+1)^{\ 3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2\ \theta^{\frac{5}{2}}}{5}\right) + C$$

$$= \frac{2}{3}\ t(t+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}\theta^{\frac{5}{2}} + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{2}{3}\ t(t+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(t+1)^{5/2} + C}$

$\boldsymbol{67.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int \ln|3x|dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln|3x|;\ du = \frac{1}{x}dx;\ dv = dx;\ v = x}$

$= x\ \ln|3x| - \int x\frac{1}{x}\ dx = x\ \ln|3x| - \int\ dx\ =$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{x \ln 3x - x + C}$

$\boldsymbol{68.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int t\ \sqrt[3]{2\ t + 7}\ dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = t; du = dt;\ dv = (2t+7)^{1/3};\ \ v = \frac{3}{8}(2t+7)^{4/3}}$

$$= t\left(\frac{3}{8}(2t+7)^{4/3}\right) - \int \frac{3}{8}(2t+7)^{\frac{4}{3}}dt =$$

$$= \frac{3}{8}t(2t+7)^{4/3} - \frac{3}{8}\int (2t+7)^{\frac{4}{3}}\ dt =$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = 2t+7;\ da = 2dt}$

$$= \frac{3}{8}t(2t+7)^{4/3} - \frac{3}{8} * \frac{1}{2}\int (a)^{\frac{4}{3}}\, dt = \frac{3}{8}t(2t+7)^{4/3} - \frac{3}{16}\left(\frac{a^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\right) + C$$

$$= \frac{3}{8}t(2t+7)^{4/3} - \frac{3}{16}\left(\frac{3a^{\frac{7}{3}}}{7}\right) =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{3}{8}t(2t+7)^{4/3} - \frac{9}{112}(2t+7)^{7/3} + C}$

69.−*Resolver*: $\int \ln\left|7x^5\right| dx$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln|7x^5|\,;\ du = \frac{5}{x}dx;\ dv = dx\ ;\ v = x}$

$$= x\ \ln|7x^5| - \int x\frac{5}{x}\ dx = x\ \ln|7x^5| - 5\int\ dx =$$

Respuesta: $\boldsymbol{x\ln\left|7x^5\right| - 5x + C}$

70.−*Resolver*: $\int \tan^{-1} x\ dx$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = tan^{-1}x;\ du = \frac{1}{1+x^2}dx;\ dv = dx\ ;\ v = x}$

$$= x\ tan^{-1}x - \int x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = 1 + x^2;\ da = 2x\ dx}$

$$= x\ tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{da}{a} = x\ tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln a + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{x\ tan^{-1}\ x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$

$$\mathbf{71.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{t(t-1)^{12}dt}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = t; du = dt;\ dv = (t-1)^{12}dx\ ;\ v = \frac{(t-1)^{13}}{13}}$

$= t\left(\frac{(t-1)^{13}}{13}\right) - \int \frac{(t-1)^{13}}{13}\,dt = t\ \frac{(t-1)^{13}}{13} - \frac{1}{13}\int (t-1)^{13}\,dt$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = t-1;\ da = dt}$

$= t\ \frac{(t-1)^{13}}{13} - \frac{1}{13}\int a^{13}\,da = t\ \frac{(t-1)^{13}}{13} - \frac{1}{13}\left(\frac{a^{14}}{14}\right) + C$

$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{t\ \frac{(t-1)^{13}}{13} - \frac{(t-1)^{14}}{182} + C}$

$$\mathbf{72.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{x^2 e^x\ dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^2; du = 2x\,dx;\ dv = e^x;\ v = e^x}$

$= x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx =$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x; du = dx;\ dv = e^x;\ v = e^x}$

$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx =$

$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{e^x - 2xe^x + 2e^x + C}$

$$\mathbf{73.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{x^3 e^{x^2}\ dx} = \int \boldsymbol{x^2 xe^{2x}\ dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x^2; du = 2x\,dx;\ dv = xe^{2x};\ \ v = \frac{1}{2}e^{x^2}}$

$= \frac{x^2e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,2x\,dx = \frac{x^2e^{x^2}}{2} - \int x\,e^{x^2}dx =$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{x^2 e^{x^2}}{2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$74.-$ ***Resolver***: $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\,dx$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = \ln\left|x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right|;\ du = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};\ dv = dx;\ v = x}$$

$$= x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \int x\left(\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^2 + 1;\ du = 2x}$

$$= x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du =$$

$$= x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: x\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \sqrt{x^2+1} + C$$

$75.-$ ***Resolver***: $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^x;\ du = e^x dx;\ dv = sen\,x\,dx;\ v = -\cos x}$

$$= -e^x\cos x - \int -\cos x\, e^x dx =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = e^x;\ du = e^x dx;\ dv = cos\,x\,dx;\ v = sen\,x}$

$$= -e^x\cos x + e^x sen\,x - \int e^x sen\,x\,dx =$$

$$-e^x\cos x + e^x sen\,x = 2\int e^x sen\,x\,dx =$$

$$= -\frac{e^x}{2}\cos x + \frac{e^x}{2} sen\ x + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{2}}(-\boldsymbol{\cos x} + \boldsymbol{sen\ x}) + \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{76.-Resolver}: \int \boldsymbol{3^x \cos x\, dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = 3^x;\ du = 3^x \ln|3|\, dx;\ \ dv = \cos x\, dx;\ \ v = sen\ x}$

$$= 3^x\ sen\ x - \int 3^x \ln|3|\ sen\ x\, dx =$$

$$= 3^x sen\ x - ln|3| \int 3^x sen\ x\, dx =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = 3^x;\ du = 3^x \ln|3|\, dx;\ \ dv = sen\ x\, dx;\ \ v = -\cos x}$

$$= 3^x sen\ x - ln|3|\left(-3^x \cos x - \int -\cos x\, 3^x\, ln|3|\ dx\right) =$$

$$= 3^x sen\ x - ln|3|\left(-3^x \cos x + ln|3| \int 3^x \cos x\ \ dx\right) =$$

$$= 3^x sen\ x + 3^x ln|3| \cos x - (ln|3|)^2 \int 3^x \cos x\ \ dx =$$

$$= 3^x sen\ x + 3^x ln|3| \cos x = (ln^2|3| + 1) \int 3^x \cos x\ \ dx =$$

$$= \frac{(3^x sen\ x + 3^x ln|3| \cos x)}{(ln^2|3| + 1)} =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{3^x(sen\ x + ln|3|\cos x)}}{\boldsymbol{\left(ln^2|3| + 1\right)}} + \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{77.-Resolver}: \int \boldsymbol{x(2x+5)^{10} dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\ \ dv = (2x+5)^{10};\ v = \frac{(2x+5)^{11}}{22}}$

$$= x\left(\frac{(2x+5)^{11}}{22}\right) - \int \frac{(2x+5)^{11}}{22}\ dx =$$

$$= \frac{x(2x+5)^{11}}{22} - \frac{1}{22}\int (2x+5)^{11} dx =$$

$$= \frac{x(2x+5)^{11}}{22} - \frac{1}{44}\int u^{11} du = \frac{x(2x+5)^{11}}{22} - \frac{1}{44}\frac{u^{12}}{12}$$

$$= \frac{x(2x+5)^{11}}{22} - \frac{u^{12}}{528} + C =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{24x(2x+5)^{11} - (2x+5)^{12}}{528} + C}$

78.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int x\ sen\left(\frac{x}{2}\right) dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\ dv = sen\left(\frac{x}{2}\right);\ v = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + C}$

$$= x\left(-2\ cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \int -2cos\left(\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= -2x\ cos\left(\frac{x}{2}\right) + \int 2\ cos\left(\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= -2x\ cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\int\ cos\left(\frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= -2x\ cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2*2\int\ cosu\, du = -\ 2x\ cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\ sen\ u + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{-2x\ cos\left(\frac{x}{2}\right) + 4\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + C}$

79.− *Resolver*: $\boldsymbol{\int x \ln x\ dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = ln\ x;\ du = \frac{1}{x} dx;\ dv = x\ dx\ ;\ v = \frac{x^2}{2}}$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}(\ln x) - \frac{1}{2}\int x\ dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2}}(\ln \boldsymbol{x}) - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{C}$$

80.− *Resolver*: $\int \boldsymbol{x^3 \ln x \; dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = ln\ x;\ du = \frac{1}{x} dx;\ dv = x^3\ dx\ ;\ v = \frac{x^4}{4}}$$

$$= \frac{x^4}{4}(\ln x) - \int \frac{\cancel{x}^4}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^4}{4}(\ln x) - \frac{1}{4}\int x^3\ dx$$

$$= \frac{x^4}{4}(\ln x) - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{x^4}}{\mathbf{4}}(\ln \boldsymbol{x}) - \frac{\boldsymbol{x^4}}{\mathbf{16}} + \boldsymbol{C}$$

81.− *Resolver*: $\int \boldsymbol{tan^{-1}\, y\ dy} =$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = tan^{-1}\, y\ ;\ du = \frac{1}{1+y^2}\ dy;\ dv = dy;\ v = y}$$

$$y\ tan^{-1}(y) - \int y\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy == y\ tan^{-1}(y) - \int \left(\frac{y}{1+y^2}\right)dy$$

$$= y\ tan^{-1}(y) - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = y\ tan^{-1}(y) - \frac{1}{2}\, ln|u| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{y\ tan^{-1}(y) - \frac{1}{2}\, ln\left|1 + y^2\right| + C}$$

82.− *Resolver*: $\int \boldsymbol{4x\ sec^2(2x)\ dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = 4x; du = 4\ dx;\ dv = sec^2(2x);\ v = \frac{1}{2} tan(2x)}$

$$= 4x\left(\frac{tan\ (2x)}{2}\right) - \int \frac{\tan(2x)}{\cancel{2}}\ 4\ dx =$$

$$= 2x\ tan(2x) - \int tan\ (2x)\ \ 2dx = 2x\ tan(2x) - \int tan\ (u)\ \ du =$$

$$= 2x\ tan(2x) - (-\ln|\cos u|) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{2x\ tan(2x) + \ln|\cos 2x| + C}$

$\boldsymbol{83.- Resolver}$: $\boldsymbol{\int p^4 e^{-p}\ dp}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = p^4;\ du = 4\ p^3 dp;\ dv = e^{-p} dp; v = -e^{-p}}$

$$= -p^4\ e^{-p} + \int e^{-p}\ 4p^3\ dp = -\ p^4\ e^{-p} + 4\int e^{-p}\ p^3\ dp =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = p^3;\ du = 3\ p^2 dp;\ dv = e^{-p} dp; v = -e^{-p}}$

$$= -p^4\ e^{-p} + 4\left(-p^3 e^{-p} - \int -3\ p^2 e^{-p}\ dp\right) =$$

$$= -p^4\ e^{-p} + 4\left(-p^3 e^{-p} + 3\int p^2 e^{-p}\ dp\right) =$$

$$= -p^4\ e^{-p} - 4p^3 e^{-p} + 12\int p^2 e^{-p}\ dp =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = p^2;\ du = 2\ p\ \ \ dp;\ dv = e^{-p} dp; v = -e^{-p}}$

$$= -p^4\ e^{-p} - 4p^3 e^{-p} + 12\left(-p^2 e^{-p} - \int -2pe^{-p} dp\right)$$

$$= -p^4\ e^{-p} - 4p^3 e^{-p} - 12p^2 e^{-p} + 24\int pe^{-p} dp$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = p;\ du = dp;\ dv = e^{-p} dp; v = -e^{-p}}$

$$= -p^4\ e^{-p} - 4p^3 e^{-p} - 12p^2 e^{-p} - 24pe^{-p} - 24(e^{-p}) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\ e^{-p}\left(p^4 + 4p^3 + 12p^2 + 24p + 24\right) + C}$

$\mathbf{84.-}$ ***Resolver***: $\displaystyle\int \boldsymbol{e^{\theta} sen\theta\ d\theta}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:
$\boldsymbol{u = e^{\theta};\ du = e^{\theta} d\theta;\ dv = sen\ \theta\ d\theta;\ v = -\cos\theta}$

$$= -e^{\theta} cos\ \theta - \int -cos\theta\, e^{\theta}\ d\theta = -e^{\theta} cos\ \theta + \int cos\theta\, e^{\theta}\ d\theta =$$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:
$\boldsymbol{u = e^{\theta};\ du = e^{\theta} d\theta;\ dv = cos\ \theta\ d\theta;\ v = \mathbf{sen}\ \theta}$

$$-e^{\theta} cos\ \theta + e^{\theta} sen\ \theta - \int e^{\theta}\ sen\theta\ d\theta = \int e^{\theta}\ sen\theta\ d\theta$$

$$-e^{\theta} cos\ \theta + e^{\theta} sen\ \theta = \int e^{\theta}\ sen\theta\ d\theta + \int e^{\theta}\ sen\theta\ d\theta =$$

$$-e^{\theta} cos\ \theta + e^{\theta} sen\ \theta = 2\int e^{\theta}\ sen\theta\ d\theta$$

Respuesta: $\boldsymbol{\dfrac{-e^{\theta} cos\ \theta}{2} + \dfrac{e^{\theta} sen\ \theta}{2} + C}$

$\mathbf{85.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \boldsymbol{(x^2 - 5x)e^x\ dx}$

Solución.-
Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:
$\boldsymbol{u = x^2 - 5x;\ du = 2x - 5\ dx;\ dv = e^x;\ v = e^x}$

$$= (x^2 - 5x)e^x - \int (2\,x - 5)e^x\ \ dx =$$

$$= (x^2 - 5x)e^x - \left(2\int e^x\ x\ dx - 5\int e^x dx\right)$$

$$= (x^2 - 5x)e^x - 2\int e^x\ x\ dx + 5\int e^x dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:
$\boldsymbol{u = x\ ;\ du =\ dx;\ dv = e^x;\ v = e^x}$

$$= (x^2 - 5x)e^x - 2\left(x\ e^x - \int e^x dx\right) + 5e^x$$

$$= (x^2 - 5x)e^x - 2xe^x + 2e^x + 5e^x + C$$

$= e^x\, x^2 - 5xe^x - 2xe^x + 2e^x + 5e^x + C$

$= e^x\, x^2 - 7xe^x + 7e^x + C$=

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{e^x\,(x^2 - 7x + 7) + C}$

$\mathbf{86.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \displaystyle\int \boldsymbol{t^2 \cos t\; dt}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = t^2;\ du = 2t\ dt;\ dv = \cos t\,;\ v = sen\ t}$

$= t^2\ sen\ t - \displaystyle\int 2\ t\ sen\ t\ dt = t^2\ sen\ t - 2\int t\ sen\ t\ dt =$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = t;\ du = dt;\ dv = \text{sen}\ t;\ v = -\cos t}$

$= t^2\ sen\ t - 2(-t\cos t) - 2\displaystyle\int -\cos t\ dt$

$= t^2\ sen\ t + 2t\cos t - 2\displaystyle\int \cos t\ dt =$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{t^2\ sen\ t + 2t\cos t - 2sen\ t + C}$

$\mathbf{87.-}\boldsymbol{Resolver}: \displaystyle\int \boldsymbol{\ln(x + x^2)\ dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln|x + x^2|\ ;\ du = \dfrac{1}{x + x^2}(1 + 2x)dx;\ dv = dx;\ v = x}$

$= x\ \ln(x + x^2) - \displaystyle\int x\left(\frac{1 + 2x}{x + x^2}\right) dx =$

$= x\ \ln(x + x^2) - \displaystyle\int \frac{x(1 + 2x)}{x(1 + x)}\ dx =$

$= x\ \ln(x + x^2) - \displaystyle\int \frac{(1 + 2x)}{(1 + x)}\ dx =$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 1 + x; du = dx; x = u - 1}$

$= x\ \ln(x(1 + x)) - \left(\displaystyle\int \frac{du}{u} + \int \frac{2x}{1 + x}dx\right) =$

$$= x\ \ln\big(x(1+x)\big) - \left(\ln u + 2\int \frac{u-1}{u}\,du\right) =$$

$$= x\ \ln\big(x(1+x)\big) - \ln u - 2\left(\int \frac{\cancel{u}}{\cancel{u}}\,du - \int \frac{du}{u}\right) =$$

$$= x\ \ln\big(x(1+x)\big) - \ln u - 2(u - \ln u) =$$

Respuesta: $\boldsymbol{x\ \ln\big(x(1+x)\big) - \ln|1+x| - 2[(1+x) - \ln|1+x|] + C}$

$88.-$***Resolver***: $\displaystyle\int \boldsymbol{x\sqrt{1-x}\,dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x;\ du = dx;\ \ dv = (1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx;\ v = -\dfrac{2\sqrt{(1-x)^3}}{3}}$

$$= -\frac{2x\sqrt{(1-x)^3}}{3} - \int\left(-\frac{2\sqrt{(1-x)^3}}{3}\right)dx =$$

$$= -\frac{2x\sqrt{(1-x)^3}}{3} + \frac{2}{3}\int (1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= -\frac{2x\sqrt{(1-x)^3}}{3} - \frac{2}{3}\int (u)^{\frac{3}{2}}\,du =$$

$$= -\frac{2x\sqrt{(1-x)^3}}{3} - \frac{4}{15}u^{\frac{5}{2}} + C = -\frac{2x\sqrt{(1-x)^3}}{3} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}} + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\dfrac{2x\sqrt{(1-x)^3}}{3} - \dfrac{4}{15}\sqrt{(1-x)^5} + C}$

$89.-$***Resolver***: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}\,dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = xe^{2x},du = e^{2x} + 2xe^{2x};dv = \dfrac{1}{(1+2x)^2},v = -\dfrac{1}{2(2x+1)}}$

$$= xe^{2x}\left(-\frac{1}{2(2x+1)}\right) - \int\left(-\frac{(e^{2x}+2xe^{2x})}{2(2x+1)}\right)dx$$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}(2x+1)}{(2x+1)}dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2x;\ du = 2dx}$

$$= -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}\int e^u\,du = -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}e^u + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: -\frac{xe^{2x}}{2(2x+1)} + \frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

90.−*Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{x^5 e^{x^2}\,dx} = \int x^5 e^u \frac{du}{2x}$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^2; du = 2xdx\ ; dx = \dfrac{du}{2x}}$

$$= \frac{1}{2}\int u^2 e^u\,du =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = u^2; du = 2u\ du\ ; dv = \int e^u\ ; v = e^u}$

$$= \frac{1}{2}\left[u^2e^u - \int e^u\,(2u)du\right] = \frac{1}{2}\left[u^2e^u - 2\int e^u\,udu\right]$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = u; du = 1\ du\ ; dv = \int e^u\ ; v = e^u}$

$$= \frac{1}{2}\left[u^2e^u - 2(ue^u - e^u)\right] = \frac{1}{2}\left[(x^2)^2e^{x^2} - 2(x^2e^{x^2} - e^{x^2})\right]$$

$$\boldsymbol{Respuesta: \frac{x^4e^{x^2}}{2} - x^2e^{x^2} + e^{x^2} + C}$$

91.− *Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{x^2 Tan^{-1}(x)dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = tan^{-1}(x); du = \dfrac{1}{x^2+1}; dv = \int x^2\ ; v = \dfrac{x^3}{3}}$

$$= \left(tan^{-1}(x)\right)\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \left(tan^{-1}(x)\right)\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^2 + 1; du = 2xdx;\ x^2 = u - 1}$

$$= \frac{x^3tan^{-1}(x)}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{u}\frac{1}{2x}du = \frac{x^3tan^{-1}(x)}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{2u}dx$$

$$= \frac{x^3tan^{-1}(x)}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}du$$

$$= \frac{x^3tan^{-1}(x)}{3} - \frac{1}{6}\left[\int \frac{\cancel{u}}{\cancel{u}}du - \int \frac{du}{u}\right] = \frac{x^3tan^{-1}(x)}{3} - \frac{1}{6}[u - \ln|u|]$$

$$= \frac{x^3tan^{-1}(x)}{3} - \frac{1}{6}[x^2 + 1 - \ln|x^2+1|]$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{x^3tan^{-1}(x)}{3} - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} + \frac{\ln|x^2+1|}{6} + C}$

$\boldsymbol{92.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int \frac{y}{Sen^2(y)}\ dy}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = y; du = 1\ dy; dv = \int \frac{1}{Sen^2\ y}; v = -Cot\ (y)}$

$$= y\left(-Cot\ (y)\right) - \int -Cot(y)dy$$

$$= -y\ Cot(y) - (-\ln|Sen(y)|) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-y\ Cot(y) + ln|Sen(y)| + C}$

$\boldsymbol{93.-\ Resolver}$: $\boldsymbol{\int \frac{y\ e^{Sen^{-1}(y)}}{\sqrt{1-y^2}}\ dy} = \int ye^u du$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = Sen^{-1}(y); du = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy; dy = \sqrt{1-y^2}du}$

$\boldsymbol{u = sen^{-1}(y); y = sen(u)}$

$$= \int e^u sen(u)du =$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = e^u; du = e^u; dv = \int sen(u)\,; v = -cos(u)}$$

$$= e^u\big(-cos(u)\big) - \int (-cos(u))e^u du$$

$$= -cos(u)e^u + \int \cos(u)\, e^u du$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = e^u; du = e^u; dv = \int cos(u)\,; v = sen(u)}$$

$$\int e^u sen(u)du = -cos(u)e^u + \left[e^u sen(u) - \int e^u sen(u)du\right]$$

$$2\int e^u sen(u)du = -cos(u)e^u + e^u sen(u)$$

$$= -\frac{1}{2}\big(-cos(u)e^u + e^u sen(u)\big) = -\frac{1}{2}e^u(-cos(u) + sen(u))$$

$$\boldsymbol{Respuesta: -\frac{1}{2}e^{sen^{-1}(y)}\Big(-cos\big(sen^{-1}(y)\big) + sen\big(sen^{-1}(y)\big)\Big) + C}$$

$$\boldsymbol{94. - Resolver: \int \big(y^2 + y\big)e^{(1-2y)}dy}$$

$$= \int y^2 e^{(1-2y)}dy + \int y e^{(1-2y)}dy$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = 1 - 2y; du = -2dy}$$

$$\boldsymbol{u = y^2; du = 2ydy; dv = \int e^{(1-2y)}\,; v = -\frac{1}{2}e^{(1-2y)}}$$

$$\boldsymbol{u = y; du = 1\,dy; dv = \int e^{(1-2y)}\,; v = -\frac{1}{2}e^{(1-2y)}}$$

$$= \left[y^2\left(-\frac{1}{2}e^{(1-2y)}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{(1-2y)}(2y)dy\right]$$

$$+ \left[y\left(-\frac{1}{2}e^{(1-2y)}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{(1-2y)}dy\right]$$

$$= \left[-\frac{y^2}{2}e^{(1-2y)} + \int y\, e^{(1-2y)}dy\right] + \left[-\frac{y}{2}e^{(1-2y)} + \frac{1}{2}\int e^{(1-2y)}dy\right]$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = y; du = 1\,dy; dv = \int e^{(1-2y)}\ ; v = -\frac{1}{2}e^{(1-2y)}}$$

$$= \left[-\frac{y^2}{2}e^{(1-2y)} + (y)\left(-\frac{1}{2}e^{(1-2y)}\right) - \int -\frac{1}{2}e^{(1-2y)}dy\right]$$

$$+ \left[-\frac{y}{2}e^{(1-2y)} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int e^{u}du\right]$$

$$= \left[-\frac{y^2}{2}e^{(1-2y)} + \left(-\frac{y}{2}e^{(1-2y)}\right) + \frac{1}{2}\int e^{(1-2y)}dy\right]$$

$$+ \left[-\frac{y}{2}e^{(1-2y)} - \frac{1}{4}e^{(1-2y)}\right]$$

$$= \left[-\frac{y^2}{2}e^{(1-2y)} + \left(-\frac{y}{2}e^{(1-2y)}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int e^{u}\,du\right]$$

$$+ \left[-\frac{y}{2}e^{(1-2y)} - \frac{1}{4}e^{(1-2y)}\right]$$

$$= \left[-\frac{y^2}{2}e^{(1-2y)} + \left(-\frac{y}{2}e^{(1-2y)}\right) - \frac{1}{4}e^{(1-2y)}\right]$$

$$+ \left[-\frac{y}{2}e^{(1-2y)} - \frac{1}{4}e^{(1-2y)}\right]$$

$$\boldsymbol{Respuesta: \frac{y^2}{2}e^{(1-2y)} - y\ e^{(1-2y)} - \frac{1}{2}e^{(1-2y)} + C}$$

$\boldsymbol{95.- Resolver: \int Cos(\,y)\sqrt{e^{y}}\ dy}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = \sqrt{e^{y}}; du = \frac{e^{\frac{y}{2}}}{2}\ ; dv = \int Cos(y)\ ;\ v = Sen(y)}$$

$$= \sqrt{e^{y}}\big(Sen(y)\big) - \int Sen(y)\left(\frac{e^{\frac{y}{2}}}{2}\right)dy$$

$$= \sqrt{e^{y}}\big(Sen(y)\big) - \frac{1}{2}\int e^{\frac{y}{2}}Sen(y)dy$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = \sqrt{e^{y}}; du = \frac{e^{\frac{y}{2}}}{2}\ ; dv = \int Sen\ (y)\ ;\ v = -Cos(y)}$$

$$= \sqrt{e^y}(Sen(y)) - \frac{1}{2}[-\sqrt{e^y}(Cos(y)) - \int -Cos(y)\left(\frac{e^{\frac{y}{2}}}{2}\right)dy$$

$$= \sqrt{e^y}(Sen(y)) + \frac{1}{2}\sqrt{e^y}(Cos(y)) - \frac{1}{4}\int e^{\frac{y}{2}}Cos(y)dy$$

$$= \frac{5}{4}\int Cos(\,y)\sqrt{e^y}\,dy = \sqrt{e^y}(Sen(y)) + \frac{1}{2}\sqrt{e^y}(Cos(y))$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{4}{5}\sqrt{e^y}(Sen(y)) + \frac{2}{5}\sqrt{e^y}(Cos(y)) + C}$

$\boldsymbol{96.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int \frac{ln^2 x}{x^{5/3}}\,dx}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = ln^2 x; du = \frac{2lnx}{x}dx; dv = \int \frac{1}{x^{5/3}}; v = -\frac{3}{2x^{2/3}}}$

$$= ln^2 x\left(-\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}\right) - \int\left(-\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}\right)\frac{2lnx}{x}\,dx = -\frac{3ln^2 x}{2x^{\frac{2}{3}}} + 3\int \frac{\ln x}{x^{\frac{5}{3}}}\,dx$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \ln x\ ; du = \frac{1}{x}; dv = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\ ; v = -\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}}$

$$= -\frac{3ln^2 x}{2x^{\frac{2}{3}}} + 3\left[\ln x\left(-\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}\right) - \int\left(-\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}\right)\frac{1}{x}\,dx\right]$$

$$= -\frac{3ln^2 x}{2x^{\frac{2}{3}}} + 3\left[-\frac{3\ln x}{2x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}\right]$$

$$= -\frac{3ln^2 x}{2x^{\frac{2}{3}}} + 3\left[-\frac{3\ln x}{2x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{2}\int x^{-\frac{5}{3}}dx\right]$$

$$= -\frac{3ln^2 x}{2x^{\frac{2}{3}}} + 3\left[-\frac{3\ln x}{2x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{2}\left(\frac{x^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}\right)\right]$$

$$= -\frac{3ln^2 x}{2x^{\frac{2}{3}}} + 3\left[-\frac{3\ln x}{2x^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}\right)\right]$$

$$= -\frac{3ln^2x}{2x^{\frac{2}{3}}} + 3\left[-\frac{3\ln x}{2x^{\frac{2}{3}}} - \frac{9}{4x^{\frac{2}{3}}}\right]$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{ln}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\frac{2}{3}}} - \frac{\mathbf{9}\ln \boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\frac{2}{3}}} - \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\frac{2}{3}}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{97.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{ln}\left(\mathbf{2} + \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}\right)}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}\, \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{ln}|\mathbf{2} + \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}|; \boldsymbol{du} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}(2+\sqrt[3]{x})}; \boldsymbol{dv} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}; \boldsymbol{v} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}$$

$$= ln|2 + \sqrt[3]{x}|\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} - \int \frac{1}{\cancel{3x^{\frac{2}{3}}}(2+\sqrt[3]{x})}\frac{\cancel{3x^{\frac{2}{3}}}}{2}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}ln|\sqrt[3]{x}+2| - \int \frac{1}{2\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}dx$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}^{\frac{1}{3}}; \boldsymbol{u}^{\mathbf{3}} = \boldsymbol{x}; \mathbf{3}\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{du} = \boldsymbol{dx};$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}ln|\sqrt[3]{x}+2| - \frac{1}{2}\int \frac{3u^2du}{u+2}dx$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \mathbf{2}; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \mathbf{2}; \boldsymbol{dv} = \boldsymbol{du}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}ln|\sqrt[3]{x}+2| - \frac{3}{2}\int \frac{(v-2)^2dv}{v}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}ln|\sqrt[3]{x}+2| - \frac{3}{2}\int \frac{(v^2-4v+4)\,dv}{v}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}ln|\sqrt[3]{x}+2| - \frac{3}{2}[\int \frac{v^2}{v} - 4 + \frac{4}{v}\, dv]$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^{\frac{2}{3}}\boldsymbol{ln}|\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}+\mathbf{2}| - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}+\mathbf{2}\right)^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}+\mathbf{2}\right) + \mathbf{4}\,\boldsymbol{ln}|\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}+\mathbf{2}|\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{98.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{Sec^3(m)dm} = \int Sec^2(m)\, Sec\,(m)\, dm$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = Sec\ m; du = Sec\ m\, Tan\ m; dv = sec^2 m; v = Tan\ m}$

$$= Sec\ m\, Tan\ m - \int \tan m \sec m \tan m\ dm$$

$$= Sec\ m\, Tan\ m - \int \tan^2 m \sec m\, dm$$

$$= Sec\ m\, Tan\ m - \int (\mathrm{Sec}^2 m - 1) \sec m\, dm$$

$$= Sec\ m\, Tan\ m - \int \mathrm{Sec}^3 m\, dm - \int \sec m\, dm$$

$$2\int \mathrm{Sec}^3 m = Sec\ m\, Tan\ m - \ln(\sec m + \tan m)$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Sec\ m\ Tan\ m} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}(\mathbf{sec}\,\boldsymbol{m} + \mathbf{tan}\,\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{99.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \sqrt{\frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x-1}}}\ \boldsymbol{dx} = \int \sqrt{\frac{u+1+2}{u}}\, du$$

$$= \int \sqrt{\frac{3}{u} + 1du}$$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x - 1; x = u + 1;\ du = dx}$

$\boldsymbol{v = \frac{3}{u}; u = \frac{3}{v} dv = -\frac{3}{u^2} du;\ -\frac{u^2 dv}{3} = du}$

$$= \int -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{v}\right)^2 \sqrt{v+1}dv = -\frac{1}{3}\int \left(\frac{3}{v}\right)^2 \sqrt{v+1}dv$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{9\sqrt{v+1}}{v^2} dv = -3\int \frac{\sqrt{v+1}}{v^2} dv$$

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = \sqrt{v+1}; du = \frac{1}{2\sqrt{v+1}}; dv = \frac{1}{v^2}; v = -\frac{1}{v}}$

$$= -3\left[\sqrt{v+1}\left(-\frac{1}{v}\right) - \int \frac{1}{2\sqrt{v+1}}\left(-\frac{1}{v}\right)dv\right]$$

$$= -3[-\frac{\sqrt{v+1}}{v} - \int -\frac{1}{2v\sqrt{v+1}}dv]$$

$$= -3[-\frac{\sqrt{v+1}}{v} - (-\frac{1}{2}\int \frac{1}{v\sqrt{v+1}}dv)]$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{w = \sqrt{v+1}; dw = \frac{1}{2w}dv}$$

$$= -3[-\frac{\sqrt{v+1}}{v} - (-\frac{1}{2}\int \frac{2}{w^2-1}dw)]$$

$$\boldsymbol{w^2 - 1 = -(-w^2 + 1)}$$

$$= -3[-\frac{\sqrt{v+1}}{v} - (-\frac{1}{2}2\int \frac{1}{-(-w^2+1)}dw]$$

$$= -3\left[-\frac{\sqrt{v+1}}{v} - \left(-\frac{1}{2}2\left(-\int \frac{1}{-w^2+1}dw\right)\right)\right]$$

$$= -3(-\frac{\sqrt{v+1}}{v} - (\frac{1}{2}\ln(\frac{w+1}{w-1}))$$

$$= -3\left[-\frac{\sqrt{\frac{3}{x-1}+1}}{\frac{3}{x-1}} - \left(\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{\frac{3}{x-1}+1}+1}{\sqrt{\frac{3}{x-1}+1}-1}\right)\right)\right]$$

$$\boldsymbol{Respuesta: -3\left[-\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,(x-1)}{3} - \left(\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-1}\right)\right)\right] + C}$$

100.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int (y+1)^2\,((y+1)^2+3)^2\;dy}$

Solución.-

Se encuentran los valores de u, du, dv y v para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$$\boldsymbol{u = (y+1)^2; du = 2\,(y+1)dy; dv = \int ((y+1)^2+3)^2 dy;}$$

$$\boldsymbol{v = \frac{1}{5}(y+1)^5 + 2(y+1)^3 + 9\,(y+1)}$$

$$= \frac{1}{5}(y+1)^7 + 2(y+1)^5 + 9(y+1)^3$$
$$- \int \frac{2}{5}(y+1)^6 + 4(y+1)^4 + 18(y+1)^2 du$$
$$= \frac{1}{5}(y+1)^7 + 2(y+1)^5 + 9(y+1)^3 - \frac{2}{35}(y+1)^7 - \frac{4}{5}(y+1)^5$$
$$- 6(y+1)^3 + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{7}(y+1)^7 + \frac{6}{5}(y+1)^5 + 3(y+1)^3 + C}$

3.2EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Utilizando la técnica de integración por partes, resuelva las siguientes integrales:

$1.-\int ln^2\,\omega\, d\omega$

$2.-\int \frac{\theta\, Cos\,\theta}{Sen^2\,\theta} d\theta$

$3.-\int \beta\, Sen^{-1}\beta\, d\beta$

$4.-\int Cos^2(\ln\rho)\;\; d\rho$

$5.-\int \omega\,\sqrt{1-\omega}\, d\omega$

Respuestas a los ejercicios propuestos

1: $\omega\ln\omega(\ln\omega-2)+2\omega+C$

2: $-\theta\, Csc\,\theta+\ln|Csc\,\theta-Cot\,\theta|+C$

3: $\frac{2\,\beta^2-1}{4} Sen^{-1}\beta+\frac{\beta}{4}\sqrt{1-\beta^2}+C$

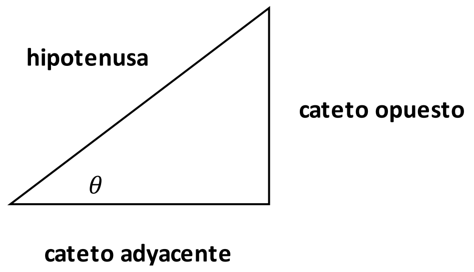
4: $\frac{\rho}{2}+\frac{2\,\rho\, Sen\,(2\ln\rho)+\;\rho\, Cos\,(2\ln\rho)}{10}+C$

5: $-\frac{2\omega\sqrt{(1-\omega)^3}}{3}-\frac{4}{15}\sqrt{(1-\omega)^5}+C$

4. SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Para esta técnica de integración se utiliza las identidades trigonométricas y conceptos fundamentales de trigonometría.

Recordemos las funciones trigonométricas a partir de un triángulo rectángulo, según (Larson, R., 2012).



Seno

$$Sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Coseno

$$Cos\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Tangente

$$Tan\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Cotangente

$$Cot\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

Secante

$$Sec\ \theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

Cosecante

$$Csc\ \theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

También se puede identificar que:

Cotangente

$$Cot\ \theta = \frac{1}{Tangente}$$

Secante

$$Sec\ \theta = \frac{1}{Coseno}$$

Cosecante

$$Csc\ \ \theta = \frac{1}{Seno}$$

Para realizar una integral indefinida por medio de sustitución trigonométrica se tendrá presente que la integral debe tener las siguientes formas de radical:

Formas de radical	**Sustitución**	**Simplificación**
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\ Sen\ t$	$\sqrt{a^2 - (a\ Sen\ t)^2}$ $= \sqrt{a^2 - a^2 Sen^2 t}$ $= \sqrt{a^2(1 - Sen^2 t)}$ $= a\sqrt{Cos^2\ t} = a\ Cos\ t$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\ Tan\ t$	$\sqrt{a^2 + (a\ Tan\ t)^2}$ $= \sqrt{a^2 + a^2 Tan^2 t}$ $= \sqrt{a^2(1 + Tan^2 t)}$ $= a\sqrt{Sec^2\ t} = a\ Sec\ t$

$\sqrt{x^2 - a^2}$ $\quad x = a\,Sec\,t \quad$ $\sqrt{(a\,Sec\,t)^2 - a^2}$

$$= \sqrt{a^2 Sec^2 t - a^2}$$
$$= \sqrt{a^2(\,Sec^2 t - 1)}$$
$$= a\sqrt{Tan^2\,t} = a\,Tan\,t$$

Es decir, el proceso de integración es:

- Se identifica la forma de radical determinado de esta manera cualquiera de los 3 casos mencionados anteriormente.
- Se identifica la sustitución y se deriva con respecto a la función integrable.
- Se identifica la simplificación.
- Se reemplaza la forma del radical por la simplificación y la función por la sustitución completando el diferencial de la función integrable.
- Se procede a realizar la integración utilizando integración directa o cualquier otra técnica de integración (Purcell, E. et al., 2007).

4.1 EJERCICIOS DE INTEGRALES CON SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

$$\mathbf{1.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2\sqrt{x^2+1}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{\cancel{sec^2 t}}{tan^2 t \cdot \cancel{sec\, t}}\, dt = \int \frac{sec\, t}{tan^2 t} dt =$$

$$\int \frac{\frac{1}{cos\, t}}{\frac{sen^2 t}{cos^2 t}} dt = \int \frac{cos t}{sen^2 t} dt = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du$$

Se aplica el siguiente cambio de variable

$\boldsymbol{u = sen\ t \quad du = cos t\, dt}$

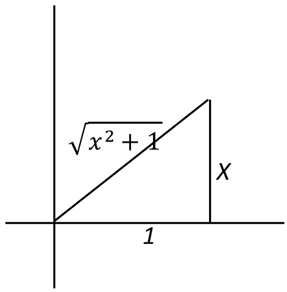
$$= -\frac{u^{-1}}{1} + c = -\frac{1}{u} + c$$

$$= -\frac{1}{sen\, t} + c;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$sen\, t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ = -\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} + c =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}}{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{x = a\, tan\, t}$

$x = tan\, t;\ \tan t = x$

$dx = sec^2 t$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{x = \ sec t}$

$$2.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{8\,dw}{w^2\sqrt{4-w^2}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

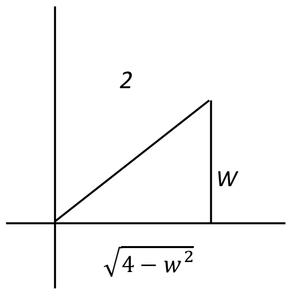
$$8\int \frac{\cancel{2\cos t}}{4\,sin^2 t\cdot \cancel{2\cos t}}\,dt = \frac{8}{4}\int \frac{dt}{sin^2 t}$$

$$=\frac{8}{4}\int csc^2 t\,dt - 2\,cot\,\,t\,+c\,;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente:

$$cot\,t\;=\frac{\sqrt{4-w^2}}{w}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\;-2\;\cdot\frac{\sqrt{4-w^2}}{w}+c$$



Sustitución

$w = a\;sen\;t$

$w = 2\;sen\;t;\quad Sen\;t = \frac{w}{2}$

$dw = 2\,cos\,t\,dt$

Simplificación

$\boldsymbol{w =\;2\,cost}$

$$3.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,dw$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

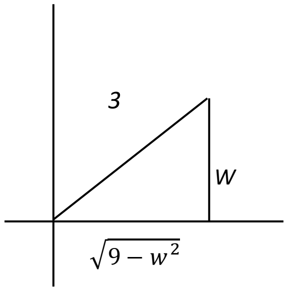
$$\int \frac{3\cos t\;\cdot 3\cos t}{(3\sin t)^2}dt = \frac{9}{9}\int \frac{cos^2 t}{sin^2 t}dt$$

$$=\int cot^2 t\,dt = -\cot t - t + c\,;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente y el valor de t:

$$cot\,t\;=\frac{\sqrt{9-w^2}}{w};\quad t = sin^{-1}\frac{w}{3}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\sqrt{9-w^2}}{w} - sin^{-1}\frac{w}{3} + c$$



Sustitución
$w = 3\,sen\,t$
$dw = 3\,cost\,dt$
Simplificación
$w = 3\,cost$

$$\mathbf{4.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{4x^2}{(1-\ x^{\,2})^{3/2}}\,dx$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

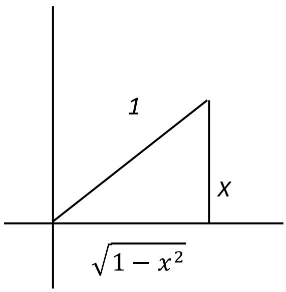
$$4\int \frac{sin^2 t\ \cdot\ \cancel{cos\,t}}{\cancel{cos^3 t}}\,dt = 4\int \frac{sin^2 t}{cos^2 t}dt$$

$$= 4\int tan^2 t\,dt = 4(tan\,t - t) + c;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y el valor de t:

$$tant = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\quad t = sin^{-1}x$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} - 4\,sin^{-1}x\ + c$$



Sustitución
$\boldsymbol{x = sen\,t}$
$dx = cos\,t\,dt$
Simplificación
$\boldsymbol{x = cos\,t}$

$$\mathbf{5.-\mathit{Resolver}}: \int \frac{dx}{(4-\ x^2)^{3/2}} =$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

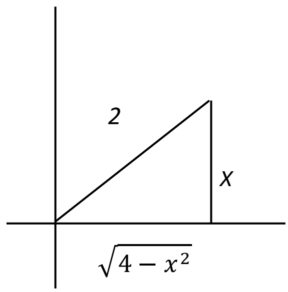
$$\int \frac{\cancel{2\,cos\,t}}{\cancel{8cos^3t}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{cos^2t} = \frac{1}{4}\int sec^2t\,dt$$

$$= \frac{1}{4}tan\,t + c\,;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$tan\,t\ =\ \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\quad =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}+\boldsymbol{c}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{x=2\,sen\,t}$
$dx = 2\,cost\,dt$
$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$
$x =\ 2\,cos\,t$

$$\mathbf{6.-\ \mathit{Resolver}}: \int \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\ +\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-
Se descompone el denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{2x+1}{(x^2+2x+1)+(2-1)}dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=x+1}$; $\quad \boldsymbol{du = dx}$; $\quad \boldsymbol{x=u-1}$

$$= \int \frac{2(u-1)+1}{u^2+1}du = \int \frac{2u-1}{u^2+1}du = 2\int \frac{u}{u^2+1}du - \int \frac{du}{u^2+1}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v = u^2\ +1}\quad \boldsymbol{dv = 2u\,du}$

$$= \int \frac{dv}{v} - \int \frac{\cancel{sec^2t}}{\cancel{sec^2\,t}}dt = lnv - \int dt =$$

$$= ln((x+1)^2+1) - t + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

$= ln(x^2 + 2x + 1 + 1) - tan^{-1}(x + 1) + c$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln\left(x^2 + 2x + 2\right) - tan^{-1}(x + 1) + c}$

$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

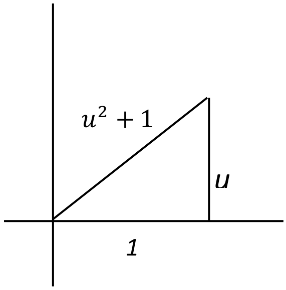
$x = a\ \ tan\, t$

$u = tan\, t$

$du = sec^2 t\, dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = \ sec\ \ t$



$$\mathbf{7.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{2x-1}}{\boldsymbol{x^2 - 6x + 18}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{2x - 1}{(x^2 - 6x + 9) + (18 - 9)}dx = \int \frac{2x - 1}{(x - 3)^2 + 9}dx;$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x - 3};\ \ \boldsymbol{du = dx}\ ;\ \ \boldsymbol{x = u + 3}$

$$= \int \frac{2x - 1}{u^2 + 9}du = \int \frac{2(u + 3) - 1}{u^2 + 9}du\ = \int \frac{2u + 5}{u^2 + 9}du$$

$$= 2\int \frac{u}{u^2 + 9}du\ + 5\int \frac{du}{u^2 + 9}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v = u^2 + 9}\quad \boldsymbol{dv = 2u\, du}$

$$= 2\int \frac{dv}{v} + 5\int \frac{\cancel{3\, sec^2 t}}{\cancel{9\, sec^2 t}}dt\ = lnv\ + 5\int \frac{\cancel{3\, sec^2 u}}{\cancel{9\, sec^2 u}}du$$

$$= 2\, lnv + \frac{5}{3}\int du\ = 2\, lnv + \frac{5}{3}t\ \ = 2\, lnv + \frac{5}{3}tan^{-1}\frac{u}{3} + c$$

$$= 2\, ln(u^2 + 9) + \frac{5}{3}tan^{-1}\frac{(x - 3)}{3} + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln\left((x - 3)^2 + 9\right) + \frac{5}{3}tan^{-1}\frac{(x-3)}{3} + c}$

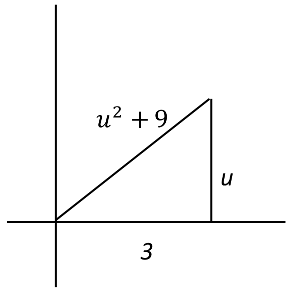
Sustitución

$x = a\tan t;\ u = 3\, tant\ t; \quad t = tan^{-1}\frac{u}{3}$

$du = 3\,sec^2\,t\,dt$

Simplificación

$u = 3\,sec\,t$



$$8. - \textbf{Resolver}: \int \frac{x}{x^2+9}dx$$

Solución.-

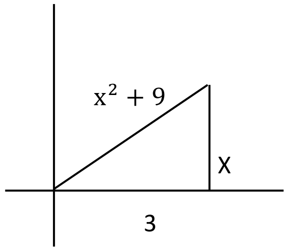
Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{3\,tan\,t\ \cdot\ \cancel{3\,sec^2 t}}{\cancel{9\,sec^2 t}}dt\ =\ \int tan\,t\,dt\ = ln|cos\,t| + c;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno:

$$cos\,t\ =\ \frac{3}{x^2+9}\ ;$$

Respuesta: $\boldsymbol{ln\left|\frac{3}{x^2+9}\right| + c}$



Sustitución

$x = 3\,tan\,t$

$dx = 3\,sec^2 t\,dt$

Simplificación

$x = 3\,sec\,t$

$$9. - \textbf{Resolver}: \int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}dx$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{(3\,tan\,t)^3 \cdot \cancel{(3sec^2 t)}}{\cancel{3\ sec\,t}}dt = \int \frac{27\,tan^3 t\ \cdot\ \cancel{3\,sec^2 t}}{\cancel{3\ sec\,t}}dt$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2 t - 1 = tan^2 t$*:*

$$= 27\int tan^2 t\ \cdot tan\,t\ \cdot sec\,t\,dt = 27\int(sec^2 t - 1)\cdot tan\,t \cdot sec\,t\,dt$$

$$= 27\int sec^2t \cdot tan\,t \cdot sec\,t\,dt - \int tan\,t \cdot sec\,t\,dt$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

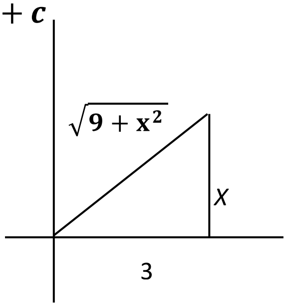
$\boldsymbol{u = sec\,t};\quad \boldsymbol{du = sec\,t \cdot tan\,t\ dt};$

$$= 27\int u^2du - sec\,t\ = \ \frac{27}{3}u^3 - sec\,t + c = 9\,sec^3t - sec\,t + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante:

$$= \cancel{9}\left(\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{\cancel{3}}\right)^3\right) - \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2} - \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + c}$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 3\ tan\,t$

$dx = 3\,sec^2t\,dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = \ 3\,sec\,t$

$\mathbf{10.} - \boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{\sqrt{4-x^2}}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2\,cos\,t\ \cdot\ 2\,cos\,t}{2\ sen\ t}dt\ = 2\int \frac{cos^2t}{sin\,t}dt\ =$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= 2\int \frac{(1 - sen^2t)}{sen\,t}dt = 2\left(\int \frac{1}{sen\,t}dt - \int \frac{\cancel{sen^2t}}{\cancel{sen\,t}}dt\right) =$$

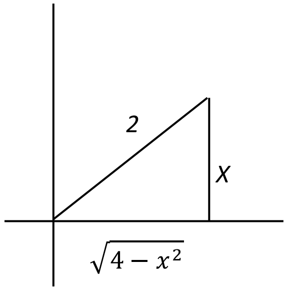
$$= 2\left(\int csc\,t\,dt - \int sen\,t\,dt\right) = 2\,ln(csc\,t - cot\,t) + 2\,cos\,t\ + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante, Cotangente y Coseno:

$\boldsymbol{csc\,t} = \boldsymbol{\frac{2}{x}};\ \ \boldsymbol{cot\,t} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}};\quad \boldsymbol{cos\ t} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}$

$$= 2\ ln\left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + \frac{2\sqrt{4-x^2}}{2} + c\ =$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 2\ ln\left(\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)+\sqrt{4-x^2}+c}$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$x = 2\ sen\ t$

$dx = 2\cos t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$x = \ 2\cos t$

$$\boldsymbol{11.-Resolver: \int \frac{ln^3 w}{w\sqrt{ln^2 w - 4}}dw}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{(2\ sec\ t)^3 \cdot \cancel{2}\ sec\ t\ \cdot \cancel{tan\ t}}{\cancel{2\ tan\ t}}dt =$$

$$= \int 8\ sec^4\ t\ dt = 8\int sec^2 t\ \cdot sec^2 t\ dt\ =$$

$$= 8\int (1+tan^2 t)sec^2 t\ dt = 8\left(\int sec^2 t\ dt + \int sec^2 t\ \cdot tan^2 t\ dt\right)$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

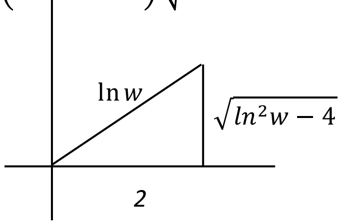
$\boldsymbol{u = tan\ t}$; $\boldsymbol{du = sec^2 t\ dt}$

$$= 8\ tan\ t + 8\int u^2\ du\ = 8\ tan\ t + 8\frac{u^3}{3} + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$= 8\ tan\ t + \frac{8\ tan^3 t}{3} + c = \frac{8\sqrt{ln^2 w - 4}}{2} + \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{ln^2 w - 4}}{2}\right)^3 + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 4\sqrt{ln^2 w - 4}\ +\ \frac{1}{3}\left(ln^2 w - 4\right)\sqrt{ln^2 w - 4} + C}$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$\ln w = 2\ sec\ t$

$\frac{dw}{w} = 2 sec\ t\ tan\ t\ \ dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$\ln w = \ 2\ tan\ t$

$$\mathbf{12.-}\ \boldsymbol{Resolver}\text{: } \int \frac{\boldsymbol{e^{-x}}}{\boldsymbol{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

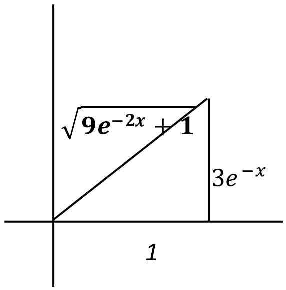
Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{tan\,t\ \cdot \cancel{sec^2 t}}{\cancel{sec^3 t}}dt\ = \int \frac{tan\,t}{sec\,t}dt$$

$$= \int \frac{\frac{sen\,t}{cos\,t}}{\frac{1}{cos\,t}}dt\ = \int sen\,t\ dt\ = -cos\,t + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno:

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{:} -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{9e^{-2x}+1}}} + \boldsymbol{c}$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$\boldsymbol{e^{-x}} = \ tan\,t$

$de^{-x} = sec^2 t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$e^{-x} = \ sec\,t$

$$\mathbf{13.-}\ \boldsymbol{Resolver}\text{: } \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x\sqrt{25-x^2}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

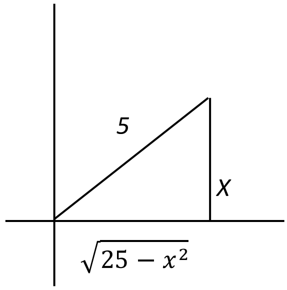
$$\int \frac{\cancel{5\ cos\,t}}{5\ sen\,t\ \cdot \cancel{5\,cos\,t}}dt\ = \int \frac{dt}{5\ sen\,t}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{sen\,t}\ = \frac{1}{5}\int csc\,t\,dt = \frac{1}{5}\ ln(csc\,t - cot\,t) + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante y Cotangente:

$$\boldsymbol{csc\,t} = \frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x}};\ \boldsymbol{cot\,t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{25-x^2}}}{\boldsymbol{x}}\ = \frac{1}{5}ln\left(\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\right) + c =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{ln}\left(\frac{\mathbf{5}-\sqrt{\boldsymbol{25-x^2}}}{\boldsymbol{x}}\right) + \boldsymbol{c}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$**ó**$\boldsymbol{n}$
$x = 5\ sen\, t$
$dx = 5\, cos\, t\ dt$
$\boldsymbol{Simplificaci}$**ó**$\boldsymbol{n}$
$x = 5\ \cos\ t$

14.− *Resolver*: $\boldsymbol{\int \sqrt{1-u^2}\ du}$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int cos\, t\ \cdot\ cos\, t\ dt\ = \int cos^2 t\, dt\ =$$

Se aplica la identidad trigonométrica del ángulo medio $\frac{1+cos\,2t}{2} = cos^2 t$:

$$= \int \frac{1+cos\,2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int 1 + cos\,2t\, dt\ \ = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int cos\,2t\, dt$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = 2t}$; $\boldsymbol{du = 2\ dt}$

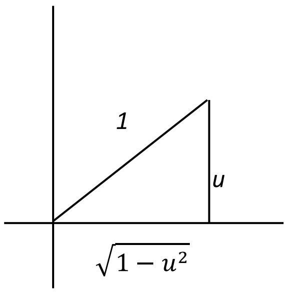
$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sen\,2t + c = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sen\ 2t + c\ =$$

$$= \frac{1}{2}sin^{-1}u + \frac{2}{4}sen\,t \cdot cos\,t + c =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$$= \frac{1}{2}sin^{-1}u + \frac{1}{2}\left(u\cdot\sqrt{1-u^2}\right) + c =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(sin^{-1} u + u\sqrt{1-u^2}\right) + c}$



$\boldsymbol{Sustituci}$**ó**$\boldsymbol{n}$
$u = sen\, t$
$du = cos\, t\ dt$
$\boldsymbol{Simplificaci}$**ó**$\boldsymbol{n}$
$u =\ cos\, t$

$$\mathbf{15.- \ Resolver}: \int \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{t\sqrt{t^4+25}}}\boldsymbol{dt}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

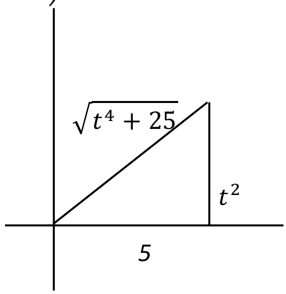
$$= 2\int \frac{\cancel{5\,sec^2}t}{5\tan t \cdot \cancel{5\sec t \cdot 2}}\,dt =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{5\cdot\cancel{2}}\int \frac{\sec t}{\tan t}dt = \frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{\cancel{\cos t}}}{\frac{sen\,t}{\cancel{\cos t}}}dt = \frac{1}{5}\int \frac{1}{sen\,t}dt = \frac{1}{5}\int \csc t\,dt$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante y Cotangente:

$$= \frac{1}{5}\ln(\csc t - \cot t) + c = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{\boldsymbol{\sqrt{t^4+25}}}{t^2} - \frac{5}{t^2}\right) + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{\ln}\left(\frac{\boldsymbol{\sqrt{t^4+25}-5}}{\boldsymbol{t^2}}\right)^{\mathbf{1/5}}$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$t^2 = 5\tan t$

$2\,t\,dt = 5\,sec^2 t\,dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$t^2 = 5\sec t$

$$\mathbf{16.- \ Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^4\sqrt{x^2+3}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{\cancel{\sqrt{3}\cdot sec^2 t}}{\left(\sqrt{3}\right)^4\cdot \tan^4 t\cdot \cancel{\sqrt{3}\sec t}}dt =$$

$$\int \frac{\sec t}{\sqrt{3^2\cdot 3^2}\tan^4 t}dt = \int \frac{1}{9}\frac{\sec t}{\tan^4 t}dt = \frac{1}{9}\int \frac{\frac{1}{\cancel{\cos t}}}{\frac{sen^4 t}{\cancel{\cos^4 t}}}dt$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\cos^3 t}{sen^4 t}dt = \frac{1}{9}\int \frac{\cos^2 t\cdot \cos t}{sen^4 t}dt$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= \frac{1}{9}\int \frac{(1 - sen^2 t)\cdot\, cos\, t}{sen^4 t}dt \quad = \frac{1}{9}\int \frac{cos\, t}{sen^4 t}dt - \frac{1}{9}\int \frac{\cancel{sen^2 t}\cdot\, cos\, t}{\cancel{sen^4 t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{cos\, t}{sen^4 t}\,dt - \frac{1}{9}\int \frac{cos\, t}{sen^2 t}\,dt$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\, t \quad du = cos\, t\; dt}$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^4} - \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^2} \;=\; \frac{1}{9}\int u^{-4}du - \frac{1}{9}\int u^{-2}du$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} - \frac{1}{9}\;\cdot\frac{u^{-1}}{-1} + c \;=\; -\frac{1}{27 sen^3 t} + \frac{1}{9\; sen\, t} + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$= -\frac{1}{27\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\right)^3} + \frac{1}{9\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)} + c$$

$$= -\frac{1}{\frac{27\, x^3}{x^2 + 3\sqrt{x^2+3}}} + \frac{1}{\frac{9\, x}{\sqrt{x^2+9}}} + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\dfrac{x^2 + 3\sqrt{x^2+3}}{27x^3} + \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{9\, x} + c}$

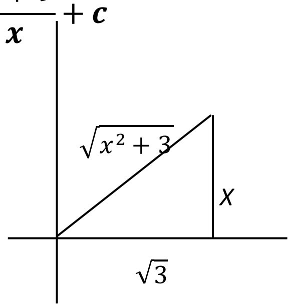
$\boldsymbol{Sustituci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$x = \sqrt{3}\, tan\, t$

$dx = \sqrt{3}\, sec^2 t\; dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$x = \sqrt{3}\, sec\, t$



$\boldsymbol{17.- Resolver}$: $\boldsymbol{\int x^2\sqrt{25 - x^2}\; dx}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int 25\, sen^2 t\;\cdot 5\, cos\, t\;\cdot 5\, cos\, t\;\, dt$$

Se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica

$= 625\int sen^2 t\;\cdot cos^2 t\, dt \;= 625\int (1 - cos^2 t) cos^2 t\, dt$

$= 625\int cos^2 t\, dt\; - 625\int cos^2 t\;\cdot\; cos^2 t\, dt$

$= 625\int cos^2 t\, dt\; - 625\int \left(\frac{1 + cos\, 2t}{2}\right)^2 dt$

$$= 625\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \;-\frac{625}{4}\int(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\,dt$$

$$= 625\left(\frac{1}{2}\int dt\;+\frac{1}{2}\int \cos 2t\;dt\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\int dt-\frac{2}{4}\int \cos 2t\;dt-\frac{1}{4}\int \cos^2 2t\,dt\right)$$

$$= 625\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,sen\,2t-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}sen\,2t-\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4t}{2}\;dt\right)$$

$$= 625\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\;sen\,2t-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}sen\,2t-\frac{1}{8}\int dt-\frac{1}{8}\int \cos 4t\,dt\right)$$

$$= 625\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\;sen\,2t-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}sen\,2t-\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}sen\,4t\right)+c$$

$$= 625\left(\frac{1}{2}t+\frac{2}{4}\;sen\,t\;\cos t-\frac{1}{4}t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}sen\,t\;\cos t-\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}sen\,2t\;sen\,2t\right)+c$$

$$= 625\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\;sen\,t\;\cos t-\frac{1}{4}t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}sen\,t\;\cos t-\frac{1}{8}t-\frac{1}{8}sen\,t\;\cos t\;sen\,t\;\cos t\right)$$

$$+c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{625}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sen^{-1}}\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{625}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5}}\frac{\sqrt{\mathbf{25}-\boldsymbol{x^2}}}{\mathbf{5}}\right)$$

$$-\frac{\mathbf{625}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{sen^{-1}}\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{625}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5}}\frac{\sqrt{\mathbf{25}-\boldsymbol{x^2}}}{\mathbf{5}}\right)$$

$$-\frac{\mathbf{625}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{sen^{-1}}\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\left(\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{25}}\frac{(\mathbf{25}-\boldsymbol{x^2})}{\mathbf{25}}\right)+\boldsymbol{c}$$

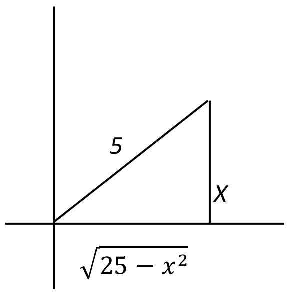
Sustitución

$x = 5\;sen\;t$

$dx = 5\cos t\;dt$

Simplificación

$x = 5\;\cos t$



$$\mathbf{18.-Resolver}: \int \frac{dw}{(w^2-4)^{3/2}}$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2\ sec\, t\ \cdot \cancel{tan\, t}}{\cancel{8\ tan^3 t}} dt\ = \ = \frac{1}{4}\int \frac{sec\, t}{tan^2 t} dt\ =\ \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cancel{cos\, t}}}{\frac{sin^2 t}{\cancel{cos^2 t}}} dt\ =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{cos\, t}{sin\, t}\cdot\frac{1}{sin\, t}dt = \frac{1}{4}\int cot\, t\ \cdot\ csc\, t\, dt\ =\ -\frac{1}{4}csc\, t + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante:

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(w^2-4)^{3/2}} + c\ =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}(\boldsymbol{w}^{\mathbf{2}}-\mathbf{4})^{3/2}} + \boldsymbol{c}$$

Sustitución

$w = 2\ sec\ t$

$dw = 2\, sec\ t\ \ tan\, t\, dt$

Simplificación

$w =\ 2\, tan\, t$

$$\mathbf{19.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{e^t}}{(\boldsymbol{e^{2t}} + \mathbf{8}\ \boldsymbol{e^t} + \mathbf{7})^{3/2}}\boldsymbol{dt}$$

Solución.-
Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = e^t}\quad \boldsymbol{du = e^t dt}$

$$= \int \frac{du}{(u^2+8u+7)^{3/2}} = \int \frac{du}{(u^2+8u+16)+(7-16)} =$$

$$= \int \frac{du}{(u+4)^2-9}$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v = u + 4}\quad \boldsymbol{dv = du}$

$$= \frac{dv}{(v^2-9)^{3/2}}\ =$$

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{\cancel{3}\ sec\,t \cdot \cancel{tan\,t}}{\cancel{27\ tan^3 t}} = \frac{1}{9}\int \frac{sec\,t}{tan^2 t}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\frac{1}{\cancel{cos\,t}}}{\frac{sen^2 t}{\cancel{cos^2 t}}}dt = \frac{1}{9}\int \frac{cos\,t}{sen^2 t}dt$$

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sent \quad du = cos\,t\ dt}$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{9}\int u^{-2}du = \frac{1}{9}\frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{9\,sen\,t} + c =$$

$$= -\frac{1}{9}csc\,t + c =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante:

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{((u+4)^2-9)^{3/2}} + c$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{(e^{2t}+8e^t+16-9)^{3/2}} + c =$$

$$\textbf{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\,(\boldsymbol{e^{2t}} + \mathbf{8}\boldsymbol{e^t} + \mathbf{7})^{3/2}} + \boldsymbol{c}$$

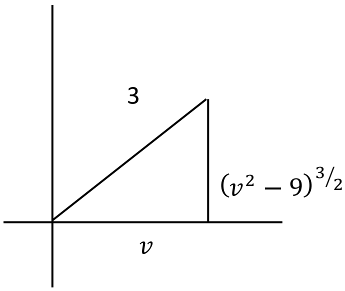
Sustitución

$v = 3\,sec\,t$

$dv = 3\,sec\,t\ \ tant\,dt$

Simplificación

$v = 3\,tan\,t$



$$\mathbf{20.-}\ \textbf{Resolver}: \int \frac{\sqrt{\mathbf{16} - \boldsymbol{e^{2x}}}}{\boldsymbol{e^x}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{4\ cos\,t\ \cdot\ 4\ cos\,t}{4\ sen\,t}dt = 4\int \frac{cos^2 t}{sen\,t}dt$$

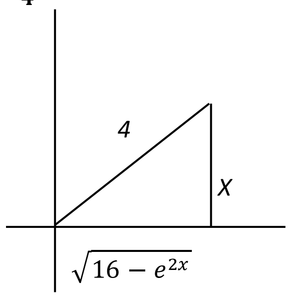
Se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= 4\int \frac{1-sen^2 t}{sen\,t}\,dt = 4\int \frac{1}{sin\,t}\,dt - 4\int \frac{\cancel{sen^2 t}}{\cancel{sen\,t}}\,dt$$

$$= 4\int csc\,t\,dt - 4\int sen\,t\,dt = 4\,ln(csc\,t - cot\,t) + 4\,cos\,t + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante, Cotangente y Coseno:

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{4\,ln\left(\frac{4}{x} - \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{x}\right) - 4\frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{4} + c}$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$e^x = 4\,sen\,t$

$dx = 4\,cos\,t\;dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$e^x = 4\,cos\,t$

$\boldsymbol{21.- Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{2x+1}}{\boldsymbol{x^2+2x+2}}\,\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2x+1}{(x^2+2x+1)+(2-1)}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x+1}$; $\boldsymbol{x = u-1}$; $\boldsymbol{du = dx}$

$$= \int \frac{2(u-1)+1}{u^2+1}\,du = \int \frac{2u-1}{u^2+1}\,du =$$

$$= 2\int \frac{u}{u^2+1}\,du - \int \frac{du}{u^2+1} =$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable:

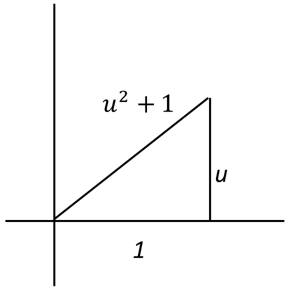
$\boldsymbol{v = u^2+1 \;\; dv = 2u\,du}$

$$= \int \frac{dv}{v} - \int \frac{sec^2 t}{sec^2 t}\,dt = ln\,v - \int dt = ln(u^2+1) - t + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

$$= ln((x+1)^2+1) - tan^{-1}u + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$:$\boldsymbol{ln\,(x^2+2x+2) - tan^{-1}(x+1) + c}$



$\boldsymbol{Sustitución}$
$u = tan\, t$
$du = sec^2 t\, dt$
$\boldsymbol{Simplificación}$
$u = sec\, t$

$$\mathbf{22.-\boldsymbol{Resolver}:} \int \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{6}\boldsymbol{x}+\mathbf{18}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{2x-1}{(x^2-6x+9)+(18-9)}dx = \int \frac{2x-1}{(x-3)^2+9}dx$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x - 3};\quad \boldsymbol{x = u + 3};\quad \boldsymbol{du = dx}$

$$= \int \frac{2(u+3)-1}{u^2+9}du = \int \frac{2u+5}{u^2+9}du = \int \frac{2u}{u^2+9}du + 5\int \frac{du}{u^2+9}$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v = u^2 + 9};\quad \boldsymbol{dv = 2u\, du}$

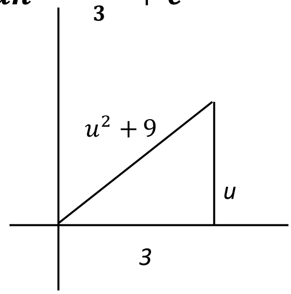
Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{dv}{v} + 5\int \frac{3\, sec^2 t}{9\, sec^2 t}dt = ln v + \frac{5}{3}\int dt = \ln(u^2+9) + \frac{5}{3}t + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

$$= ln((x-3)^2+9) + \frac{5}{3}tan^{-1}\frac{u}{3} + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln\left(x^2-6x+18\right)+\frac{5}{3}tan^{-1}\frac{(x-3)}{3}+c}$



$\boldsymbol{Sustitución}$
$u = 3\, tan\, t$
$du = 3\, sec^2 t\, dt$
$\boldsymbol{Simplificación}$
$u = 3\, sec\, t$

$$\mathbf{23.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+9}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

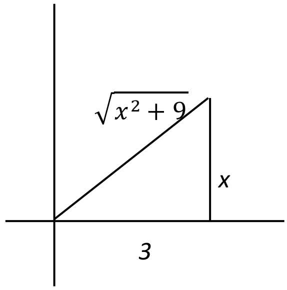
$$\int \frac{3\ \tan t\ \cdot \cancel{3\ sec^2 t}}{\cancel{(3\ sec\ t)^2}}dt\ = \int \frac{3\ \tan t\ \cdot \cancel{3\ sec^2 t}}{\cancel{9\ sec^2 t}}dt\ = \int \tan t\, dt =$$

$$-ln(cos t) + c$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno:

$$= -\ ln\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}\right) + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\boldsymbol{ln\,3} + \boldsymbol{ln}\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2+9}}\right) + \boldsymbol{c}$$



Sustitución

$x = 3\ \tan t$

$dx = 3\, sec^2 t\, dt \qquad cos\,t\ = \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$

Simplificación

$x = 3\, sec\, t$

$$\mathbf{24.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\sqrt{\boldsymbol{9+y^2}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

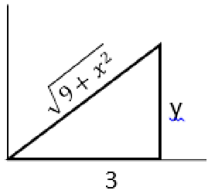
$$= \int \frac{\cancel{\boldsymbol{3\ sec^2 t}}}{\cancel{\boldsymbol{3\ sect}}}\boldsymbol{dt} = \int sec\,t\,dt = ln|sec\,t + tan\,t| + C\ =$$

$$= ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{y}{3}\right| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante y Tangente:

$$= ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}+y}{3}\right| + C\ = ln\left|y+\sqrt{9+x^2}\right| - \cancel{ln|3| + C}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln}\left|\boldsymbol{y} + \sqrt{\boldsymbol{9+y^2}}\right| + \boldsymbol{k}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$y = 3\, tan\, t$

$dy = 3\, sec^2 t\, dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$ $x = 3\sec t$

$$\mathbf{25.- \; \mathit{Resolver}}: \int \frac{\boldsymbol{3dy}}{\sqrt{\boldsymbol{1+9y^2}}}$$

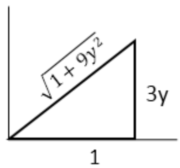
Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{3\ {}^{1}\!/_{3}\,\cancel{sec^2 t}}{\cancel{sec\, t}} dt = \int sec\, t\, dt = ln|sec\, t + tan\, t| + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante y Tangente:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln}\left|\sqrt{\boldsymbol{1+9y^2}} + \boldsymbol{3y}\right| + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$y = \frac{1}{3}\, tan\, t$

$dy = \frac{1}{3}\, sec^2 t\, dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$$\sqrt{1+9y^2} = \sqrt{9\left(\frac{1}{9}\right) + y^2} = 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + y^2} = 3\left(\frac{1}{3}\sec t\right) = \sec t$$

$$\mathbf{26.- \mathit{Resolver}}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{9-x^2}}}$$

Solución.-

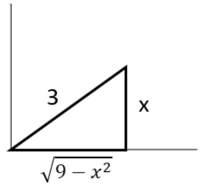
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{3\,\cancel{cos\, t}}{\cancel{3\, cos\, t}} dt = \int dt = t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

$sen\, t = \frac{x}{3};\;\; t = sen^{-1}\frac{x}{3}$

$\boldsymbol{Respuesta: sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C}$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$x = 3\ sen\ t$

$dx = 3\ cos\ t$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$x = 3\ cos\ t$

$\boldsymbol{27.-Resolver: \int \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{cos\ t}\right)}{\cancel{cos\ t}} dt = \int dt = t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

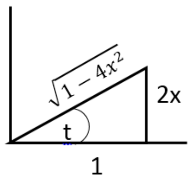
$sen\ t = 2x;\ \ t = sen^{-1}\ 2x$

$\boldsymbol{Respuesta: sen^{-1}(2x) + C}$

$\boldsymbol{Sustitución}$

$x = \frac{1}{2}\ sen\ t$

$dx = \frac{1}{2}\ cos\ t$



$\boldsymbol{Simplificación}$

$$\sqrt{4\left(\frac{1}{4} - x^2\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} = 2\left(\frac{1}{2}\cos t\right);\ x = \cos t$$

$\boldsymbol{28.-\ Resolver: \int \sqrt{25 - t^2}dt}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$\int 5\ cos\,t\,5\ cos\,t\,dt = \int 25cos^2 t\ dt$$

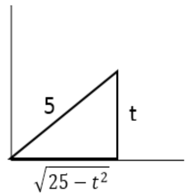
Se utiliza la identidad trigonométrica del ángulo medio:

$$= 25\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{25}{2}\int (1+\cos 2t)dt$$
$$= \frac{25}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\, dt\right) = \frac{25}{2}\left(t + \frac{1}{2}sen\, u\right) + C$$
$$= \frac{25}{2}\left(t + \frac{1}{2}sen\, 2t\right) + C = \frac{25}{2}\, t + \frac{25}{4}sen\, 2t + C$$
$$= \frac{25}{2}\, t + \frac{25}{4}2sen\, t\cos t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$$\boldsymbol{sen\, t = \frac{t}{5};\ t = sen^{-1}\frac{t}{5};\quad \cos t = \frac{\sqrt{25-t^2}}{5}}$$
$$= \frac{25}{2}sen^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) + \left(\frac{\cancel{25}}{2}.\frac{t}{\cancel{5}}.\frac{\sqrt{25-t^2}}{\cancel{5}}\right) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{25}{2}\ sen^{-1}\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{t\sqrt{25-t^2}}{2} + C}$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$t = 5\, sen\, t$

$dt = 5\cos t\, dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 5\cos t$

$\boldsymbol{29.- Resolver}$: $\boldsymbol{\int \sqrt{1-9t^2}dt}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \cos t.\frac{1}{3}\cos t\, dt = \frac{1}{3}\int \cos^2 t\ dt = \frac{1}{3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\, dt\right) = \frac{1}{6}\left(t + \frac{1}{2}\int \cos u\, du\right) =$$
$$\frac{1}{6}\left(t + \frac{1}{2}sen\, u\right) + C = \frac{1}{6}\left(t + \frac{1}{2}sen\, 2t\right) + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

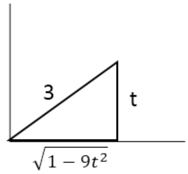
$$\boldsymbol{sen\, t = \frac{t}{3};\ t = sen^{-1}\frac{t}{3};\quad \cos t = \frac{\sqrt{1-9t^2}}{3}}$$

$$= \frac{1}{6}\ t + \frac{1}{12} sen\ 2t + C = \frac{1}{6}\ t + \frac{1}{12} 2sen\ t\ cos\,t + C$$

$$= \frac{1}{6} sen^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{t}{3} \cdot \frac{\sqrt{1-9t^2}}{3}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\ \boldsymbol{sen^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{3}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{54}} \boldsymbol{t}\sqrt{\mathbf{1}-\mathbf{9}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}} + \boldsymbol{C}$$

Sustitución



$$t = \frac{1}{3}\ sen\ t$$

$$dt = \frac{1}{3}\ cos\ t\ dt$$

Simplificación

$$\sqrt{9\left(\frac{1}{9} - t^2\right)}; 3\sqrt{\frac{1}{9} - t^2}; 3\left(\frac{1}{3}\cos t\right); x = cos\ t$$

$$\mathbf{30.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{49}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{\frac{\cancel{7}}{2}\ sec\,t\ \cancel{tan\,t}}{\cancel{7\ tan\,t}}\ dt = \frac{1}{2}\int\ sec\,t\ \ dt$$

$$= \frac{1}{2}\ ln|sec\,t + tan\,t| + C;$$

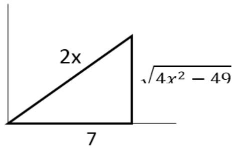
Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante y Tangente:

$$\boldsymbol{sec\ t} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\mathbf{7}};\ \boldsymbol{tan\ t} = \frac{\sqrt{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{49}}}{\mathbf{7}}$$

$$= \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2-49}}{7}\right| + C = \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{2x\sqrt{4x^2-49}}{7}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ ln\left|2x\sqrt{4x^2-49}\right| - ln|7| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{ln}\left|\mathbf{2}\boldsymbol{x}\sqrt{\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{49}}\right|+\boldsymbol{k}$$



Sustitución

$x = \frac{7}{2}\ Sec\ \ t$

$dx = \frac{7}{2}\ \sec t \tan t\ \ dt$

Simplificación

$$\sqrt{4\left(x^2-\frac{49}{4}\right)}; 2\sqrt{x^2-\frac{49}{4}};\ 2\left(\frac{7}{2}\tan t\right); x = 7tan\ t$$

$$\mathbf{31.}- \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}\sqrt{\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}}$$

Solución.-

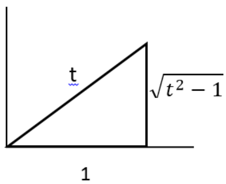
Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{sec\ x\ tan\ x}}{\cancel{sec^2\ x\ tan\ x}}dx = \int \frac{1}{sec\ x}dx = \int cos\ x\ dx = sen\ x + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$\boldsymbol{sen\ x} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}}{\boldsymbol{t}}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\sqrt{\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}}{\boldsymbol{t}}+\boldsymbol{C}$$



Sustitución

$t = \sec x$

$dt = \sec x \tan x\ \ dx$

Simplificación

$t = tan\ x$

$$\mathbf{32.- \mathit{Resolver}}: \int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

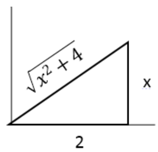
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \int \frac{\cancel{2\,sec^2\,t}}{\cancel{8\,sec^3 t}} dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{sec\,t} dt = \frac{1}{4}\int cos\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{4} sen\,t + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$\boldsymbol{sen\,t} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+4}}}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4\sqrt{x^2+4}}} + \boldsymbol{C}$$



Sustitución

$x = 2\ tan\ t$

$dx = 2\sec^2 t\ \ dt$

Simplificación

$x = (2\ sec\ t)^3 = 8\ sec^3\ t$

$$\mathbf{33.-\mathit{Resolver}}: \int \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\mathbf{25}\boldsymbol{x^2}-\mathbf{9}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{5}\left(\frac{3}{\cancel{5}}\ sec\ t\,\cancel{tan\,t}\right)}{\cancel{3\ tan\ t}}\ dt = \int\ sec\,t\ \ dt = \ ln|sec\ t + tan\ t| + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante y Tangente:

$$\boldsymbol{sec\ t} = \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}};\ \boldsymbol{tan\ \ t} = \frac{\sqrt{\mathbf{25}\boldsymbol{x^2}-\mathbf{9}}}{\mathbf{3}}$$

$$= \ ln\left|\frac{5x}{3} + \frac{\sqrt{25x^2-9}}{3}\right| + C = ln\left|\frac{5x+\sqrt{25x^2-9}}{3}\right| + C =$$

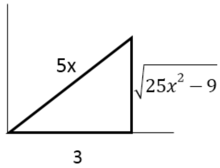
$$= ln\left|5x + \sqrt{25x^2-9}\right| - ln|3| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: ln\left|5x+\sqrt{25x^2-9}\right|+k}$$

$\boldsymbol{Sustitució}$n

$x = \frac{3}{5}\ sec\ t$

$dx = \frac{3}{5}\ \sec t \tan t\ \ dt$



$\boldsymbol{Simplificació}$n

$\sqrt{25x^2-9};\ \sqrt{25\left(x^2-\frac{9}{25}\right)};\ 5\left(\frac{3}{5}\tan t\right);\ x = 3tan\ t$

$$\boldsymbol{34. - Resolver: \int \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^3}dt}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{tan\,x\,sec\,x}\,tan\,x}{\cancel{sec^3x}}dx = \int \frac{tan^2x}{sec^2x}dx = \int \frac{\cancel{sec^2x}}{\cancel{sec^2x}}dx - \int \frac{dx}{sec^2x}$$

$$= \int dx - \int cos^2x\,dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica del ángulo medio

$$= x - \int \frac{1+cos\,2x}{2}dt = x - \frac{1}{2}\left(\int dx + \int cos\,2x\,dt\right)$$

$$= x - \frac{1}{2}\left(x + \int cos\,u\,du\right) = x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}sen\,u\right) + C$$

$$= x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen\,2x + C = x - \frac{1}{2}x - \cancel{\frac{1}{4}}\cancel{2}sen\,x\,cos\,x + C$$

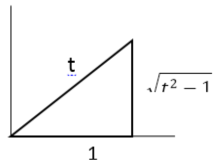
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}sen\,x\,cos\,x + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante, Seno, Coseno y t:

$$\boldsymbol{sec\,x = t;\ x = \sec^{-1}t;\ sen\,x = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t};\ cos\,x = \frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1}{2}\,sec^{-1}(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{sec^{-1}(t)} - \frac{\sqrt{\boldsymbol{t^2 - 1}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{t^2}} + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$t = sec\ x$

$dt = \sec x \tan x\ dx$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$t = tan\ x$

$\mathbf{35.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

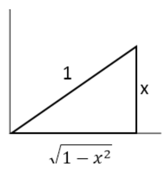
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{sen\ t}{\cancel{cos\ t}}.\cancel{cos\ t}dt = \int sen\ t\ dt = -\cos t + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno:

$\boldsymbol{cos\ t} = \sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}$

$\boldsymbol{Respuesta}: -\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}} + \boldsymbol{C}$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = \ sen\ t$

$dx = \ cos\ t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = \cos t$

$\mathbf{36.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{z}-\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{z^2}}}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

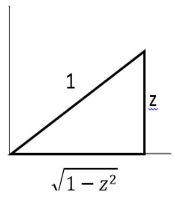
$$= \int \frac{2\ sen\ t - 3}{\cancel{cos\ t}}.\cancel{cos\ t}dt = \int 2sen\ t - 3\ dt = 2\int sen\ t\ t - 3\int dt$$

$$= -2cos\ t - 3t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno y t:

$\boldsymbol{sen\ t = z;\ t = sen^{-1}z;\ cos\ t = \sqrt{1 - z^2}}$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-2\sqrt{1 - z^2} - 3\,sen^{-1}\,z + C}$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$z = \ sen\,t$

$dz = \ cos\,t\,dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = cos\,t$

$\boldsymbol{37. - Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{\pi x - 1}}{\boldsymbol{\sqrt{x^2 + \pi^2}}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\pi\ (\pi tan\ t) - 1}{\cancel{\pi\ sec\ t}}\ \cancel{\pi\ sec^2\ t}\ dt$$

$$= \int (\pi^2\ \ tan\,t - 1)\ \ sec\,t\,dt = \int \pi^2\,sec\,t\,tan\,t\,dt - \int sec\,t\,dt$$

$$= \pi^2\,sec\,t - ln|sec\,t + tan\,t| + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante y Tangente:

$\boldsymbol{tan\ t = \frac{x}{\pi};\ sec\ t = \frac{\sqrt{x^2+\pi^2}}{\pi}}$

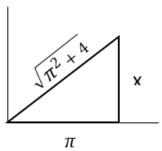
$$= \pi^2\left(\frac{\sqrt{x^2 + \pi^2}}{\pi}\right) - In\left|\frac{\sqrt{x^2 + \pi^2}}{\pi} + \frac{x}{\pi}\right| + C$$

$$= \pi\sqrt{x^2 + \pi^2} - In\left|\frac{\sqrt{x^2 + \pi^2} + x}{\pi}\right| + C$$

$$= \pi\sqrt{x^2 + \pi^2} - In\left|x + \sqrt{x^2 + \pi^2}\right| - ln|\pi| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\pi\sqrt{x^2 + \pi^2} - In\left|x + \sqrt{x^2 + \pi^2}\right| + k}$

$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$



$x = \pi\ tan\ t$

$dx = \pi\sec^2 t\ \ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = \pi\ sec\ t$

$$38.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{2x-1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+4x+5}}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:

$\boldsymbol{x^2+4x+5; x^2+4x+4+1;\ (x+2)(x+2)+1;\ (x+2)^2+1;}$

$\boldsymbol{u=x+2;\ du=dx}$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$=\int \frac{2(u-2)-1}{\sqrt{u^2-1}}\,du=\int \frac{2u-5}{\sqrt{u^2+1}}\,du=\int \frac{2\tan t-5}{\cancel{\sec t}}\,\cancel{\sec^2 t}\,dt$$

$$=\int (2\ \tan t-5)\ \sec\quad dt=2\int \sec t\tan t\,dt-5\int \sec t\,dt$$

$$=2\sec t-5ln|\sec t+\tan t|+C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$\boldsymbol{\tan t=x+2;\ \sec t=\sqrt{x^2+4x+5}}$

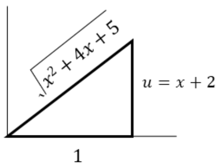
$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x^2+4x+5}}-\mathbf{5}\boldsymbol{In}\left|\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x^2+4x+5}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\right|+\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{Sustituci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$u=\ \tan t;\ du=\sec^2 t\ \ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$u=\sec t$



$$39.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+2x+5}}}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:

$\boldsymbol{x^2+2x+5;\ x^2+2x+1+4;\ (x+1)(x+1)+4;\ (x+1)^2+4}$

$\boldsymbol{u=x+1;\ du=dx}$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$=\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}=\int \frac{2\cancel{\sec^2 t}}{\cancel{2\ \sec t}}\,dt=\int \sec t\,dt=ln|\sec t+\tan t|+C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$\boldsymbol{tan\ t = \frac{u}{2} = \frac{x+1}{2};\ sec\ t = \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2}}$$

$$= ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2} + \frac{x+1}{2}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right| + C$$

$$= ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}\right| - ln|2| + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta: ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}\right| + k}$$

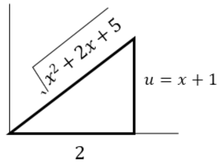
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = 2tan\ t$

$du = 2\sec^2 t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = 2\,sec\ t$



$$\boldsymbol{40.-Resolver: \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:

$\boldsymbol{x^2+4x+5;\ x^2+4x+4+1;\ (x+2)(x+2)+1;\ (x+2)^2+1}$

$\boldsymbol{u = x+2;\ du = dx}$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{\cancel{sec^2 t}}{\cancel{sec\,t}}\,dt = \int sec\,t\,dt = ln|sec\,t + tan\,t| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$\boldsymbol{tan\ t = x+2;\ sec\ t = \sqrt{x^2+4+5}}$

$$\boldsymbol{Respuesta: ln\left|\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2\right| + C}$$

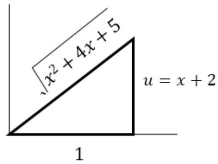
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = tan\,t$

$du = \sec^2 t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = sec\,t$



41.− *Resolver*: $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$

Solución.-

Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:

$x^2+2x+5;\ x^2+2x+1+4;\ (x+1)(x+1)+4;\ (x+1)^2+4$

$u=x+1;\ du=dx$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$=\int\frac{3(u-1)}{\sqrt{u^2+4}}du=\int\frac{3u-3}{\sqrt{u^2+4}}du=\int\frac{3(2\tan t)-3}{\cancel{2\sec t}}2\cancel{\sec^2 t}\,dt$$

$$=\int(6\tan t-3)\sec t\,dt=6\int\sec t\tan t\,dt-3\int\sec t\,dt$$

$$=6\sec t-3\ln|\sec t+\tan t|+C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$\tan t=\frac{u}{2}=\frac{x+1}{2};\ \sec t=\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2}$$

$$=6\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2}\right)-3\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2}+\frac{x+1}{2}\right|+C$$

$$=3\sqrt{x^2+2x+5}-3\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+x+1}{2}\right|+C$$

Se aplica propiedad de los lograitmos naturales:

$$=3\sqrt{x^2+2x+5}-3\ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}\right|-\ln|2|+C$$

***Respuesta*: $3\sqrt{x^2+2x+5}-3\ln\left|\sqrt{x^2+2x+5}\right|+k$**

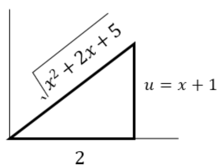
Sustitución

$u=2\tan t$

$du=2\sec^2 t\ dt$

Simplificación

$u=2\sec t$



$$\mathbf{42.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\sqrt{\mathbf{2}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cancel{sec^2 t}}{\sqrt{2}\cancel{sec\,t}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{3}} sec\,t\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int sec\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ ln|sec\,t + tan\,t| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$\boldsymbol{tan\ t} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{y}}{\sqrt{\mathbf{2}}};\ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{sen}^{-\mathbf{1}}\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{3}};\ \ \boldsymbol{sec\ t} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ In\left|\frac{\sqrt{2+3y^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ In\left|\frac{\sqrt{2+3y^2}+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}\right| + C$$

Se aplica propiedad de los lograitmos naturales:

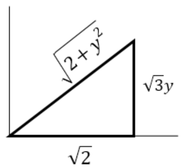
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ ln\left|\sqrt{2+3y^2}+\sqrt{3}y\right| - ln\left|\sqrt{2}\right| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\ \boldsymbol{ln}\left|\sqrt{\mathbf{2}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}+\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{y}\right| + \boldsymbol{k}$$

Sustitución

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ tan\ t$$

$$dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ sec^2\ t\ dt$$



Simplificación

$$\sqrt{3\left(\frac{2}{3}+y^2\right)};\ \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sec t\right);\ y = \sqrt{2}sec\ t$$

$$\mathbf{43.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^4}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{a\ sec\ t}{a^4\ tan^4\ t} a\ sec^2\ t\, dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{sec^3\ t}{tan^4\ t}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int sec^3 t\, cot^4 t\, dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cancel{cos^3 t}} . \frac{\cancel{cos^4 t}}{sen^4 t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{cos\, t}{sen^4 t} dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{cos\, t}{sen\ t} . \frac{1}{sen^3 t} dt = \frac{1}{a^2}\int cot\, t\, csc^3 t\, dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int csc^2 t\, csc\, t\, cot\, t\, dt;$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{csc}\, \boldsymbol{t}$; $\quad \boldsymbol{du} = -\mathbf{csc}\, \boldsymbol{t}\, \mathbf{cot}\, \boldsymbol{t}\, \boldsymbol{dt}$

$$= \frac{1}{a^2} . (-1) \int u^2 du = -\frac{1}{a^2} . \frac{u^3}{3} + C = -\frac{u^3}{3a^2} + C$$

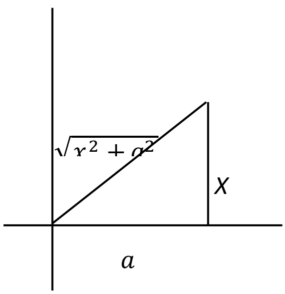
$$= -\frac{1}{3a^2} csc^3 t + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante:

$$-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)^3 + C$$

$$= -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^2\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)}{x^3}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{x^2+a^2}}{\boldsymbol{3a^2x^3}}\sqrt{\boldsymbol{x^2+a^2}} + \boldsymbol{C}$$



Sustitución

$x = a\, tan\, t$

$dx = \mathrm{a}\sec^2 t\ \ dt$

Simplificación

$x = a\, sec\ t$

$$\mathbf{44.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\sqrt{\boldsymbol{y}^2 - \mathbf{49}}}{\boldsymbol{y}}\, \boldsymbol{dy}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{7\,tan\,t}{\cancel{7\,sec\,t}}(7\,\cancel{sec}\ t\ tan\,t\ dt) = 7\int\ tan^2 t\ dt =$$

Se aplica la identidad trigonométrica $sec^2 t - 1 = tan^2 t$

$$= 7\int(sec^2 t - 1)\,dt = 7\left[\int sec^2 dt - \int dt\right] = 7[tan\,t - t] + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y t:

$$\boldsymbol{t = sec^{-1} t\left(\frac{y}{7}\right);\ tant\ =\ \frac{\sqrt{y^2-49}}{7}}$$

$$= 7\,tan\,t - 7t + C = \frac{7\sqrt{y^2 - 49}}{7} - 7sec^{-1}\left(\frac{y}{7}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \sqrt{\boldsymbol{y}^2 - \mathbf{49}} - \mathbf{7}\boldsymbol{sec}^{-\mathbf{1}}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{7}}\right) + \boldsymbol{C}$$

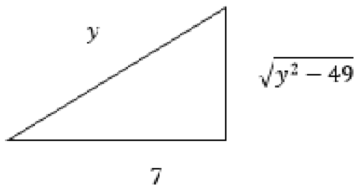
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$y = 7\,sec\,t$

$dy = 7\ sec\,t\ tan\,t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$\sqrt{y^2 - 49} = 7\ tan\,t$



$$\mathbf{45.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}^2\sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{sec\,t\,tan\,t}}{\cancel{sec^2 t\ tan\,t}}\ dt = \int \frac{1}{sec\,t}\ dt = = \int cos\,t\,dt =\ sen\,t + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

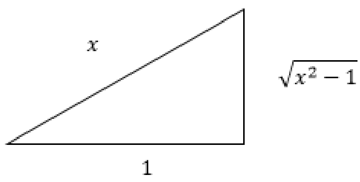
$$\boldsymbol{sen\,t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}}{\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}}{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}$$

Sustitución

$x = sec\, t$

$dx = sect\, tant\, dt$



Simplificación

$\sqrt{x^2-1} = tan\, t$

$$\mathbf{46.- \mathit{Resolver}: \int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\, dy}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{5\, tan\, t}{\cancel{5^3 sec^3 t}} 5\, \cancel{sec}\, t\, tan\, t\; dt = \frac{1}{5}\int \frac{tan^2 t}{sec^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{5}\int tan^2 t\, sec^{-2} t\, dt = \frac{1}{5}\int (sec^2 t - 1)\, sec^{-2} t\, dt$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int dt - \int sec^{-2}\, t\, dt\right) = \frac{1}{5}t - \frac{1}{5}\int \frac{1}{sec^2 t} dt =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2t;\, du = 2dt}$

$$= \frac{1}{5}t - \frac{1}{10}\left(t + \frac{1}{2}\int cosu\, du\right) = \frac{1}{5}t - \frac{1}{10}t - \frac{1}{20} sen\, 2t + C =$$

$$= \frac{1}{10}t - \frac{1}{20}\, 2\, sen\, t\, cos\, t + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$\boldsymbol{t = sec^{-1}\left(\frac{y}{5}\right);\; sen\, t = \frac{\sqrt{y^2-25}}{y};\; cos\, t = \frac{5}{y}}$

$$= \frac{1}{10} sec^{-1}\left(\frac{y}{5}\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{\sqrt{y^2-25}}{y}\right)\left(\frac{5}{y}\right) + C$$

$$\boldsymbol{\mathit{Respuesta}: \frac{1}{10} sec^{-1}\left(\frac{y}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{y^2-25}}{y^2}\right) + C}$$

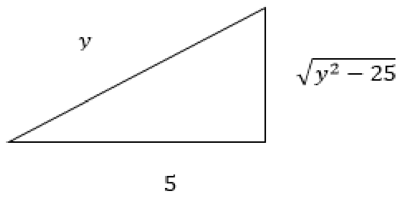
Sustitución

$y = 5\,sec\,t$

$dy = 5sect\,tant\,dt$

Simplificación

$\sqrt{y^2 - 25} = 5tan\,t$



$$\mathbf{47.-\ \textit{Resolver}}: \int \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x^3}\sqrt{\boldsymbol{x^2 - 1}}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2\cancel{sec\,t\,tan\,t}}{\cancel{sec^3\,t\,tan\,t}}dt = 2\int \frac{dt}{sec^2 t} = 2\int cos^2\ t\,dt =$$

Se aplica la identidad trigonométrica del ángulo medio:

$$= 2\int \left(\frac{1 + cos\,2t}{2}\right)dt = \cancel{2} * \frac{1}{\cancel{2}}\int 1 + os\,2t\,dt =$$

$$= \int dt + \frac{1}{2}\int cos\,u\,du = t + \frac{1}{2}sen\ 2t + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$$\boldsymbol{t = sec^{-1}x;\ sen\,t = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x};\ cos\,t = \frac{1}{x}}$$

$$=\ sec^{-1}x + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\frac{1}{x} + C$$

$$\textbf{\textit{Respuesta}}: \boldsymbol{sec^{-1}x + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} + C}$$

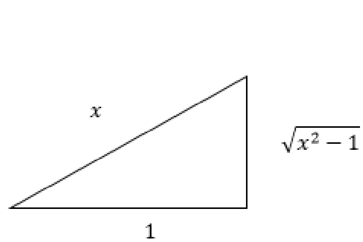
Sustitución

$x = sec\,t$

$dx = sect\,tant\,dt$

Simplificación

$\sqrt{x^2 - 1} = 5tan\,t$



$$\mathbf{48.- Resolver:} \int \frac{\boldsymbol{x^3}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+4}}}\, \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2^3 tan^3 t * \cancel{2sec^2 t}}{\cancel{2\,sec\,t}}\, dt = 8 \int tan^3\, sec\,t\, dt$$

Se aplica la identidad trigonométrica $sec^2 t - 1 = tan^2 t$

$$= 8 \int (sec^2 t - 1)\, sec\, t\, tan\, t\, dt =$$

$$= 8\left(\int sec^2 t\, sec\, t\, tan\, t - \int sec\, t\, tan\, t\, dt\right) = 8\left(\int u^3 du - sec\, t\right)$$

$$= 8\left(\frac{sec^4 t}{4} - sec\, t + C\right) = 2sec^4 t - 8\, sec\, t + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante:

$$\boldsymbol{sec\, t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x^2+4}}}{\boldsymbol{2}}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^4 - 8\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{(x^2+4)^2}}{\boldsymbol{8}} - \boldsymbol{4}\frac{\sqrt{\boldsymbol{x^2+4}}}{} + \boldsymbol{C}$$

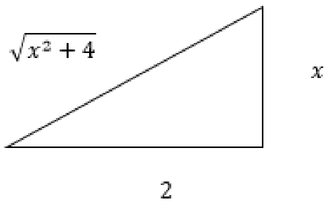
Sustitución

$x = 2tan\ t$

$dx = 2sec^2 t\ dt$

Simplificación

$\sqrt{x^2+1} = sec\ t$



$$\mathbf{49.- Resolver:} \int \boldsymbol{x}\, \sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}\; \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int tan\, t\, sec\, t\, sec\,^2 t\, dt = \int tan\, t\, sec^3 t\, dt$$

$$= \int (1 + tan^2 t)\, sec\, t\, tan\, t\, dt =$$

$$= \int sec\, t\, tan\, t\, dt + \int tan^3 t\, sec\, t\, dt =$$

$$= sec\, t + \int (sec^2 t - 1)\, sec\, t\, tan\, t\, dt =$$

$$= sec\, t + \int sec^2 t\, sec\, t\, tan\, t\, dt - \int sec\, t\, tant\, dt =$$

$$= sec\, t + \int u^2 du - sec\, t = \cancel{sec}\, t + \frac{sec^3 t}{3} - \cancel{sec\, t} + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante:

$$Sec\, t = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{1}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{C}$$

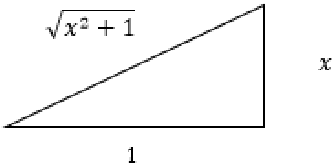
$\boldsymbol{Sustituci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$x = tan\, t$

$dx = sec^2 t\, dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$\sqrt{x^2+1} = sec\, t$



$$\boldsymbol{50. - Resolver}: \int \boldsymbol{x\, \sqrt[3]{x+\pi}\, dx}$$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = (x+\pi)^{\frac{1}{3}};\ u^3 = x + \pi;\ x = u^3 - \pi;\ dx = 3u^2\, du}$

$$= \int (u^3 - \pi)\, u\, 3u^2\, du = 3\int (u^3 - \pi)\, u^3\, du =$$

$$= 3\left(\int u^6 du - \pi \int u^3 du\right) = 3\left[\frac{u^7}{7} - \frac{\pi u^4}{4}\right] + C$$

$$= \frac{3}{7}\left[(x+\pi)^{\frac{1}{3}}\right]^7 - \frac{3\pi}{4}\left[(x+\pi)^{\frac{1}{3}}\right]^4 + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+\pi)^7} - \frac{3\pi}{4}\sqrt[3]{(x+\pi)^4} + C$$

$$\mathbf{51.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{t}{\sqrt{3t+4}}\,dt$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\frac{4}{3}tan^2 t\ \frac{8}{3}\ \cancel{sec^2 t}\, tan\, t}{\cancel{2\, sec\, t}}\,dt = \int \frac{\frac{4}{3}tan^2 t\ \frac{8}{3}\ sec^2 t\, tan\, t}{2\, sec\, t}\,dt$$

$$= \frac{32}{18}\int tan^3 t\, sec\, t\, dt = \frac{32}{18}\int (sec^2 t - 1)\, sec\, t\, tan\, t\, dt =$$

$$= \frac{16}{9}\left(\int sec^2 t\, sec\, t\, tan\, t\ dt - \int sec\, t\, tan\, t\, dt\right)$$

$$= \frac{16}{9}\left(\int u^2 du - sec\, t\right) = \frac{16}{9}\frac{u^3}{3} - \frac{16}{9} sec\, t + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante:

$$\boldsymbol{sec\, t} = \frac{\sqrt{3t+4}}{2}$$

$$= \frac{16}{27}\ sec^3 t - \frac{16}{9} sec\, t + C = \frac{16}{27}\left(\frac{\sqrt{3t+4}}{2}\right)^3 - \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3t+4}}{2} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{2(3t+4)\sqrt{3t+4}}{27} - \frac{8\sqrt{3t+4}}{9} + C$$

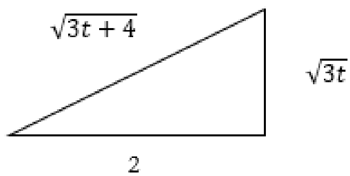
Sustitución

$\sqrt{3t} = 2tan\, t$; $3t = (2tan\, t)^2$

$t = \frac{4\, tan^2 t}{3}$; $dt = \frac{8}{3} tan\, t\, sec^2 t\, dt$

Simplificación

$\sqrt{3t+1} = 2sec\, t$



52.− *Resolver*: $\displaystyle \int \frac{dt}{\sqrt{t+e}}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2\ e \tan t \sec^2 t}{\sqrt{e}\sec t}\ dt = \frac{2e}{\sqrt{e}} \int \tan t \sec t\ dt\ = \frac{2e}{\sqrt{e}} \sec t + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante:

$$\boldsymbol{\sec t = \frac{\sqrt{t+e}}{\sqrt{e}}}$$

$$= \frac{2e}{\sqrt{e}}\left(\frac{\sqrt{t+e}}{\sqrt{e}}\right) + C = \frac{2\ e}{e}\ \sqrt{t+e} + C$$

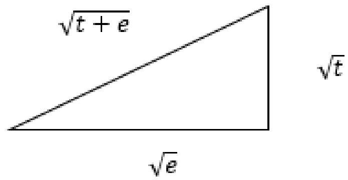
***Respuesta*: $\boldsymbol{2\sqrt{t+e} + C}$**

Sustitución

$\sqrt{t} = \sqrt{e} \tan t$

$t = e(\tan t)^2$

$dt = 2e \tan t \sec^2 t\ dt$



Simplificación

$\sqrt{t+e} = \sqrt{e} \sec t$

53.− *Resolver*: $\displaystyle \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\ dx$

Solución.-

Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{= x^2+4x+5;\ x^2+4x+4+1;\ (x+2)^2+1 = u^2+1;\ x = u-2;\ u = x+2;\ du = dx}$$

$$= \int \frac{2\ (u-2)+1}{\sqrt{u^2+1}}\ du == \int \frac{2u-3}{\sqrt{u^2+1}}\ du =$$

$$= 2\int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} du - 3\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} =$$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= 2\int \frac{\tan t \cancel{\sec^2 t}}{\cancel{\sec t}}\ dt - 3\int \frac{\cancel{\sec^2 t}}{\cancel{\sec t}}\ dt =$$

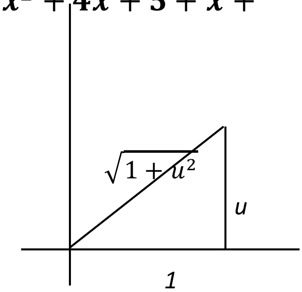
$$= 2\int \tan t \sec t \, dt - 3\int \sec t \, dt =$$

$$= 2 \sec t - 3 \ln|\sec t + \tan t| + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$= 2\sqrt{u^2 + 1} - 3 \ln\left|\sqrt{u^2 + 1} + u\right| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{2}\ \sqrt{\boldsymbol{x^2 + 4x + 5}} - \mathbf{3}\ \boldsymbol{ln}\left|\sqrt{\boldsymbol{x^2 + 4x + 5}} + \boldsymbol{x} + \mathbf{2}\right| + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$**ón**

$u = \tan t$

$du = \sec^2 t \, dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$**ón**

$\sqrt{u^2 + 1} = \sec t$

$$\mathbf{54.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \sqrt{\mathbf{5 - 4}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^2}}\ \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:

$$= \mathbf{5 - 4}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^2};\ \mathbf{9 - 4 - 4}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x^2};\ \mathbf{9} - (\boldsymbol{x} + \mathbf{2})^{\mathbf{2}} =$$

$$\mathbf{9} - \boldsymbol{u^2};\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} - \mathbf{2};\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \mathbf{2};\ \boldsymbol{du} = \boldsymbol{dx}$$

$$= \int \sqrt{9 - u^2}\ du = = \int 3\cos t * 3\cos t \, dt =$$

$$9\int \cos^2 t \, dt = 9\int \frac{1 + 2\cos t}{2}\ dt = \frac{9}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t \, dt\right)$$

$$= \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\int \cos u \quad du\right) = \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\ sen\ 2t\right) + C =$$

$$= \frac{9}{2}\left(t + \frac{2\ sen\ t \cos t}{2}\right) + C$$

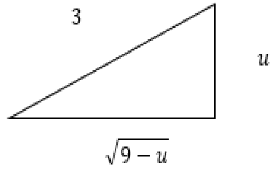
Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$$\boldsymbol{sen\ t} = \frac{\boldsymbol{u}}{\mathbf{3}};\ \boldsymbol{\cos t} = \frac{\sqrt{\mathbf{9} - \boldsymbol{u^2}}}{\mathbf{3}};\quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{sen^{-1}}\frac{\boldsymbol{u}}{\mathbf{3}}$$

$$= \frac{9}{2} sen^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{u}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9 - u^2}}{3}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2} sen^{-1}\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{1}{2} u\sqrt{9 - u^2} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{9}{2} sen^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{5-4x-x^2} + C$$



Sustitución

$u = 3sen\, t$

$du = 3\cos t\ dt$

Simplificación

$\sqrt{9-u^2} = 3\cos t$

$$\mathbf{55.- \ Resolver}: \int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:

$\mathbf{16 + 6x - x^2;\ 25 - 9 + 6x - x^2;\ 25 - (x-3)^2 =}$

$\mathbf{25 - u^2;\ x = u + 3;\ u = x - 3;\ du = dx}$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{25-u^2}} =$$

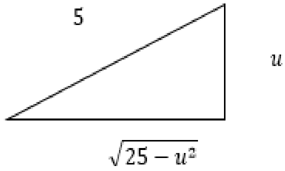
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{5\cos t}}{\cancel{5\cos t}}\, dt = \int dt = t + C\ ;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

$$\boldsymbol{t = sen^{-1}\frac{u}{5};} = sen^{-1}\left(\frac{u}{5}\right) + C\ =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{sen^{-1}\left(\frac{x-3}{5}\right) + C}$$



Sustitución

$u = 5sen\, t$

$du = 5\cos t\ dt$

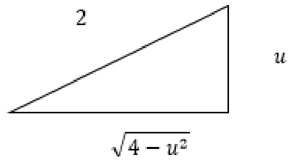
Simplificación

$\sqrt{25-u^2} = 5\cos t$

$$\mathbf{56.-Resolver}: \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

Solución.-
Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:
$\boldsymbol{4x - x^2;\ 4 - 4 + 4x - x^2;\ 4 - \ (x-2)^2 =}$
$\boldsymbol{4 - \ u^2;\ x = u + 2;\ u = x - 2;\ du = dx}$
$$= \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} =$$
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:
$$= \int \frac{\cancel{2\cos t}}{\cancel{2\cos t}}\, dt = \int dt = t + C\,;$$
Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:
$$\boldsymbol{t = sen^{-1}\frac{u}{2}};\quad sen^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \ =$$
$$\boldsymbol{Respuesta}\text{:}\ \boldsymbol{sen^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C}$$

$\boldsymbol{Sustitución}$
$u = 2sen\, t$
$du = 2\cos t\ \ dt$
$\boldsymbol{Simplificación}$
$\sqrt{4-u^2} = 2\cos t$



$$\boldsymbol{57.- Resolver}\text{:}\int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{4x - x^2}}}\ \boldsymbol{dx}$$
Solución.-
Se descompone el polinomio que se encuentra en el denominador de la fracción de la siguiente manera:
$\boldsymbol{4x - x^2;\ 4 - 4 + 4x - x^2;\ 4 - \ (x-2)^2 =}$
$\boldsymbol{4 - \ u^2;\ x = u + 2;\ u = x - 2;\ du = dx}$
$$= \int \frac{u+2}{\sqrt{4-u^2}} du =$$
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:
$$= \int \frac{u}{\sqrt{4-u^2}} du + 2\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} =$$

$$= \int \frac{\cancel{2\,cos}\,t\; 2\,sen\,t}{\cancel{2\,cos\,t}}\,dt + 2\int \frac{2\,cos\,t}{2\,cos\,t}\,dt = -2\,cos\,t + 2\,t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno y t:

$\boldsymbol{t = sen^{-1}\frac{u}{2}; \; cos\,t = \frac{\sqrt{4-u^2}}{2}}$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{4-u^2}}{2}\right) + 2sen^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta:\; -\sqrt{4-(x-2)^2} + 2sen^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C}$$

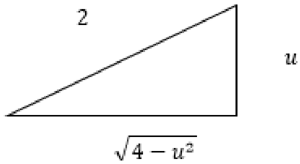
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = 2sen\,t$

$du = 2\,cos\,t\;\,dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$\sqrt{4-u^2} = 2cos\,t$



$$\boldsymbol{58.-Resolver:\; \int \frac{5x}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{5\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) sen\,t}{\cancel{\sqrt{3}\,cos\,t}} * \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\,\cancel{cost}\,dt$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2}\int sen\,t\,dt = -\frac{5\sqrt{3}}{2}cos\,t + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno:

$$\boldsymbol{cos\,t} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{3-2x^2}}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}; = -\frac{5\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3-2x^2}}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta:\; -\frac{5}{2}\sqrt{3-2x^2} + C}$$

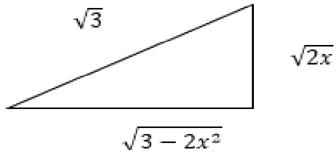
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$\sqrt{2x^2} = \sqrt{3}\,sen\,t\,;\, x\sqrt{2} = \sqrt{3}\,sen\,t\,;\; x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,sen\,t$

$dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} cos\;t\;dt$

Simplificación

$\sqrt{3-2x^2} = \sqrt{3}\,cos\,t$



$$59.-\boldsymbol{Resolver}\!: \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2\cos t\, 2\cos t}{2\, sen\, t}\, dt = 2\int \frac{cos^2 t}{sen\ t}\, dt =$$

$$2\int cos^2 t\, sen^{-1} t\, dt = 2\int (1 - sen^2\, t)\, sen^{-1}\, t\, dt =$$

$$= 2\left(\int \frac{1}{sen\ t} dt - \int sen\ t\ dt\right) = 2\left(\int csc\ t\ dt + cost\right) dt$$

$$= 2(ln|csc t - cot\,t| + cos\,t) + C;$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno, Cotangente y Cosecante:

$$\boldsymbol{cos\,t} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2};\ \boldsymbol{cot\ t} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x};\ \boldsymbol{csc\ t} = \frac{2}{x}$$

$$= 2\,ln\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\!: 2\,ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C$$

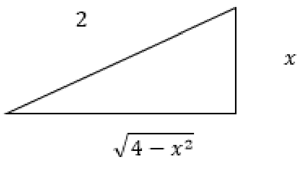
Sustitución

$x = 2sen\ t$

$dx = 2\,cos\ t\ dt$

Simplificación

$\sqrt{4-x^2} = 2cos\,t$



$$\mathbf{60.-\ Resolver}: \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\,dx$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{3\tan t * 3\sec t \tan t}{9\sec^2 t}\,dt = \int \tan^2 t \sec^{-1} t\,dt =$$

$$= \int (\sec^2 t - 1)\sec^{-1} t\,dt = \int \sec t\,dt - \int \sec^{-1} t\,dt =$$

$$= ln|\sec t + \tan t| - \int \frac{1}{\sec t} =$$

$$= ln|\sec t + \tan t| - \int \cos t\,dt = ln|\sec t + \tan t| - sen\,t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Tangente y Secante:

$$\sec t = \frac{x}{3};\ sen\,t = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x};\ \frac{\sqrt{x^2-9}}{3} = \tan t$$

$$\mathbf{Respuesta}: ln\left|\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C$$

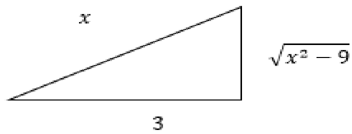
Sustitución

$x = 3\sec t$

$dx = 3\sec t \tan t\ dt$

Simplificación

$\sqrt{x^2-9} = 3\tan t$



$$\mathbf{61.-Resolver}: \int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

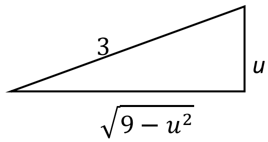
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-(x+2)^2)^3}} =$$

$$\int \frac{\cancel{3\cos t}}{\cancel{27\cos^3 t}}\,dt = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{9}\int \sec^2 t\ dt = \frac{1}{9}\tan(t) + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{u}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\ \frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}{\sqrt{(\mathbf{5}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{3}}}}+\boldsymbol{C}$$



Sustitución

$u = x+2; du = dx; u = 3\ sen\ t$

$du = 3\cos t$

Simplificación

$$\left(\mathbf{9}-(\mathbf{3}\ \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{t})^{\mathbf{2}}\right)^{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}};\ \left(\mathbf{9}\boldsymbol{cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}\right)^{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}};\ \sqrt{\mathbf{9}^{\mathbf{3}}}\ \boldsymbol{cos}^{\mathbf{3}\,\boldsymbol{t}};\ \mathbf{27}\ \boldsymbol{cos}^{\mathbf{3}\,\boldsymbol{t}}$$

$$\mathbf{62.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{9}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

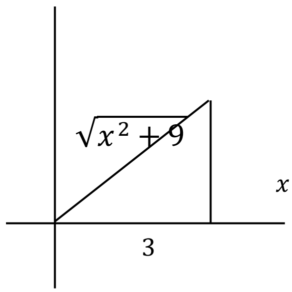
$$\int \frac{\cancel{3sec^2 t}}{(3\tan t)^2\ \cancel{3\ sec\ t}}\ dt = \int \frac{sec\ t}{9\ tan^2\ t}\ dt$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{sec\ t}{tan^{\ 2}\ t}\ dt = \frac{1}{9}\int sec\ t\ ctg^2\ t\ dt = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\cancel{cos\ t}}\frac{\cancel{cos^2\ t}}{sen^2 t}\ dt =$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{cos\ t}{sen\ t} * \frac{1}{sen\ t}\ dt = \frac{1}{9}\int ctg\ (t)\ csc(t)dt = -\frac{1}{9}csc\ t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante:

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{9}}}{\boldsymbol{x}}\right)+\boldsymbol{C}$$



Sustitución

$x = 3\ tan\ t$

$dx = 3\ sec^2\ t\ dt$

Simplificación

$x = 3\sec t$

63.– *Resolver*: $\displaystyle \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{(2\ sen\ t)^2}{\cancel{2\cos t}}\ \cancel{2\cos t} = \int 4\ sen^2\ t\ dt = 4\int sen^2 t\ dt =$$

$$= 4\left(\int \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt\right) = 4\left(\frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 2t\ dt\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\ t - \frac{1}{4}\int \cos u\ du\right) = 4\left(\frac{1}{\cancel{2}}\ t - \frac{1}{4}\ sen\ u\right) + C =$$

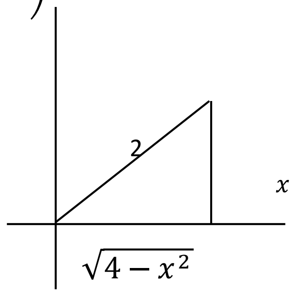
$$= 2t - sen\ (2t) + C = 2t - 2sen\ t\cos t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$$\boldsymbol{t = sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right);\ \cos(t) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2};\ sen\ t = \frac{x}{2}}$$

$$= 2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + C$$

***Respuesta*:** $\boldsymbol{2sen^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - x\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + C}$



Sustitución

$x = 2\ sen\ t$

$dx = 2\ cost\ d$

Simplificación

$x = 2\ cost$

64.– *Resolver*: $\displaystyle \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

Solución.-

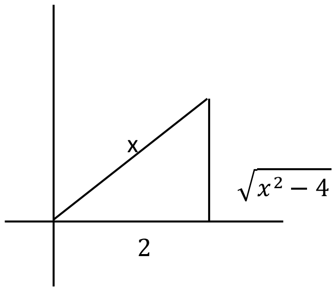
Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{2\sec(t)\tan(t)}}{\cancel{2\sec(t)}2\ \cancel{\tan(t)}}\ dt = \frac{1}{2}\int dt =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

$= \frac{1}{2}\ t + C;\ \boldsymbol{t = sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{2} sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C}$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 2\ sec\ t$

$dx = 2 sec\ t\ tan\ t\ \ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 2\ tan\ t$

65. $\boldsymbol{- Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x\sqrt{1-x^2}}}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

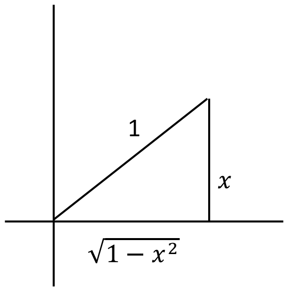
$$\int \frac{cos\,t}{sen\ t\ cos\,t}\ dt = \int \frac{dt}{sen\ t} = \int csc\,t\ dt == \ ln|csc\,t - cot\ t| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente y Cosecante:

$\boldsymbol{cot(t)} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{1-x^2}}}{\boldsymbol{x}}$; $\boldsymbol{csc(t)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$

$$= ln\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C = \ ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln\left|1 - \sqrt{1-x^2}\right| - ln|x| + C}$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = sen\ t$

$dx = cost\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = \ cost$

$$\mathbf{66.- \mathit{Resolver}}: \int \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\, dx$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{cos^3 t \cos t}{sen^6 t}\, dt = \int \frac{cos^4 t}{sen^6 t}\, dt$$

$$= \int \frac{cos^4 t}{sen^4 t} * \frac{1}{sen^2 t}\, dt = \int cot^4 t\, csc^2 t\, dt =$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable:

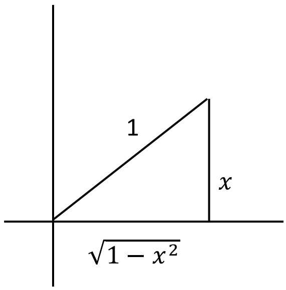
$\boldsymbol{u = cot\,(t);\; du = -csc^2\, t\, dt; cot\, t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}}$

$$= -\int u^4\, du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{cot^5(t)}{5} + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente y Cosecante:

$$= -\frac{\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5}{5} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5x^5} + C$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$x = sen\, t$

$dx = cost\, dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$x = cos\, t$

$$\mathbf{67.- \mathit{Resolver}}: \int \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^4}\, dx$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{cos\, t}{sen^4 t}\, dt = \int \frac{cos t}{sen^4 t} cos\, t\;\, dt$$

$$= \int \frac{cos^2 t}{sen^4 t} dt = \int \frac{cos^2 t}{sen^2 t} * \frac{1}{sen^2 t}\, dt = \int cot^2\, t\, csc^2 t\, dt =$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable:

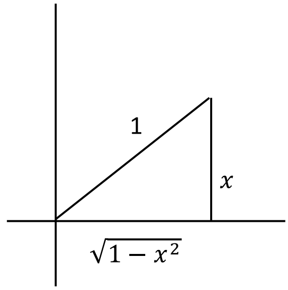
$$\boldsymbol{u = cot\,(t);\ du = -csc^2\, t\, dt}$$

$$= -\int u^2\, du\ =\ -\frac{u^3}{3} + C\ =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente:

$$= -\frac{cot^3(t)}{3} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ -\frac{\left(\frac{\sqrt{\mathbf{1 - x^2}}}{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$x = sen\ t$

$dx = cost\ dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$x = cos\, t$

$$\mathbf{68.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{v^2}}{(\mathbf{1} - \boldsymbol{v^2})^{\frac{5}{2}}}\ \boldsymbol{dv}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{sen^2\ t\ cost}{cos^5 t}\ dt = \int \frac{sen^2\ t}{cos^4 t}\ dt\ = \int \frac{sen^2\ t}{cos^2 t} * \frac{1}{cos^2 t}\ dt$$

$$= \int tan^2 t\ \ sec^2\ t =$$

Se utiliza el siguiente cambio de variable

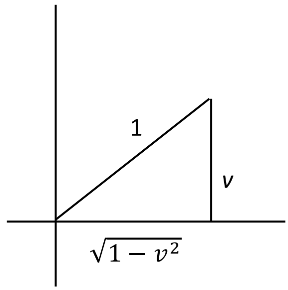
$$\boldsymbol{u = tan\ t;\ du = sec^2\ t;\ tan\ t = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}}$$

$$= \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C == \frac{tan^3\ t}{3} + C\ =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$= \frac{\left(\frac{v}{(1-v^2)^{1/2}}\right)^3}{3} + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{v^3}{3(1-v^2)^{3/2}} + C}$



Sustitución

$v = sen\, t$

$dv = cos\, t\, dt$

Simplificación

$v = cos\, t$

69.− *Resolver*: $\boldsymbol{\int \frac{e^t}{\sqrt{9+e^{2t}}}\, dt}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2+9}} \quad = \quad \int \frac{\cancel{3sec^2 t}}{\cancel{3sec\ t}}\, dt =$$

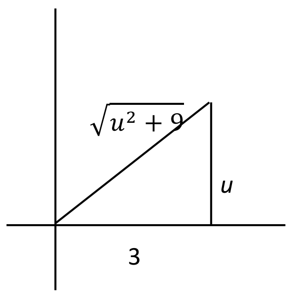
$\boldsymbol{u = e^t; du = \ e^t\ dt}$

$$= \int sect\, dt \quad = \ln|\sec t + \tan t| + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+9}}{3} + \frac{u}{3}\right| + C = \ \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+9}+u}{3}\right| + C =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\ln\left|\frac{\sqrt{e^{2t}+9}+e^t}{3}\right| + C}$



Sustitución

$u = 3\, tan\, t$

$du = 3\, sec^2\, t\, dt$

Simplificación

$u = 3\, sec\, t$

$$\mathbf{70.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{e^t}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{e^{2t}})^{\frac{3}{2}}}\,\boldsymbol{dt}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = e^t ; du = \ e^t\ dt}$

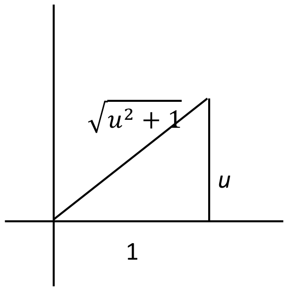
$$= \int \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{sec^2 t}{sec^3 t}\,dt = \int \frac{1}{sec\,t}\,dt = \int cos\,t\,dt = sen\,t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \ \frac{\boldsymbol{e^t}}{\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{e^{2t}}}} + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$ón

$u = \tan t$

$du = sec^2\,t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ón

$u = \sec t$

$$\mathbf{71.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{y}\sqrt{\mathbf{1}+(\boldsymbol{ln\,y})^{\mathbf{2}}}}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = ln\,y ; du = \ \frac{1}{y}}$

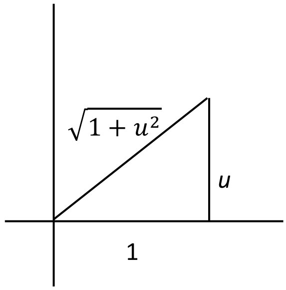
Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\cancel{sec^2}\,t}{\cancel{sec\,t}}\,dt = \int sec\ t\ dt \ = \ ln\left|sec\,t + \ tan\ t\right| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln}\left|\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{ln^2\,y}} + \boldsymbol{ln\,y}\right| + \boldsymbol{C}$$

Sustitución
$u = tan\ t$
$du = sec^2\, t\ dt$
Simplificación
$u = sec\, t$



$$\mathbf{72.-Resolver:} \int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{4^2\ sen^2 t}{\cancel{4\ cos\, t}}.\cancel{4\ cos\, t}\,dt = \int 16\, sen^2 t\, dt =$$

$$= \cancel{16}\int \frac{1 - cos\, 2t}{\cancel{2}}dt = 8\int (1 - cos\, 2t)dt$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2t; du = 2dt;\ \ dt = \frac{du}{2};}$

$$= 8\left(\int dt - \frac{1}{2}\int cos\, u\, dt\right) = 8\left(t - \frac{1}{2} sen\, u\right) + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

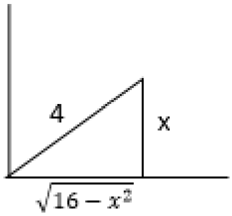
$\boldsymbol{t = sen^{-1}\frac{x}{4};\ sen\, t = \frac{x}{4};\ cos\, t = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}}$

$$= 8\,t - 4\,sen\ 2t + C\ = 8\,sen^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - 8\,sen\ t\ cos\, t + C$$

$$= 8\,sen^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \left(\cancel{8}.\frac{x}{\cancel{4}}.\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 8\ sen^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x\sqrt{16-x^2}}{2} + C}$$

$\boldsymbol{Sustitución}$
$x = 4\ sen\ t$
$dx = 4\ cos\ t\ dt$
$\boldsymbol{Simplificación}$
$x = 4\ cos\ t$



$$\boldsymbol{73.- Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2\sqrt{4-x^2}}}$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{2\ cos\ t}}{2^2 sen^2 t\ (\cancel{2\ cos\ t})} dt$$

$$= \int \frac{1}{4\ sen^2 t} dt = \frac{1}{4} \int csc^2 t dt = \frac{1}{4} \cot\quad t + C;$$

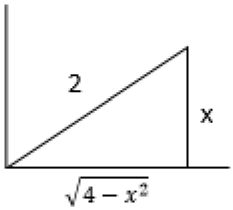
Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente:

$$\boldsymbol{\cot t} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{4-x^2}}}{\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{\sqrt{4-x^2}}}{\boldsymbol{4x}} + \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{Sustitución}$
$x = 2\ sen\ t$
$dx = 2\ cos\ t\ dt$
$\boldsymbol{Simplificación}$
$x = 2\cos t$



$$\boldsymbol{74.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{\sqrt{4-x^2}}}{\boldsymbol{x^2}} \boldsymbol{dx} =$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

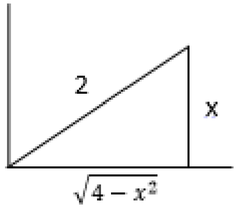
$$= \int \frac{2\ cos\,t}{2^2 sen^2 t}(2\ cos\,t)dt = \int \frac{cos^2 t}{sen^2 t}dt = \int cot^2\ t\,dt =$$

$$= \int (csc^2 t - 1)dt = \int csc^2 t\,dt - \int dt = -cot\,t - t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente y t:

$$\mathbf{cot}\,\boldsymbol{t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{4 - x^2}}}{\boldsymbol{x}}\,;\boldsymbol{t} = \boldsymbol{sen^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ -\frac{\sqrt{\mathbf{4} - \boldsymbol{x^2}}}{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{sen^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right) + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 2\ sen\ t$

$dx = 2\,cos\ t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 2\cos t$

$$\mathbf{75.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x^2} + \mathbf{4}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{2\ sec^2 t}}{2\,tan\ t\ \ \cancel{2sec\ t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{sec\ t}{tan\ t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{tan\,t}sec\,t\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{cos\,t}}{sen\,t}\frac{1}{\cancel{cos\,t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{sen\,t}dt$$

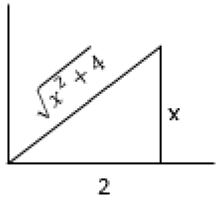
$$= \frac{1}{2}\int csc\,t\,dt = \frac{1}{2}(ln|csc\ t - cot\ \ t|) + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cotangente y Cosecante:

$$\mathbf{csc}\,\boldsymbol{t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{x^2} + \mathbf{4}}}{\boldsymbol{x}}\,;\boldsymbol{cot}\,\boldsymbol{t} = \frac{2}{x}$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} - \frac{2}{x}\right| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{ln}\left|\frac{\sqrt{\boldsymbol{x^2} + \mathbf{4}} - \mathbf{2}}{\boldsymbol{x}}\right| + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$x = 2\ tan\ t$

$dx = 2\, sec^2\ t\, dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$x = 2 \sec t$

$$\boldsymbol{76.-\ Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+6}}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{(\sqrt{6}\, tan\ t)^2}{\sqrt{6}\cancel{sec\ t}} \sqrt{6}\cancel{sec^2\ t}\ dt$$

$$= 6 \int\ tan^2 t\ sec\ t\, dt = 6 \int (\ sec^2 t - 1)\ \ sec\ t\, dt$$

$$= 6 \int (\ sec^3 t - sec\ t)\ dt = 6\left(\int\ sec^3 t\ dt - \int\ sec\ t\ \ dt\right)$$

$$= 6\left[\left(\int\ sec\ t\ sec^2 t\ dt\right) - \int\ sec\ t\ \ dt\right]$$

Se encuentran los valores de u, du, v y dv para aplicar la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = sec\ t;\ \ du = \sec t \tan t\ \ dt;\ \int dv = \int \sec^2 t\ ;\ v = tan\ t}$

$$= 6\left[\left(\int\ sec^3 t\ dt =\ sec\ t\ tan\ t - \int\ tan\ t\ sec\ t\ tan\ t\ \ dt\right) - \int\ sec\ t\ \ dt\right]$$

$$= 6\ \left[\left(\int\ sec^3 t\ dt =\ sec\ t\ tan\ t - \int\ tan^2\ t\ sec\ t\ \ dt\right) - \int\ sec\ t\ \ dt\right]$$

$$= 6\left[\left(\int\ sec^3 t\ dt =\ sec\ t\ tan\ t - \int (sec^2\ t - 1)(sec\ t)\ dt\right) - \int\ sec\ t\ \ dt\right]$$

$$= 6\left[\left(\int\ sec^3 t\ dt =\ sec\ t\ tan\ t - \int\ sec^3\ t\ dt + \int\ sec\ t\ \ dt\right) - \int\ sec\ t\ \ dt\right]$$

$$= 6\left[\left(\int\ sec^3 t\ dt + \int\ sec^3\ t\ dt =\ sec\ t\ tan\ t + \int\ sec\ t\ \ dt\right) - \int\ sec\ t\ \ dt\right]$$

$$= 6\left[\left(2\int\ sec^3 t\ dt =\ sec\ t\ tan\ t + \int\ sec\ t\ \ dt\right) - \int\ sec\ t\ \ dt\right]$$

$$= 6\left(\frac{1}{2} sec\ t\ tan\ t + \frac{1}{2}\int\ sec\ t\ \ dt - \int\ sec\ t\ \ dt\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}sec\,t\,tan\,t - \frac{1}{2}\int sec\,t\ dt\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}sec\,t\,tan\,t - \frac{1}{2}\,ln|sec\,t + tan\,t| + C\right)$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$\boldsymbol{sec\ t = \frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}}\,;\ tan\ t = \frac{x}{\sqrt{6}}}$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}}.\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}}\right| + C\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}.\frac{x\sqrt{x^2+6}}{6} - \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}+x}{\sqrt{6}}\right| + C\right)$$

$$\boldsymbol{Respuesta:\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+6} - 3ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}+x}{\sqrt{6}}\right| + C}$$

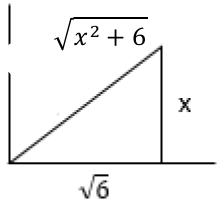
Sustitución

$x = \sqrt{6}\,tan\,t$

$dx = \sqrt{6}\,sec^2\,t\,dt$

Simplificación

$x = \sqrt{6}\sec t$



$$\boldsymbol{77.- Resolver: \int \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{5\,sec\,t}{\cancel{5\,tan\,t}}\ 5\,sec\,t\,\cancel{tan\,t}\ dt$$

$$= \int\ 5\,sec^2\,t\,dt = 5\ tan\,t + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$\cancel{=5}\,\frac{\sqrt{x^2-25}}{\cancel{5}} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: \sqrt{x^2-25} + C}$$

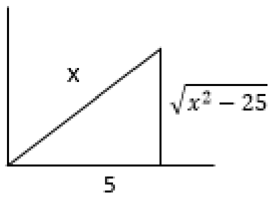
Sustitución

$x = 5\ sec\ t$

$dx = 5 \sec t \tan t \quad dt$

Simplificación

$x = 5 \tan t$



78. $-$***Resolver***: $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{4x + x^2}}}$

Solución.-

Se descompone el polinomio del denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 4 - 4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 - 4}}$$

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{2\ sec\ t\ \cancel{tan\ t}}{\cancel{2\ tan\ t}}\ dt = \int\ 2\ sec\ t\ dt = 2\ ln|sec\ t + tan\ t| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$\boldsymbol{sec\ t} = \frac{\boldsymbol{(x + 2)}}{\boldsymbol{2}}$; $\boldsymbol{\tan t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{(x + 2)^2 - 4}}}{\boldsymbol{2}}$

$$= ln\left|\frac{x + 2}{2} + \frac{\sqrt{(x + 2)^2 - 4}}{2}\right| + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{ln}\left|\frac{\boldsymbol{x + 2 + \sqrt{(x + 2)^2 - 4}}}{\boldsymbol{2}}\right| + \boldsymbol{C}$

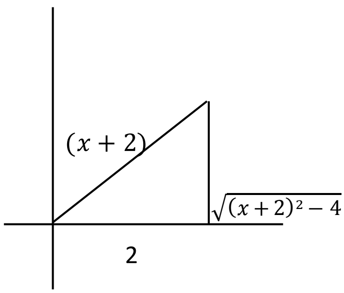
Sustitución

$x + 2 = 2\ sec\ t$

$dx = 2\ \sec t \tan t\ \ dt$

Simplificación

$x = 2\ tan\ t$



$$\mathbf{79.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:} \int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\mathbf{2}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})^{3/2}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$=\int \frac{dx}{(2+x^2)^{1/2\cdot 3}}=\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^3}$$

$$=\int \frac{\sqrt{2}\,sec^2 t}{\left(\sqrt{2}\ sec\,t\right)^3}dt=\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}\cancel{sec^2 t}}{\sqrt{2}\cancel{sec^3 t}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{sec\,t}=\frac{1}{2}\int \frac{1}{sec\,t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int cos\,t\,dt=\frac{1}{2}\ sen\,t+C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$\boldsymbol{sen\ t}=\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{2}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}};\quad \frac{1}{2}.\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}+C=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{:} \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}+\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}+\boldsymbol{C}$$

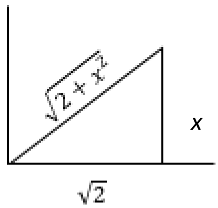
Sustitución

$x=\sqrt{2}\,tan\,t$

$dx=\sqrt{2}\sec^2 t\ \ dt$

Simplificación

$x=\sqrt{2}\,sec\ t$



$$\mathbf{80.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:} \int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{9})^{3/2}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{1/2\cdot 3}}=\int \frac{dx}{\left(\sqrt{4x^2-9}\right)^3}$$

$$=\int \frac{3/2\ \ sec\,t\,tan\,t}{(3\ \ tan\,t)^3}dt=\frac{1}{9}\int \frac{sec\,t\,\cancel{tan\,t}}{\cancel{tan^3 t}}dt=\frac{1}{9}\int \frac{sec\,t}{tan^2 t}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\frac{1}{\cancel{\cos t}}}{\frac{sen^2 t}{\cancel{\cos^2 t}}}dt = \frac{1}{9}\int \frac{\cos t}{sen^2 t}dt = \frac{1}{9}\int \frac{\cos t}{sen\, t}.\frac{1}{sen\, t}dt$$

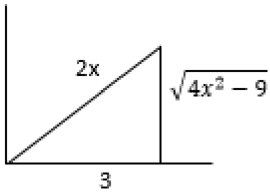
$$= \frac{1}{9}\int \cot t \csc t\, dt = \frac{1}{9}.-\csc t + C = -\frac{1}{9}\csc t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Cosecante:

$$\boldsymbol{\csc t} = \frac{\boldsymbol{2x}}{\sqrt{\boldsymbol{4x^2 - 9}}} = -\frac{1}{9}.\frac{2x}{\sqrt{4x^2 - 9}} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{9\sqrt{4x^2 - 9}}} + \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$



$$2x = 3\ sec\, t;\ x = \frac{3}{2}\sec t\ ;\ dx = \frac{3}{2}\sec t \tan t\ \ dt$$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 3\ tan\ t$

$$\boldsymbol{81.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{w^2\sqrt{w^2 - 7}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

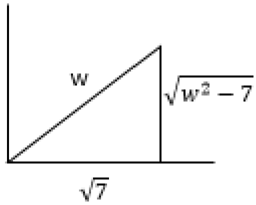
$$= \int \frac{\sqrt{7}\ \cancel{\sec t \tan t}}{\sqrt{7}^2\ \cancel{(\sec t)^2}\left(\sqrt{7}\cancel{\tan t}\right)}dt = \frac{1}{7}\int \frac{dt}{\sec t} = \frac{1}{7}\int \cos t\, dt =$$

$$= \frac{1}{7}sen\, t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$\boldsymbol{sen\, t} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{w^2 - 7}}}{\boldsymbol{w}};\quad \frac{1}{7}.\frac{\sqrt{w^2 - 7}}{w} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\sqrt{\boldsymbol{w^2 - 7}}}{\boldsymbol{7w}} + \boldsymbol{C}$$



Sustitución
$w = \sqrt{7}\, sec\ t$
$dw = \sqrt{7} \sec t \tan t\ \ dt$
Simplificación
$w = \sqrt{7}\, tan\ t$

82.− *Resolver*: $\int \frac{sec^2 x}{(4 - tan^2 x)^{3/2}}$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{sec^2 x}{(4 - tan^2 x)^{1/2 \cdot 3}} dx =$$

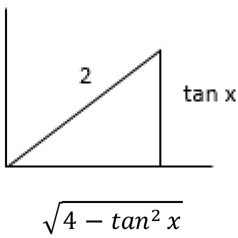
$$= \int \frac{sec^2 x}{\left(\sqrt{4 - tan^2 x}\right)^3} dx = \int \frac{2\, cos\, t}{(2\ \ cos\, t)^3} dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cancel{cos\, t}}{\cancel{cos^3 t}} dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{cos^2 t} dt = \frac{1}{4}\int sec^2 t\, dt = \frac{1}{4} tan\, t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$\boldsymbol{tan\ \ t = \frac{tan\, x}{\sqrt{4 - tan^2\ x}}}$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{4} . \frac{tan\, x}{\sqrt{4 - tan^2 x}} + C}$



Sustitución
$\tan x = 2\, sen\ t$
$\sec^2\ x\, dx = 2 \cos t\ \ dt$
Simplificación
$x = 2\ cos\ t$

$$\mathbf{83.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dz}}{(\boldsymbol{z^2-6z+18})^{3/2}}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio del denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{dz}{(z^2-6z+9+9)^{3/2}} = \int \frac{dz}{\left((z^2-6z+9)+9\right)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{dz}{((z-3)^2+9)^{3/2}} = \int \frac{dz}{((z-3)^2+9)^{1/2\cdot 3}}$$

$$= \int \frac{dz}{\left(\sqrt{(z-3)^2+9}\right)^3}$$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{3\sec^2 t}}{(\cancel{3\sec t})^3}dt = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sec t}dt = \frac{1}{9}\int \cos t\,dt = \frac{1}{9}\operatorname{sen} t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$\boldsymbol{sent} = \frac{z-3}{\sqrt{(z-3)^2+9}};\ \ \frac{1}{9}.\frac{z-3}{\sqrt{(z-3)^2+9}} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{z-3}}{\boldsymbol{9\sqrt{(z-3)^2+9}}} + \boldsymbol{C}$$

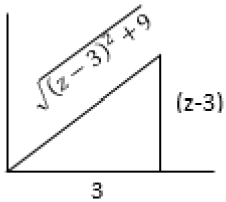
$\boldsymbol{Sustitución}$

$z-3 = 3\tan t$

$dz = 3\sec^2 t\,dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$z-3 = 3\sec t$



$$\mathbf{84.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^4\sqrt{16+x^2}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{4\sec^2 t}}{(4\tan t)^4(\cancel{4\sec t})}dt = \frac{1}{256}\int \frac{\sec t}{\tan^4 t}dt$$

$$= \frac{1}{256}\int sec\,t\frac{1}{tan^4 t}dt = \frac{1}{256}\int sec\,t\,cot^4 t\,dt$$

$$= \frac{1}{256}\int \frac{1}{\cancel{cos\,t}}.\frac{\cancel{cos^4} t}{sen^4 t}dt = \frac{1}{256}\int sen^{-4}t\ cos^3 t\,dt$$

$$= \frac{1}{256}\int sen^{-4}t\ cos^2 t\,cos\,t\,dt$$

$$= \frac{1}{256}\int (1 - sen^2 t)sen^{-4}t\ cos\,t\,dt$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\,t;\ du = \ cos\,t}$

$$= \frac{1}{256}\int (1-u^2)u^{-4}\,du = \frac{1}{256}\int (u^{-4} - u^{-2})\,du$$

$$= \frac{1}{256}\left(\int u^{-4}du - \int u^{-2}\,du\right) = \frac{1}{256}\left(-\frac{u^{-3}}{3} + u^{-1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{256}\left(-\frac{sen^{-3}t}{3} + sen^{-1}t\right) + C = \frac{1}{256}\left(-\frac{1}{3sen^3 t} + \frac{1}{sen\,t}\right) + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$\boldsymbol{sen\,t\ = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}}$;

$$= \frac{1}{256}\left(-\frac{1}{3\left(\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}\right)^3} + \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{256}\left(-\frac{1}{\frac{3x^3}{(16+x^2)\sqrt{16+x^2}}} + \frac{\sqrt{16+x^2}}{x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{256}\left(-\frac{(16+x^2)\sqrt{16+x^2}}{3x^3} + \frac{\sqrt{16+x^2}}{x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{256}\left(-\frac{16+x^2\sqrt{16+x^2} + 3x^2\sqrt{16+x^2}}{3x^3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{768x^3}\left(-(16+x^2)\sqrt{16+x^2} + 3x^2\sqrt{16+x^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{768x^3}\left(\sqrt{16+x^2}(-16 - x^2 + 3x^2)\right) + C$$

$$= \frac{1}{768x^3}\sqrt{16+x^2}(2x^2-16)+C$$

$$= \frac{1}{768x^3}.\,2\sqrt{16+x^2}(x^2-8)+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\sqrt{16+x^2}\left(x^2-8\right)}{384x^5}+C$$

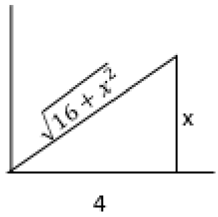
Sustitución

$x\ = 4\,tan\,t$

$dz = 4\,sec^2 t\,dt$

Simplificación

$x\ = 4\,sec\,t$



$$\boldsymbol{85.-Resolver}: \int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$$

Solución.-

$$= \int \frac{dz}{(16+x^2)^{1/2\cdot\,3}} = \int \frac{dz}{(16+x^2)^{\,3}}$$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{4\,\cancel{sec^2\,t}}{(\cancel{4\ sec\,t})^3}dt = \frac{1}{16}\int \frac{1}{sec\,t}dt = \frac{1}{16}\int cos\,t\,dt = \frac{1}{16}sen\,t + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno:

$$\boldsymbol{sen\ t} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}; = \frac{1}{16}.\frac{x}{\sqrt{16+x^2}}+C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{x}{16\sqrt{16+x^2}}+C$$

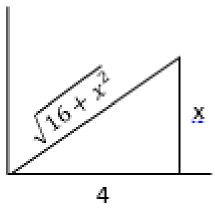
Sustitución

$x\ = 4\,tan\,t$

$dz = 4\,sec^2 t\,dt$

Simplificación

$x\ = 4\,sec\,t$



$$\mathbf{86.- \ \mathit{Resolver}:} \int \frac{\boldsymbol{x^3}}{\sqrt{\mathbf{16} - \boldsymbol{x^2}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{(4\ sen\ t)^3}{\cancel{4\,cos\,t}} . \cancel{4\,cos\,t}\,dt = \int 64\ sen^3 t\ dt$$

$$= 64 \int sen^2 t\, sen\, t\ dt = 64 \int (1 - cos^2 t)\, sen\, t\ dt$$

$$= 64 \int (sen\ t - cos^2 t\ sen\ t)\, dt = 64 \left(\int sen\, t\, dt - \int cos^2 t\ \ sen\ t\ dt \right) =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cos\ t;\ \ du = -\ sen\ t}$

$$= 64 \left(\int sen\, t\, dt + \int u^2 du \right)$$

$$= 64 \left(-cos\, t + \frac{u^3}{3} \right) + C = 64 \left(-cos\, t + \frac{cos^3 t}{3} \right) + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno:

$$\boldsymbol{cos\ t} = \frac{\sqrt{\mathbf{16} - \boldsymbol{x^2}}}{\mathbf{4}};$$

$$= 64 \left(-\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + \frac{\left(\sqrt{16 - x^2}\right)^3}{3.4^3} \right) + C$$

$$= 64 \left(-\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} + \frac{(16 + x^2)\sqrt{16 - x^2}}{3\ .64} \right) + C$$

$$= \left(-16\sqrt{16 - x^2} + \frac{(16 + x^2)\sqrt{16 - x^2}}{3} \right) + C$$

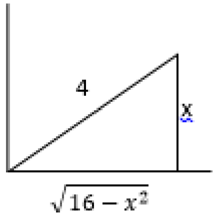
$$= \left(\frac{-48\sqrt{16 - x^2} + (16 + x^2)\sqrt{16 - x^2}}{3} \right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \left(-48\sqrt{16 - x^2} + (16 + x^2)\sqrt{16 - x^2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{16 - x^2}(48 - 16 + x^2) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \sqrt{\mathbf{16} - \boldsymbol{x^2}} \left(\boldsymbol{x^2} + \mathbf{32} \right) + \boldsymbol{C}$$

Sustitución
$x = 4\, sen\, t$
$dz = 4\, cost\, dt$
Simplificación
$x = 4\, sec\, t$



$$\mathbf{87.- \; \mathit{Resolver}:} \int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\mathbf{5} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})^{\frac{3}{2}}}$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

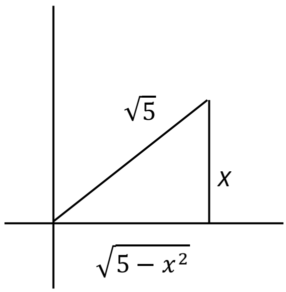
$$= \int \frac{\cancel{\sqrt{5}\, Cos(t)}}{\left(\cancel{\sqrt{5}\, Cos(t)}\right)^3} dt = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^3}} \int Sec^2 t\, dt$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{5}}\, Tan(t) + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{5}}} \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{5} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}} + \boldsymbol{C}$$

Sustitución
$x = \sqrt{5} Sen(t);$
$x = \sqrt{5}\, Cos(t)$
Simplificación
$x = \sqrt{5} Cos(t)$



$$\mathbf{88.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{m^2}}{(\boldsymbol{m^2}+\mathbf{8})^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{dm}$$

Solución.-

$$= \int \frac{m^2\,dm}{\left((m^2+8)^{\frac{1}{2}}\right)^3}$$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{8\,Tan^2(t)}{\left(\cancel{\sqrt{8}Sec(t)}\right)^3}\cancel{\sqrt{8}\,Sec^2(t)}dt = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8^3}}\int \frac{Tan^2(t)}{Sec\,(t)}dt$$

$$= \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8^3}}\int \frac{\frac{Sen^2(t)}{Cos^2(t)}}{\frac{1}{Cos(t)}}dt = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8^3}}\int \frac{Sen^2(t)}{Cos(t)}dt = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8^3}}\int \frac{1-Cos^2(t)}{Cos(t)}dt$$

$$= \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8^3}}\left[\int \frac{1}{Cos\,t}dt - \int Cos(t)\,dt\right] = \ln(\sec t + \tan t) - Sent + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Tangente y Secante:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \ln\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{m^2}+\mathbf{8}}}{\sqrt{\mathbf{8}}}+\frac{\boldsymbol{m}}{\sqrt{\mathbf{8}}}\right) - \frac{\boldsymbol{m}}{\sqrt{\boldsymbol{m^2}+\mathbf{8}}} + \boldsymbol{C}$$

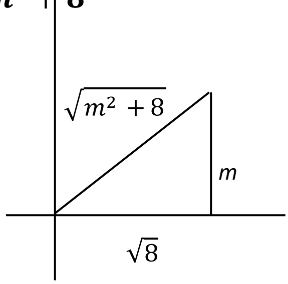
Sustitución

$m = \sqrt{8}\,Tan(t);$

$dm = \sqrt{8}\,Sec^2(t)\,dt$

Simplificación

$x = \sqrt{8}\,Sec(t)$



$$\mathbf{89.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dz}}{\sqrt{(\mathbf{4}-\boldsymbol{z^2})^3}}$$

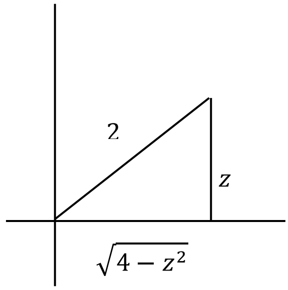
Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$\int \frac{\cancel{2Cos(t)}}{\left(\cancel{2Cos(t)}\right)^3}dt = \frac{2}{8}\int Sec^2(t)dt = \frac{1}{4}Tan(t) + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{4(\sqrt{4-z^2})}} + \boldsymbol{C}$$



$\boldsymbol{Sustitución}$

$z = 2\ Sen(t)$

$dz = 2\ Cos\ t$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$z = 2\ Cos(t)$

$$\boldsymbol{90.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\sqrt{\boldsymbol{(4y-y^2)^3}}}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{8Sen(t)Cos(t)}}{(\cancel{2Sen(t)})(\cancel{4\ Cos^2(t)})^3}dt$$

$$\sqrt{\boldsymbol{4y-y^2}} = \sqrt{\boldsymbol{y(4-y)}} = (\boldsymbol{y^{\frac{1}{2}}\sqrt{4-y}})$$

$$= \frac{8}{2(64)}\int \frac{dt}{Cos^6(t)} = \frac{1}{16}\int Sec^5(t)dt = \frac{1}{16}\int Sec^3(t)\ Sec^2(t)\ dt$$

Se encuentran los valores de u, du, v y dv, para aplicarlos en la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = Sec^3(t); du = 3\ Sec^2(t) Sec\ t\ Tan\ t; dv = Sec^2(t); v = \mathbf{Tan}\ t}$

$$= \frac{1}{16}\left[Sec^3(t)Tan\ t - \int 3\ \tan^2 t\ \ Sec^3(t)\ dt\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[Sec^3(t)Tan\ t - \int 3\ (Sec^{\ 2}\ t - 1\ )\ Sec^3(t)\ dt\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[Sec^3(t)Tan\ t - 3\int Sec^{\ 5}t\ \ dt + 3\int Sec^{\ 3}t\ \ dt\right] =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{4}Sec^3(t)Tan\ t + \frac{3}{8}\ (\mathrm{Sec}\, t\ \mathrm{Tan}\, t + \ln(Sec\ t + Tan\ t))\right] =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$\textit{Respuesta}:\left[\frac{1}{8}\frac{y^{1/2}}{\sqrt{4-y}^4}+\frac{3}{128}\left(\frac{2y^{1/2}}{4-y}+\ln\left(\frac{2+y^{1/2}}{\sqrt{4-y}}\right)\right)\right]+C$$

Sustitución

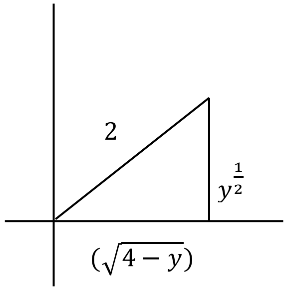
$\sqrt{4-y}=y^{\frac{1}{2}}=\left(2Sen(t)\right)^2$

$y=4\,(Sen(t))^2;\ dy=8Sen(t)Cos(t)$

Simplificación

$(y^{\frac{1}{2}})^2=(2\cos(t))^2$

$y=4\,Cos^2(t)$



$$\mathbf{91.-}\ \textit{Resolver}:\int\frac{y}{1+y^4}dy$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$=\int\frac{Tan(t)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}Tan(t)^{-\frac{1}{2}}\cancel{Sec^2(t)}dt}{\cancel{(Sec(t))^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int dt=\frac{t}{2}=$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función t:

$$\textit{Respuesta}:\frac{Tan^{-1}(y^2)}{2}+C$$

Sustitución

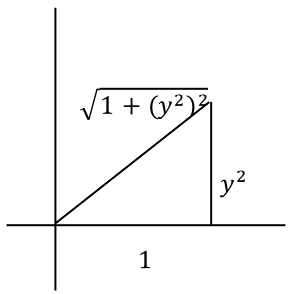
$\sqrt{1+(y^2)^2}=(y^2)^{\frac{1}{2}}$

$y=\left(\mathrm{Tan}\,(t)\right)^{\frac{1}{2}};$

$dy=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Tan}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{Sec}^2(t)dt$

Simplificación

$y^2=1\,\mathrm{Sec}(t)$



$$\mathbf{92.-Resolver}: \int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{z}^{2} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} + \mathbf{5})^{2}}\, \boldsymbol{dz}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio del denominador de la siguiente manera:

$\boldsymbol{z^2 - 2z + 1 + 4}$; $\boldsymbol{(z-1)^2 + 4}$; $\sqrt{(z-1)^2+4}$;

$$= \int \frac{dz}{\left(\sqrt{(z-1)^2 + 2}\right)^4}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2t; du = 2dt}$

$\boldsymbol{z - 1 = v; z = v + 1; dz = dv}$

$$= \int \frac{dv}{\sqrt{v^2+2}^4} =$$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{2Sec^2(t)}}{(\cancel{2Sec(t)})^4}\, dt = \frac{2}{16}\int Cos^2(t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1 + Cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{1}{8}\left[\int \frac{dt}{2} + \int \frac{Cos(2t)}{2}\, dt\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int Cos(u)du\right] == \frac{1}{8}\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}Sen(2t)\right] + C$$

$$= \frac{t}{16} + \frac{Sen(2t)}{32} + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno y t:

$$= \frac{1}{16}Tan^{-1}\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{32}2Sen(t)Cos(t)$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\boldsymbol{Tan}^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{z-1}}{\mathbf{2}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\left(\frac{\boldsymbol{z-1}}{\sqrt{(\boldsymbol{z-1})^2+\mathbf{4}}}\right)\left(\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{(\boldsymbol{z-1})^2+\mathbf{4}}}\right) + \boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{Sustitución}$

$v = 2Tan(t);$

$dv = 2Sec^2(t)dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$v = 2Sec(t)$

$$\mathbf{93.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica el siguiente artificio matemático:

$$= \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2} =$$

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{Sec(t)\cancel{Tan(t)}dt}{(\cancel{Tan(t)})^2} = \int \frac{Sec(t)}{Tan(t)}dt = \int \frac{\frac{1}{\cancel{Cos(t)}}}{\frac{Sen(t)}{\cancel{Cos(t)}}}$$

$$= \int \frac{1}{Sen(t)}dt = \int Csc(t)dt = \ln|Csc(t) - Cot(t)| =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno y t:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \ \mathbf{ln}\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}} - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}}\right| + \boldsymbol{C}$$

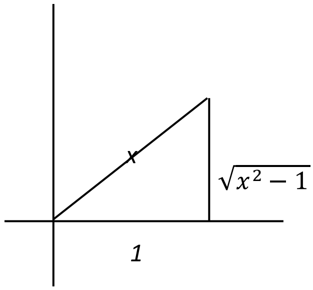
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 1\,Sec(t);$

$dx = Sec(t)Tan(t)dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = 1\,Tan(t)$



$$\mathbf{94.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{13}}}$$

Solución.-

Se descompone el polinomio del denominador de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{9} + \mathbf{4} = \sqrt{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}};$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \mathbf{3}; \boldsymbol{dv} = \boldsymbol{dx}$$

$$= \int \frac{dv}{\sqrt{v^2+4}}$$

Se aplica la sustitución y simplificación del segundo caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{2\,Sec^2(t)}}{\cancel{2\,Sec(t)}} dt = \int Sec(t)dt = \ln|Sec(t) + Tan(t)|$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Tangente y Secante:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \ln\left|\frac{\sqrt{(x-3)^2+4}}{2} + \frac{x-3}{2}\right| + C$$

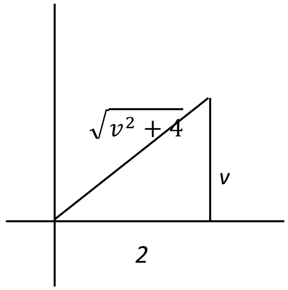
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$v = 2\,tan(t);$

$dv = 2Sec^2(t)dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$v = 2Sec(t)$



$$\mathbf{95.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{x^2}{\sqrt{21+4x-x^2}} dx$$

Solución.-

Se descompone el polinomio del denominador de la siguiente manera:

$\mathbf{21 + 4x - x^2 = 25 - (x-2)^2};$

$$= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-(x-2)^2}}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x - 2; du = dx; x = u + 2}$

$$= \int \frac{(u+2)^2}{\sqrt{25-u^2}} = \int \frac{u^2+4u+4}{\sqrt{25-u^2}} du$$

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{(5Sen(t))^2 + 4(5Sen(t)) + 4}{5Cos(t)} 5Cos(t)dt$$

$$= 25\int Sen^2(t) + 20\int Sen(t)dt + 4\int dt$$

$$= 25\int \frac{(1-Cos(2t)}{2} dt + 20\big(-Cos(t)\big) + 4t$$

$$= \frac{25}{2}t - \frac{25}{2}Sen(t)Cos(t) - 20Cos(t) + 4t$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$$= \frac{25}{2}\operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{u}{5}\right) - \frac{25}{2}\left(\frac{u}{5}\frac{\sqrt{25-u^2}}{5}\right) - 20\frac{\sqrt{25-u^2}}{5} + 4Sen^{-1}\left(\frac{u}{5}\right)$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{33}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Sen}^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right) - \frac{(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})\sqrt{\mathbf{25}-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{2}}}{\mathbf{2}}$$

$$-\mathbf{20}\frac{\sqrt{\mathbf{25}-(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{2}}}{\mathbf{5}} + \boldsymbol{C}$$

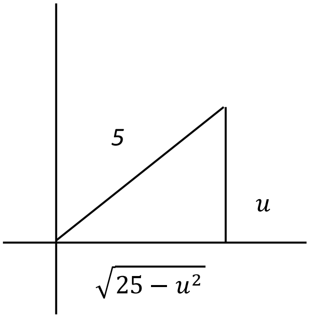
$\boldsymbol{Sustituci}$ón

$u = 5\,Sen(t);$

$du = 5\,Cos(t)$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ón

$u = 5\,Cos(t)$



$$\mathbf{96.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\sqrt{\mathbf{25}-\boldsymbol{x}^{2}}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= 5\int \frac{Cos^2(t)}{Sen(t)}\,dt = 5\int \frac{1 - Sen^2\,(t)}{Sen(t)}dt =$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica:

$\boldsymbol{Sen^2}\,(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{Cos^2}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{1}; \boldsymbol{Cos^2}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{Sen^2}\,(\boldsymbol{t})$

$$= 5\left[\int \frac{1}{Sen(t)}dt - \int \frac{Sen^2(t)}{Sen(t)}\,dt\right] = 5\left[\int Csc(t)dt - \int Sen(t)dt\right]$$

$$= 5\ln|Csc(t) - Cot(t)| + 5\,Cos(t)$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Coseno y Cotangente y Cosecante:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{5}\ln\left|\frac{\mathbf{5}}{\boldsymbol{x}} - \frac{\sqrt{\mathbf{25}-\boldsymbol{x}^{2}}}{\boldsymbol{x}}\right| + \sqrt{\mathbf{25}-\boldsymbol{x}^{2}} + \boldsymbol{C}$$

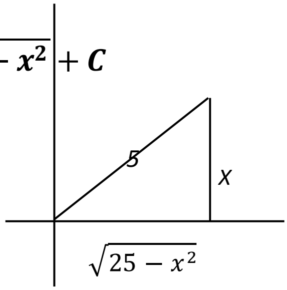
$\boldsymbol{Sustituci}$ón

$x = 5\,Sen(t);$

$dx = 5\,Cos(t)$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ón

$x = 5\,Cos(t)$



$$\mathbf{97.- \; \textit{Resolver}:} \int \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{9r^2 - 1}}} \boldsymbol{dr}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 3r; du = 3dr}$

$$= 3\int \frac{dr}{\sqrt{9r^2 - 1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{Sec\, r\, Tan\, r}{Tan\, r} dr \; = \ln|Sec\, r \; + Tan\, r| + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Secante y Tangente:

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{ln}\left|\boldsymbol{3r} + \sqrt{\boldsymbol{9r^2 - 1}}\right| + \boldsymbol{C}$$

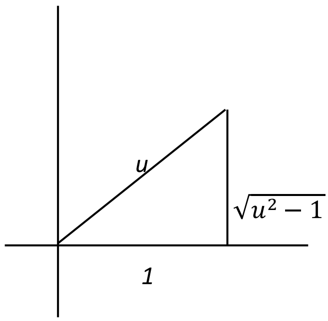
$\boldsymbol{Sustituci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$u = Sec(r);$

$du = Sec\, r\, Tan\, r$

$\boldsymbol{Simplificaci}$**ó**$\boldsymbol{n}$

$u = Tan\, r$



$$\mathbf{98.- \; \textit{Resolver}:} \int \frac{\sqrt{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}}} \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \sqrt{x}\,; u^2 = x; 2udu = dx}$

$$= \int \frac{u\,.2udu}{\sqrt{1 - u^2}} = 2\int \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= 2\int \frac{Sen^2(t)Cos(t)}{Cos(t)} dt = 2\int \frac{1 - Cos(2t)}{2} dt$$

$$= \int dt - \int Cos(2t)dt = t - Sen(t)Cos(t) + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$= Sen^{-1}(u) - u\sqrt{1-u^2} + C = Sen^{-1}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}^2} + C =$

$\boldsymbol{Respuesta}: (\sqrt{\boldsymbol{x}}) - \sqrt{\boldsymbol{x}}\sqrt{\boldsymbol{1-x}} + \boldsymbol{C}$

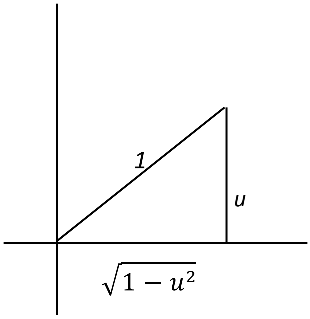
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = Sen\ t$

$du = Cos\ t\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$u = Cos\ t$



$\boldsymbol{99.- Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x^2-2}}}$

Solución.-

Se aplica la sustitución y simplificación del tercer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{\cancel{\sqrt{2}Sec(t)Tan(t)}dt}{\cancel{\sqrt{2}^2 Sec(t)Tan(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int dt = \frac{1}{\sqrt{2}}t + C =$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\boldsymbol{Sec}^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\right) + \boldsymbol{C}$

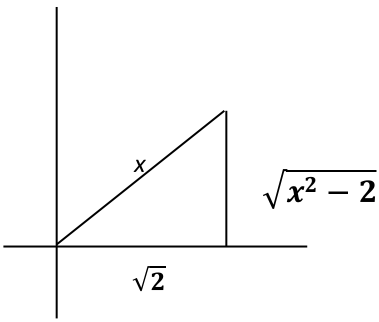
$\boldsymbol{Sustituci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = \sqrt{2}\ Sec(t)$

$dx = \sqrt{2}\,Sec(t)Tan(t)\ dt$

$\boldsymbol{Simplificaci}$ó$\boldsymbol{n}$

$x = \sqrt{2}\ Tan\ (t)$



$$\mathbf{100.-\textit{Resolver}}: \int \frac{\boldsymbol{y^2}}{\sqrt{\mathbf{6}-\boldsymbol{y^2}}}\,\boldsymbol{dy}$$

Solución.-
Se aplica la sustitución y simplificación del primer caso de sustitución trigonométrica:

$$= \int \frac{6Sen^2(t)}{\cancel{\sqrt{6}Cos(t)}} \cancel{\sqrt{6}Cos(t)}dt = 6\int Sen^2(t)dt$$

$$= 6\int \frac{1-Cos(2t)}{2}dt = 6[\int \frac{1}{2}dt - \int \frac{Cos(2t)}{2}dt\,] =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2t; du = 2\,dt}$

$$= 6(\int \frac{1}{2}dt - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\int Cos(u)du$$

$$= 6\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}Sen(2t)\right] = 3t - \frac{3}{2}Sen(2t) + C$$

$$= 3t - \frac{3}{2}\,2\,Sen(t)Cos(t) + C = 3t - 3Sen(t)Cos(t) + C$$

Se utiliza la gráfica para determinar el valor de la función Seno, Coseno y t:

$\boldsymbol{y = \sqrt{6}\,Sen(t); t = Sen^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right)}$

$$= 3Sen^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right) - 3\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{\sqrt{y^2-6}}{\sqrt{6}}\right) + C$$

$$= 3Sen^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right) - 3\left(\frac{y\sqrt{y^2-6}}{6}\right)$$

$\boldsymbol{\textit{Respuesta}: 3Sen^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right) - \frac{y}{2}\sqrt{y^2-6} + C}$

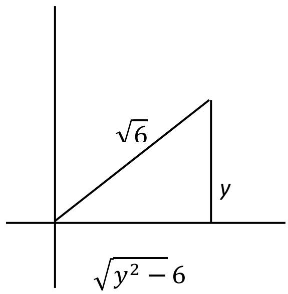
$\boldsymbol{Sustitución}$

$x = \sqrt{6}\,Sen\,t$

$dx = \sqrt{6}\,Cos\,t\,dt$

$\boldsymbol{Simplificación}$

$x = \sqrt{6}\,Cos\,t$



4.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA:

Utilizando la técnica de integración de la sustitución trigonométrica, resuelva las siguientes integrales:

$$1.-\int \frac{d\rho}{\rho^2+4\,\rho+9}$$

$$2.-\int \frac{Sen\ \theta}{\sqrt{Cos^2\theta+4\ Cos\theta+1}}\,d\theta$$

$$3.-\int \frac{4\ \beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}d\beta$$

$$4.-\int \frac{dm}{m\ \sqrt{(1+\ln m)^2}}$$

$$5.-\int \frac{d\omega}{\sqrt{5+4\ \omega-\omega^2}}$$

Respuestas a los ejercicios propuestos

$1{:}\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ Tan^{-1}\left(\frac{\rho+2}{\sqrt{5}}\right)+C$

$$2{:}\ -\ln\left|\frac{(Cos\ \theta+2)+\sqrt{(Cos\ \theta+2)^2-3}}{\sqrt{3}}\right|+C$$

$$3{:}\ \frac{4\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}-\ 4\ Sen^{-1}\beta+C$$

$$4{:}\ \ln\left|\sqrt{1+(\ln m)^2}+\ln m\right|+C$$

$$5{:}\ Sen^{-1}\left(\frac{\omega-2}{3}\right)+C$$

5. INTEGRACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Según (Demidovich, B. et al., 2001) esta técnica se utiliza básicamente cuando encontramos el producto de potencias trigonométricas.

Para el proceso de integración se necesitará de identidades trigonométricas pitagóricas, del ángulo doble, del ángulo medio, etc.

$Sen^2x + Cos^2x = 1$

$1 + Tan^2x = Sec^2x$

$1 + Cot^2x = Csc^2x$

$Sen^2x = \frac{1-Cos\,2x}{2}$

$Cos^2x = \frac{1+Cos\,2x}{2}$

Caso 1

$\int Sen^n\,x\,dx \;\; o \;\; \int Cos^n\,x\,dx$ **cuando n es un numero positivo impar**

$Sen^n\,x = Sen^{n-1}\,x\;\;Sen\,x = \;(Sen^2\,x)^{\frac{(n-1)}{2}}\,Sen\,x = (1 - Cos^2x)^{\frac{(n-1)}{2}}\,Sen\,x$

$Cos^n\,x = Cos^{n-1}\,x\;\;Cos\,x = \;(Cos^2\,x)^{\frac{(n-1)}{2}}\,Cos\,x = (1 - Sen^2x)^{\frac{(n-1)}{2}}\,Cos\,x$

Caso 2

Identidades trigonométricas del ángulo medio

$\int Sen^n\ x\ \ Cos^m\ x\, dx$ **cuando uno de los exponentes es un entero positivo impar**

Si n es impar

$Sen^n\ x\ Cos^m x\ = Sen^{n-1}\ x\ \ Cos^m x\ \ Sen\ x =$
$(Sen^2\ x)^{\frac{(n-1)}{2}}\ Cos^m x\ \ Sen\ x = (1 -$
$Cos^2 x)^{\frac{(n-1)}{2}}\ Cos^m x\ \ Sen\ x$

Si m es impar

$Sen^n\ x\ Cos^m x\ = Sen^n\ x\ \ Cos^{m-1}\ x\ \ Cos\ x =$
$Sen^n\ x\ \ (Cos^2\ x)^{\frac{(m-1)}{2}}\ \ Cos\ x = Sen^n\ x\ \ (1 -$
$Sen^2\ x)^{\frac{(m-1)}{2}}\ \ Cos\ x$

Caso 3

$\int Sen^n\ x\ dx\ ;\quad \int Cos^m\ x\ dx;\ \int Sen^n\ x\ \ Cos^m\ x\ dx$
cuando m y n son enteros positivos pares

$$Sen^n\ x = (Sen^2\ x)^{n/2} = \left(\frac{1 - Cos\ 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$Cos^m\ x = (Cos^2\ x)^{m/2} = \left(\frac{1 + Cos\ 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$Sen^n\ x\ Cos^m x\ = (Sen^2\ x)^{n/2}\ \ (Cos^2\ x)^{m/2}$$
$$= \left(\frac{1 - Cos\ 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\ \ \left(\frac{1 + Cos\ 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Caso 4

$\int Sen\ mx\ \ Cos\, nx\ dx = \frac{1}{2}\ Sen\ (m+n)x + \frac{1}{2}\ Sen\ (m-n)x$

$\int Sen\ mx\ \ en\, nx\ dx = -\ \frac{1}{2}\ Cos\ (m+n)x + \frac{1}{2}\ Cos\ (m-n)x$

$\int Cos\, mx\ \ Cos\, nx\ dx = \frac{1}{2}\ Cos\ (m+n)x + \frac{1}{2}\ Cos\ (m-n)x$

Caso 5

$\int Tan^n\ x\ dx$; $\int Cot^n\ x\ dx$ **cuando n es un entero positivo**

$Tan^n\ x = Tan^{n-2}\ x\ \ Tan^2\ x = Tan^{n-2}\ x\ \ (Sec^2\ x - 1)$

$Cot^n\ x = Cot^{n-2}\ x\ \ Cot^2\ x = (Cot^{n-2}\ x)\ \ (Csc^2\ x - 1)$

$\int Sec^n\ x\ dx$; $\int Csc^n\ x\ dx$ **cuando n es un entero positivo par**

$Sec^n\ x = Sec^{n-2}\ x\ \ Sec^2\ x = (Sec^2\ x\ )^{(n-2)/2}\ \ (Sec^2\ x) =$
$(Tan^2 x + 1)^{(n-2)/2}\ \ (Sec^2\ x)$

$$Csc^n\ x = Csc^{n-2}\ x\ \ Csc^2\ x = (Csc^2\ x\ )^{\frac{n-2}{2}}\ \ (Csc^2\ x)$$
$$= \ (Cot^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}}\ \ (Csc^2\ x)$$

5.1EJERCICIOS DE INTEGRALES CON INTEGRACIÓN TRIGONOMÉTRICA.

$$\mathbf{1.-\ Resolver}: \int \boldsymbol{tan^4 x\, dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int tan^2\ x\ tan^2 x\ dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2x - 1 = tan^2x$:

$$= \int tan^2x\,(sec^2x - 1)\ dx = \int tan^2x\, sec^2x\, dx - \int tan^2x\ \ dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = tan\ \ x;\ du = sec^2\ xdx}$

$$= \int u^2\, du - \int sec^2\ x - 1\ dx = \frac{u^3}{3} - \left(\int sec^2\ x\, dx - \int\ dx\right) =$$

$$= \frac{tan^3\ x}{3} - (\tan x\ - x) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{tan^3(x)}}{\mathbf{3}} - \mathbf{tan}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{2.-\ Resolver}: \int \boldsymbol{tan^6\ 3x\, dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int tan^4\ 3x\ tan^2 3x\ dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2x - 1 = tan^2x$:

$$= \int tan^4\,3x\ \ (sec^2 3x\ - 1)\, dx =$$

$$= \int tan^4\,3x\ \ sec^2\ 3x\, dx - \int tan^4\,3x\ \ dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \mathbf{tan}\ 3x\ ;\ du\ = 3\ sec^2\ 3x\ dx}$

$$= \frac{1}{3}\int u^4\, du - \int tan^2\,3x\,(sec^2\ 3x - 1)\ dx$$

$$=\frac{1}{15}\,u^5-\left(\int tan^2\,3x\,sec^2 3x\ dx-\int tan^2\,3xdx\right)$$

$$=\frac{1}{15}\,u^5-\left(\frac{1}{3}\int u^2\,du-\int(sec^2\,3x\ -1)\ dx\right)$$

$$=\frac{tan^5\,3x}{15}-\left(\frac{1}{3}\frac{u^3}{3}-\left(\frac{1}{3}\int \sec^2 u\right)+x\right)$$

$$=\frac{tan^5\,3x}{15}-\frac{u^3}{9}+\frac{1}{3}\tan u-x+C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{tan^5\ 3x}{15}-\frac{tan^3\ 3x}{9}+\frac{1}{3}\tan 3x-x+C}$

3.− *Resolver*: $\boldsymbol{\int sec^4\ x\ dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$\int sec^2\ x\ \ sec^2\ x\ dx=$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2 x=\ 1+\ tan^2 x$:

$$=\int(1+tan^2\ x)\,sec^2\ x\ \ dx=\int sec^2\ x\,dx+\int tan^2\ x\,sec^2\ x\,dx=$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=\tan x\,;\ du=sec^2\ x\ \ dx}$

$$=\tan x+\int u^2\ \ du=\tan x+\frac{u^3}{3}+C\ =$$

Respuesta: $\boldsymbol{\tan x+\frac{tan^3\ x}{3}+C}$

4.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int cot^5(2x)dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$=\int cot^3(2x)\ cot^2(2x)dx=$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2 x=csc^2 x-1$:

$$=\int cot^3(2x)\ (csc^2(2x)-1)dx=$$

$$= \int cot^3(2x)csc^2(2x)dx - \int cot^3(2x)\,dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cot\,(2x);\ du = -2\ csc^2(2x)dx}$

$$= -\frac{1}{2}\int u^3\,du - \left(\int cot\,(2x)cot^2(2x)dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^4}{4} - \int cot\,(2x)(csc^2(2x) - 1)\,dx =$$

$$= -\frac{u^4}{8} - \int (csc^2(2x)cot(2x))dx + \int cot\,(2x)dx =$$

$$= -\frac{cot^4(2x)}{8} + \frac{1}{2}\int u\,du + \frac{1}{2}\int cot\,u\,du$$

$$= -\frac{cot^4(2x)}{8} + \frac{u^2}{4} + \frac{1}{2}\,ln|sen\,u| + C$$

$$= -\frac{cot^4(2x)}{8} + \frac{u^2}{4} + \frac{1}{2}\,ln|sen\,u| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta:\ -\frac{cot^4(2x)}{8} + \frac{(\cot 2x\,)^2}{4} + \frac{1}{2}\ ln|sen\,(2x)| + C}$$

5.− *Resolver*: $\boldsymbol{\int csc^3\,(x)dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$\int \csc(x)\,csc^2\,(x)\ dx =$$

Se encuentran los valores de u, du, v y dv, para aplicarlos en la fórmula de la integración por partes

$\boldsymbol{u = csc\,(x);\ du = -\csc(x)\cot(x);\ dv = csc^2\,x\ ;\ v = -\cot(x);}$

$$= -csc\,(x)cot\,(x) - \int cot^2(x)csc\,(x)dx =$$

$$= -csc\,(x)cot\,(x) - \int (csc^2(x) - 1)csc\,(x)dx =$$

$$= -csc\,(x)cot\,(x) - \int \left(csc^3(x)\right)dx + \int csc\,(x)dx =$$

$$= -csc\,(x)cot\,(x) - \int \left(csc^3(x)\right)dx + \int csc\,(x)dx =$$

$$\int csc^3(x)dx + \int csc^3(x)dx =$$

$$= -csc\,(x)cot\,(x) + ln|csc\,(x) - cot\,(x)|$$

$$2\int csc^3(x)dx = -csc\,(x)cot\,(x) + ln|csc\,(x) - cot\,(x)| =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{-csc\,(x)cot\,(x)}{2} + \frac{ln|csc\,(x) - cot\,(x)|}{2} + C$$

$$\mathbf{6.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int e^x\, tan^4(e^x)\, dx$$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = e^x;\ du = e^x\ dx}$

$$= \int tan^4(u)\,du =$$

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int tan^2(u)\ tan^2(u)\,du =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x = sec^2 x - 1$:

$$= \int tan^2\,(u)(sec^2(u) - 1)du =$$

$$= \int tan^2(u)sec^2(u)du - \int tan^2(u)du =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = tan(u);\ du = sec^2(u)\,du}$

$$= \int u^2\,du - \int sec^2(u) - 1\ du = \frac{u^3}{3} - (tan\,(u) - u) + C$$

$$= \frac{u^3}{3} - tan(u) + u + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{tan^3(e^x)}{3} - tan(e^x) + e^x + C$$

$$\mathbf{7.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{sec^4\ (\ln|x|)}{x}\ dx$$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u = ln\ x; du = \frac{dx}{x}}$$

$$= \int sec^4\ (u) du =$$

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int sec^2(u)\ sec^2\ (u) du =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x + 1 = sec^2 x$:

$$= \int (tan^2\ (u) + 1)\ sec^2\ (u) du =$$

$$= \int tan^2\ (u) sec^2 (u)\ du + \int sec^2\ (u) du =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = tan(u);\ du =\ sec^2(u)\, du}$

$$= \int u^2\ du + tan(u) + C\ =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\dfrac{tan^3(\ln x)}{3} + tan(\ln x) + C}$

$\boldsymbol{8. - Resolver}$: $\boldsymbol{\int tan^6(x) sec^4(x) dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$\int tan^6(x) sec^2(x)\ sec^2(x) dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x + 1 = sec^2 x$:

$$= \int tan^6(x) sec^2(x)\ (tan^2(x) + 1) dx =$$

$$= \int tan^8(x) sec^2\ (x) dx + \int tan^6(x) sec^2\ (x) dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = tan(u);\ du =\ sec^2(u)\, du}$

$$= \int u^8\ du + \int u^6\ du = \frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\dfrac{tan^9(x)}{9} + \dfrac{tan^7(x)}{7} + C}$

$$\mathbf{9.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:} \int \boldsymbol{tan^5(x)sec^3(x)dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int (tan^2(x))^2 \, sec^2(x) \sec(x) \, tan\,(x)dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x = sec^2 x - 1$:

$$= \int (sec^2(x) - 1)^2 \, sec^2(x) \sec(x) tan\,(x)dx \; =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \sec(x);\; du = \sec(x) tan\,(x)}$

$$= \int (u^2 - 1)^2 u^2 \, du = \int (u^4 - 2u^2 + 1)\, u^2 \;\, du =$$

$$= \int (u^6 - 2u^4 + u^2)\;\, du = \frac{u^7}{7} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{:}\; \boldsymbol{\frac{sec^7(x)}{7} - 2\frac{sec^5(x)}{5} + \frac{sec^3(x)}{3} + C}$$

$$\mathbf{10.-}\; \boldsymbol{Resolver}\text{:} \int \boldsymbol{cot^2(3x)csc^4(3x)dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int cot^2\,(3x)csc^2(3x)csc^2(3x)dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $csc^2 x = cot^2 x + 1$:

$$= \int cot^2\,(3x)csc^2(3x)\;(cot^2(3x) + 1)dx =$$

$$= \int cot^4\,(3x)csc^2(3x)dx + \int cot^2(3x)csc^2(3x)dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \cot\,(3x);\; du = -3\; csc^2 x\; dx}$

$$= -\frac{1}{3}\int u^4\, du - \frac{1}{3}\int u^2\, du = -\frac{1}{15}u^5 - \frac{1}{9}u^3 + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}\text{:}\; \boldsymbol{-\frac{1}{15}cot^5(3x) - \frac{1}{9}cot^3(3x) + C}$$

$\mathbf{11.-}$ $\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{sen\ (2x)\cos(3x)dx}$

Solución.-

Se aplica la identidad trigonométrica de $Sen\ (m)\ \ Cos\ (n) = Sen\ (m-n) + Sen\ (m+n)$:

$$=\frac{1}{2}\int (sen\ (2-3)x + sen\ (2+3)x)\ dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int (sen\ (-x) + sen\ (5x))\ dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int (sen\ (5x) - sen\ (x))\ dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int\ sen\ (5x) - \frac{1}{2}\int\ sen\ (x)\ \ dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{5}\boldsymbol{x}; \boldsymbol{du} = \mathbf{5}\boldsymbol{dx};$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{5}\int\ sen\ (u)du - \frac{1}{2}(-\cos(x))\ \ = \left(-\frac{1}{10}\cos(u) + \frac{1}{2}\cos x\right) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\displaystyle -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\mathbf{cos}(\mathbf{5}\boldsymbol{x}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$

$\mathbf{12.-}$ $\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{sen\ (3x) sen\ (3x)\ dx}$

Solución.-

Se aplica la identidad trigonométrica de $Sen\ (m)\ \ Sen\ (n) = Cos\ (m-n) - Cos\ (m+n)$:

$$=\frac{1}{2}\int\ \cos(3-3)x - \cos(3+3)\ x\ dx = \frac{1}{2}\int -\cos(6x)dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{6}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{du} = \mathbf{6}\boldsymbol{dx}$

$$= -\frac{1}{2} * \frac{1}{6}\int \cos u\ du = -\frac{1}{12} sen\ u + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\displaystyle -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\ \boldsymbol{sen}\ (\mathbf{6}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$

$$\mathbf{13.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen}\ (\boldsymbol{x})\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx}$$

Solución.-
Se aplica la identidad trigonométrica de $Sen\ (m)\ Cos\ (n) = Sen\ (m-n) + Sen\ (m+n)$*:*

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(1-1)x + \operatorname{sen}(1+1)x\ dx = \frac{1}{2}\int sen\ (2x)dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = 2x;\ du = 2dx}$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\ du = -\frac{1}{4}\cos(u) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{cos}\ (\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{14.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{cos}(\mathbf{3}\boldsymbol{x})\mathbf{cos}(\mathbf{4}\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

Solución.-
Se aplica la identidad trigonométrica de $Cos\ (m)\ Cos\ (n) = Cos\ (m-n) + Cos\ (m+n)$*:*

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos(3-4)x + \cos(3+4)x\ dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos(-x) + \cos(7x)dx\right] = \frac{1}{2}\left[\int \cos(x) + \cos(7x)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos x\ dx + \int \cos 7x\ \ dx\right]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = 7x;\ du = 7\ dx}$

$$= \frac{1}{2}\left(sen\ x + \frac{1}{7}\int \cos u\ du\right) = \frac{1}{2}\left(sen\ x + \frac{1}{7}\ sen\ u\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\ \boldsymbol{sen}\ (\mathbf{7}\boldsymbol{x})\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{15.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{cos}(\boldsymbol{x})\ \mathbf{cos}(\mathbf{7}\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

Solución.-
Se aplica la identidad trigonométrica de $Cos\ (m)\ Cos\ (n) = Cos\ (m-n) + Cos\ (m+n)$*:*

$$\frac{1}{2}\left[\int \cos(1-7)x + \cos(1+7)\,x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos(-6x) + \cos(8x)\,dx\right] = \frac{1}{2}\int \cos(6x) + \cos(8x)dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 6x;\ du = 6\,dx;\ u = 8x;\ du = 8\,dx}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\int \cos u\,du + \frac{1}{8}\int \cos u\ \ du\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\ sen\,u + \frac{1}{8}\ sen\,u\right) + C$$

$$= \frac{1}{12} sen\ u + \frac{1}{16} sen\ u + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{12}\ sen\ 6x + \frac{1}{16}\ sen\ 8x + C}$

$\mathbf{16.-}$ $\boldsymbol{Resolver}$: $\boldsymbol{\int cot^4(x)dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int cot^2\ (x)\ cot^2\ (x)\ dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2x = csc^2x - 1$:

$$= \int cot^2\ (x)\ \ (csc^2(x) - 1)dx =$$

$$= \int cot^2\ (x)csc^2(x)dx - \int cot^2(x)dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cot\,(x);\ du = \ -csc^2(x)dx}$

$$= -\int u^2\,du - \int (csc^2(x) - 1)\,dx =$$

$$= -\frac{u^3}{3} - \left(\int csc^2(x)dx - \int dx\right) = -\frac{u^3}{3} - (-cot\ (x) - x) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\frac{cot^3(x)}{3} + cot\ (x) + x + C}$

$\mathbf{17.}$ $\boldsymbol{-Resolver}$: $\boldsymbol{\int x\,sen\,^2(x^2)dx}$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^2;\ du = \ xdx}$

$$= \frac{1}{2}\int sen^2(u)du =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sen^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos 2u}{2}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\, du - \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2u}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\, u - \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{1}{4}\, u - \frac{1}{8}\, sen\,(x) + C$$

$$= \frac{1}{4}\, x^2 - \frac{1}{8}\, sen\,(2u) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\, \boldsymbol{x^2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\, \boldsymbol{sen}\left(\mathbf{2}\boldsymbol{x^2}\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{18.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{cos^2(x)}}{\boldsymbol{sen^4(x)}}\, \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int \frac{cos^2(x)}{sen^2(x)} * \frac{1}{sen^2(x)}\, dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cot\,(x);\ du = -csc^2(x)dx}$

$$= \int cot^2(x)csc^2(x)\, dx = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{cot^3(x)}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{19.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen^4\ x\ dx}$$

Solución.-

Se utiliza la identidad trigonométrica $sen^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - 2\cos 2x + cos^2 2x}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int \cos 2x\, dx + \int cos^2 2x\, dx\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{2}\operatorname{sen}2x+\int\frac{1+\cos 4x}{2}\;dx\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\;\cos 4x\,dx\right)\right)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=4x};\;\; \boldsymbol{du=4\,dx}$

$$=\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x\right)+c$$
$$=\frac{1}{4}\left(x-\operatorname{sen}2\text{x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x\right)+c$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{\operatorname{sen}2\text{x}}{4}+\frac{1}{8}x+\frac{\operatorname{sen}4x}{32}+c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{3}{8}x-\frac{\operatorname{sen}2\text{x}}{4}+\frac{\operatorname{sen}4\text{x}}{32}+c}$

20.– *Resolver*: $\boldsymbol{\int sen^2x\;cos^2x\;dx}$

Solución.-

Se utiliza la identidad trigonométrica $sen^2(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$; $cos^2(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}$:

$$\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\;dx$$
$$=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x-\cos 2x-cos^2\;2x)\;dx$$
$$=\frac{1}{4}\left(\int dx-\int\;cos^2\,2x\,dx\right)=\frac{1}{4}\left(x-\int\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\int\;1+\cos 4x\;dx\right)=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\;\cos 4x\;dx\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x\right)+c\;=\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen}4x+c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\operatorname{sen}4x+c}$

$$\mathbf{21.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen^2 x\ \ cos^4 x\, dx}$$

Solución.-

Se utiliza la identidad trigonométrica $sen^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$:

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+2\cos 2x + cos^2\, 2x}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1+2\cos 2x + cos^2\, 2x - \cos 2x - 2\, cos^2\, 2x - cos^3\, 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int 1 + \cos 2x - cos^2\, 2x - cos^3\, 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 2x\ dx - \int cos^2\, 2x\, dx - \int cos^3\, 2x\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\, sen\ 2x - \int \frac{1+\cos 4x}{2}\ dx - \int cos^2\, 2x\ \cos 2x\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\, sen\ 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} sen\ 4x - \int (1 - sen\ ^2\, 2x)\cos 2x\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\, sen\ 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} sen\ 4x \right.$$
$$\left. - \int \cos 2x\, dx + \int sen\ ^2\, 2x \cos 2x\, dx\right)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{sen}\ \mathbf{2}\boldsymbol{x}$; $\quad \boldsymbol{du} = \mathbf{2}\ \mathbf{cos}\, \mathbf{2}\boldsymbol{x}$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\, sen\ 2x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} sen\ 4x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\ 2x + \frac{1}{2}\int u^2\, du\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{2}\, sen\ 2x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} sen\ 4x - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\ 2x + \frac{1}{6}u^3 + c\right)$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}}\mathbf{sen}\, \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{48}}\boldsymbol{sen}\ ^{\mathbf{3}}\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

22.-*Resolver*: $\boldsymbol{\int cos^6\ 3x\ dx}$

Solución.-
Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$=\int (cos^2\ 3x)^2\ cos^2\ 3x\ dx$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $cos^2(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}$:

$$=\int\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+2\cos 6x+cos^2\,6x)(1+\cos 6x)\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(1+\cos 6x+2\cos 6x+2\,cos^2\,6x+cos^2\,6x+cos^3\,6x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int dx+3\int\cos 6x\,dx+3\int cos^2\,6x\,dx+\int cos^3\,6x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\text{sen }6x+3\int\frac{1+\cos 12x}{2}dx+\int cos^2\,6x\cos 6x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\text{sen }6x+\frac{3}{2}\left(\int dx+\int\cos 12x\,dx\right)+\int(1-sen^2\,6x)\cos 6x\,dx\right)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u=sen\,6x\quad du=6\,cos\,6x\,dx}$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\text{sen }6x+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{12}\text{sen }12x\right)+\int\cos 6x\,dx-\int sen^2\,6x\cos 6x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{2}\text{sen }6x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{24}\text{sen }12x+\frac{1}{6}\text{sen }6x-\frac{1}{6}\frac{u^3}{3}\right)+c$$

***Respuesta*:** $\boldsymbol{\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}sen6x+\frac{1}{64}sen12x+\frac{1}{144}sen^3 6x+c}$

$\mathbf{23.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{sen\ ^4 x}}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$\int csc^4 x\ dx = \int csc^2 x \quad csc^2 x\ dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $csc^2 x = cot^2 x + 1$:

$$= \int (1 + cot^2 x) csc^2 x\ dx = \int (csc^2 x + csc^2 x\ cot^2 x) dx =$$

$$= \int csc^2 x\ dx + \int csc^2 x\ cot^2 x\ dx = -\cot x + \int u^2 \cdot\ -du =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cot x \quad du = -csc^2 x\ dx}$

$$= -\cot x - \frac{u^3}{3} + c =$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\cot x - \frac{cot^3 x}{3} + c}$

$\mathbf{24.-}$***Resolver***: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{cos^6 x}}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int sec^6 x\ dx = \int (sec^2 x)^2\ sec^2 x\ dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2 x = tan^2 x + 1$:

$$= \int (1 + tan^2 x)^2\ sec^2 x\, dx = \int sec^2 x (1 + 2\ tan^2 x + tan^4 x)\ dx$$

$$= \int sec^2 x\ dx + 2 \int sec^2 x\ \ tan^2 x\ dx + \int tan^4 x\ sec^2 x\ dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = tan\ x}; \qquad \boldsymbol{du = sec^2 x\ dx}$

$$= \tan x + 2 \int u^2\ du + \int u^4\ du = \tan x + \frac{2}{3} u^3 + \frac{u^5}{5} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\tan x + \frac{2}{3} tan^3 x + \frac{tan^5 x}{5} + c}$

$$\mathbf{25.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{cos^2 x}}{\boldsymbol{sen^6 x}}\ \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$\int \frac{cos^2 x}{sen^2 x} \cdot \frac{1}{sen^2 x} \cdot \frac{1}{sen^2 x} dx$$

$$= \int cot^2 x \cdot csc^2 x\, csc^2 x\, dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $csc^2 x = cot^2 x + 1$:

$$= \int cot^2 x\,(1 + cot^2 x) csc^2 x\, dx$$

$$= \int cot^2 x \cdot csc^2 x\ dx + \int csc^2 x\ \cdot cot^4 x\, dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \cot x\ \ du = -csc^2 x\ dx}$

$$= -\int u^2\, du - \int u^4\, du\ =\ -\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c\ =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{cot^3 x}}{\mathbf{3}} - \frac{\boldsymbol{cot^5 x}}{\mathbf{5}} + \boldsymbol{c}$$

$$\mathbf{26.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{sen^6 x}}$$

Solución.-

Se reemplaza la equivalencia $csc^6 x = \frac{1}{sen^6 x}$:

$$= \int csc^6 x\ dx = \int csc^2 x\ \ (1 + cot^2 x)^2\ dx$$

$$= \int csc^2 x\,(1 + 2\ cot^2 x + cot^4 x) dx$$

$$= \int csc^2 x\, dx + 2\int\ cot^2 x\ \cdot csc^2 x\ dx + \int cot^4 x\ \cdot csc^2 x\, dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cot\, x}\ ;\ \boldsymbol{du = -csc^2 x\ dx}$

$$= -\cot x - 2\int u^2\, du - \int u^4\, du = -\cot x - \frac{2\ u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\boldsymbol{cot\ x} - \frac{\mathbf{2}\ \boldsymbol{cot^3 x}}{\mathbf{3}} - \frac{\boldsymbol{cot^5 x}}{\mathbf{5}} + \boldsymbol{c}$$

$$\mathbf{27.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{tan^2 5x\,dx}$$

Solución.-

Se reemplaza la equivalencia $tan^2x = \frac{sen^2 x}{cos^2 x}$:

$$= \int \frac{sen^2\ 5x}{cos^2 5x} dx =$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica

$$= \int \frac{(1 - cos^2 5x)}{cos^2 5x} dx$$

$$= \int \frac{1}{cos^2 5x} - \int \frac{cos^2 5x}{cos^2 5x} dx = \int sec^2 5x\, dx - \int dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 5x}$; $\quad \boldsymbol{du = 5\,dx}$

$$= \frac{1}{5}\int sec^2 u\, du - \int dx = \frac{1}{5}\tan u - x + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{tan\,5x - x + c}$$

$$\mathbf{28.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{cot^3 x\,dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int cot^2 x \cdot \cot x\ dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2 x = csc^2 x - 1$:

$$= \int (csc^2 x - 1)\cot x\, dx = \int csc^2 x \cdot \cot x\, dx - \int \cot x\ dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cot\,x}$; $\qquad \boldsymbol{du = -\ csc^2 x\ dx}$

$$= -\int u\ du - \int \cot x\, dx = -\frac{u^2}{2} - \ln(\operatorname{sen} x) + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{cot^2 x}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{ln(sen\,x) + c}$$

29.$-$***Resolver***: $\displaystyle\int (\boldsymbol{tan\,2x + cot\,2x})^2\,\boldsymbol{dx}$

Solución.-

$$= \int \left(tan^2 2x + 2\,tan\quad 2x \cdot \cot 2x + cot^2 2x\right) dx$$

$$= \int tan^2 2x\,dx + 2\int \tan 2x \cdot \cot 2x\,dx + \int cot^2 2x\,dx$$

Se utiliza las identidades trigonométricas $tan^2 x = sec^2 x - 1;\ cot^2 x = csc^2 x - 1$:

$$= \int (sec^2 2x - 1)dx + 2\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx + \int (csc^2 2x - 1)dx$$

$$= \int sec^2 2x\,dx - \int dx + 2\int dx + \int csc^2 2x\,dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + 2x + \left(-\frac{1}{2}\cot 2x\right) - x + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{2} tan\,2x - \frac{1}{2} cot\,2x + c}$

30.$-$***Resolver***: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{1 + cos\,x}}$

Solución.-

Se multiplica la fracción por la conjugada, de la siguiente manera:

$$\int \frac{1}{1 + cos\,x} \cdot \frac{1 - cos\,x}{1 - cos\,x}\,dx =$$

$$= \int \frac{1 - cos\,x}{1 - cos\,x + cos\,x - cos^2 x}\,dx = \int \frac{1 - cos\,x}{1 - cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{dx}{sen^2 x} - \int \frac{cos\,x}{sen^2 x}dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\,x}$; $\boldsymbol{du = cos\,x}$

$$= \int csc^2 x - \int u^{-2}\,du = \int csc^2 x + u^{-1} + c =$$

$$= -cot\,x + \frac{1}{u} + c = -\,cot\,x + \frac{1}{sen\,x} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\,cot\,x + csc\,x + c}$

$$\mathbf{31.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{2}\ \boldsymbol{sen w} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{cos^2 w}} \boldsymbol{dw}$$

Solución.-

Se descompone la fracción de la siguiente manera:

$$= \int \frac{2\, sen\, w}{cos^2 w} dw - \int \frac{dw}{cos^2 w}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cos w} \qquad \boldsymbol{du = -sen\, w\, dw}$

$$= 2\int \frac{du}{u^2} - \int sec^2 w\, dw = 2\int u^{-2} du - \int sec^2 w\, dw$$

$$= \frac{-2\, u^{-1}}{-1} - tan\, w + c = \frac{2}{u} - tan\, w + c = \frac{2}{cos\, w} - tan\, w + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{2}\boldsymbol{sec\, w - tan\, w + c}$

$$\mathbf{32.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{tan^3 \sqrt{x}}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}} \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^{1/2}}; \qquad \boldsymbol{du = \frac{1}{2} x^{-1/2}\ dx}$

$$= 2\int tan^3 u\ du =$$

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= 2\int tan^2 u\ \tan u\ \ du =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x = sec^2 x - 1$:

$$= 2\int (sec^2 u - 1) \tan u\ du$$

$$= 2\int \tan u\ \ sec^2 u\ du - 2\int \tan u\, du$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v} = \mathbf{tan}\, \boldsymbol{u}; \quad \boldsymbol{dv = sec^2 u\, du}$

$$= 2\int v\, dv + 2\ln|\cos u| + c = 2\frac{v^2}{2} + 2\ln|\cos u| + c$$

$$= tan^2 u + 2\ln|\cos u| + c =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{tan^2 \sqrt{x} - 2\ ln\left|cos\ \sqrt{x}\ \right| + c}$

33.−Resolver: $\int \frac{csc^4x}{cot^2x}dx$

Solución.-

Se reemplaza la equivalencia $\csc x = \frac{1}{sen\ x}$; $\cot x = \frac{\cos x}{sen\ x}$:

$$= \int \frac{\frac{1}{\cancel{sen^4x}}}{\frac{cos^2x}{\cancel{sen^2x}}}dx = \int \frac{1}{sen^2x\, cos^2x}dx$$

$$= \int \frac{dx}{(\cos x\ \text{sen}\ x)^2} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\text{sen}\ 2x}{2}\right)^2} = \int \frac{4}{sen^2 2x}$$

$$= 4\int csc^2 2x\ dx = -\frac{4}{2}\cot 2x + c =$$

Respuesta: $\boldsymbol{-2\cot 2x + c}$

34.−Resolver: $\int \boldsymbol{sen^4 \frac{1}{2}\pi x\ dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int \left(sen^2 \frac{1}{2}\pi x\right)^2\ dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sen^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$= \int \left(\frac{1-\cos\pi x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\left(\int 1 - 2\cos\pi x + cos^2\pi x\right)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int \cos\pi x\ dx + \int cos^2\pi x\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{\pi}\text{sen}\ \pi x + \int \frac{1+\cos 2\pi x}{2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{\pi}\text{sen}\ \pi x + \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2\pi x\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \frac{2}{\pi}\text{sen}\ \pi x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\text{sen}\ 2\pi x\right) + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{4}x - \frac{1}{2\pi}sen\ \pi x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16\pi}sen\, 2\pi x + c}$

35.– Resolver: $\boldsymbol{\int sen^3 \frac{1}{2}\pi t \, dt}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$\int sen^2 \frac{1}{2}\pi t \cdot sen\frac{1}{2}\pi t \, dt =$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= \int \left(1 - cos^2 \frac{1}{2}\pi t\right) \cdot sen\frac{1}{2}\pi t = \int sen\frac{1}{2}\pi t \, dt - \int cos^2\frac{1}{2}\pi t \cdot sen\frac{1}{2}\pi t$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cos\frac{1}{2}\pi t};\qquad \boldsymbol{du = -\frac{\pi}{2} sen\frac{1}{2}\pi t \, dt}$

$$= -\frac{2}{\pi}cos\frac{1}{2}\pi t + \int u^2 \cdot \frac{2}{\pi} du = -\frac{2}{\pi}cos\frac{1}{2}\pi t + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{u^3}{3} + c$$

$$= -\frac{2}{\pi}cos\frac{1}{2}\pi t + \frac{2}{3\pi}cos^3\frac{1}{2}\pi t + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\dfrac{-6\,cos\frac{1}{2}\pi t + 2\,cos^3\frac{1}{2}\pi t}{3\pi} + c}$

36.– Resolver: $\boldsymbol{\int sen^2 \pi t \cdot cos^2 \pi t \, dt}$

Solución.-

$$= \int (sen\,\pi t \cdot cos\,\pi t)^2 \, dt$$

Se multiplica y se divide para 2 para completar la identidad trigonométrica $sen\,2x = 2\,Sen\,x\,Cos\,x$

$$= \int \left(\frac{sen\,2\pi t}{2}\right)^2 dt = \int \frac{sin^2 2\pi t}{4} dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1 - cos\,4\pi t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{8}\int dt - \frac{1}{8}\int cos\,4\pi t \, dt = \frac{1}{8}t - \frac{1}{32\pi} sen\,4\pi t + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4\pi} sen\,4\pi t\right) + c}$

$$\mathbf{37.-}\int \boldsymbol{sen^2\frac{1}{2}x\cdot cos^2\frac{1}{2}x\,dx}$$

Solución.-

Se multiplica y se divide para 2 para completar la identidad trigonométrica $sen\,2x = 2\,Sen\,x\,Cos\,x$

$$=\int\left(sen\frac{1}{2}x\cdot cos\frac{1}{2}x\right)^2 dx =$$

$$=\int\left(\frac{sen\,\frac{2}{2}x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\frac{sen\,x}{2}\right)^2 dx = \int\frac{sen^2x}{4}dx = \frac{1}{4}\int sen^2x\,dx =$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $sen^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$:

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-cos\,2x}{2}dx == \frac{1}{8}\int(1-cos\,2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int dx - \int cos\,2x\,dx\right)+c$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2x}$; $\boldsymbol{du = 2\,dx}$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}sen\,2x+c}$$

$$\mathbf{38.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen\,3x\cdot cos\,5x\,dx}$$

Solución.-

Se aplica lo siguiente: $\int \boldsymbol{sen\,mx\cdot cos\,nx\,dx = \frac{1}{2}sen(m+n)x + \frac{1}{2}sen(m-n)x\,dx}$

$$=\int\frac{1}{2}sen(3+5)x+\frac{1}{2}sen(3-5)x\,dx$$

$$=\int\frac{1}{2}sen\,8x\,dx+\frac{1}{2}\int sin(-2x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}cos\,8x+\frac{1}{4}cos\,2x+c=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\boldsymbol{\frac{1}{16}cos\,8x+\frac{1}{4}cos\,2x+c}$$

39.–Resolver: $\int sen^3 4x \cdot cos^5 4x\, dx$

Solución.-
Se descompone la potencia trigonométrica y se aplica la identidad trigonométrica pitagórica.

$$= \int (1-cos^2 4x)\, sen\, 4x \cdot cos^5 4x\, dx =$$

$$= \int sen\, 4x \cdot cos^5 4x\, dx - \int sen\, 4x \cdot cos^7 4x\, dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = cos\, 4x;} \qquad \boldsymbol{du = -\frac{1}{4} sen\, 4x\, dx}$

$$= -\frac{1}{4}\int u^5\, du + \frac{1}{4}\int u^7\, du = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}u^6 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}u^8 + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\frac{1}{24} cos^6\, 4x + \frac{1}{32} cos^8\, 4x + c}$

40.–Resolver: $\int sen^5 ax\;\, dx$

Solución.-
Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int (sen^2 ax)^2 \operatorname{sen} ax\, dx = \int (1-cos^2 ax)^2 \operatorname{sen} ax\, dx$$

$$= \int (1 - 2\, cos^2 ax + cos^4 ax) \operatorname{sen} ax\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen} ax - 2\int cos^2 ax \cdot \operatorname{sen} ax + \int cos^4 ax \cdot \operatorname{sen} ax\, dx$$

Se realiza los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = ax;}\;\; \boldsymbol{du = a\, dx;} \qquad \boldsymbol{u = cos\, ax;} \qquad \boldsymbol{du = -a\, sen\, ax\, dx}$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{2}{a}\int u^2\, du - \frac{1}{a}\int u^4\, du =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{2}{a}\cdot\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{a\;5} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\frac{1}{a} cos\, ax + \frac{2}{3a} cos^3 ax - \frac{1}{5a} cos^5 ax + c}$

$$\mathbf{41.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{cos^5 2x}}{\sqrt{\boldsymbol{sen\,2x}}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

$$= \int cos^5 2x \cdot sen^{-1/2} 2x\ dx =$$

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int (cos^2 2x)^2 cos\,2x \cdot sen^{-1/2} 2x\ \ dx =$$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= \int (1 - sen^2 2x)^2 cos\,2x \cdot sen^{-1/2} 2x\ \ dx$$

$$= \int (1 - 2sen^2 2x + sin^4 2x)\, cos\,2x \cdot\ sin^{-1/2} 2x\, dx$$

$$= \int cos\,2x\ \cdot\ sin^{-1/2} 2x\, dx$$

$$- \int cos\,2x \cdot 2\,sin^{3/2} 2x\, dx + \int cos\,2x \cdot sin^{7/2} 2x\, dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\,2x}$; $\quad \boldsymbol{du = 2\ cos 2x\ dx}$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du - 2 \cdot \frac{1}{2}\int u^{3/2}\, du + \frac{1}{2}\int u^{7/2}\ du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{9/2}}{9/2}$$

$$= sen^{\ 1/2} 2x - \frac{2}{5} sen^{5/2} 2x + \frac{1}{9} sen^{9/2} 2x + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{sen^{\ 1/2} 2x\left(1 - \frac{2}{5} sen^2 2x + \frac{1}{9} sen^4 2x\right) + c}$$

$$\mathbf{42.-\ Resolver}: \int \boldsymbol{cot^5 \frac{y}{4}\ dy}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la siguiente manera:

$$= \int \left(cot^2 \frac{y}{4}\right)^2 cot\frac{y}{4}\ dy$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $\ cot^2 x = csc^2 x - 1$:

$$= \int \left(csc^2 \frac{y}{4} - 1\right)^2 cot\frac{y}{4}\ dy = \int \left(csc^4 \frac{y}{4} - 2csc^2 \frac{y}{4} + 1\right) cot\frac{y}{4}\ dy$$

$$= \int csc^4\frac{y}{4}\cdot cot\frac{y}{4}\,dy - 2\int csc^2\frac{y}{4}\cdot\ cot\frac{y}{4}\,dy + \int cot\frac{y}{4}dy$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = csc\frac{y}{4}}$; $\quad \boldsymbol{du = -\ \frac{1}{4}csc\frac{y}{4}\cdot cot\frac{y}{4}dy}$

$$= \int \quad csc^3\frac{y}{4}\cdot csc\frac{y}{4}$$

$$\cdot\, cot\frac{y}{4}\,dy$$

$$-2\int csc\frac{y}{4}\cdot csc\frac{y}{4}\cdot cot\frac{y}{4}dy + \int cot\frac{y}{4}\,dy$$

$$= -4\int u^3\,du + 8\int u\,du + ln\left|sen\frac{y}{4}\right| + c$$

$$= -4\frac{u^4}{4} + 8\frac{u^2}{2} + ln\left|sen\frac{y}{4}\right| + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\,csc^4\frac{y}{4} + 4csc^2\frac{y}{4} + ln\left|sen\frac{y}{4}\right| + c}$

$\boldsymbol{43.-Resolver}$: $\int \boldsymbol{(tan\,3x - cot\,3x)^3dx}$

Solución.-

$$= \int (tan^3 3x\,dx - 3tan^2 3x\cot 3x + 3\tan 3x\,cot^2 3x - cot^3 3x)dx$$

$$= \int tan^3 3x\,dx - \int 3\tan^2 3x\ \cot 3x\,dx$$

$$+ 3\int \tan 3x\,cot^2 3x\,dx - \int cot^3 3x\,dx$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $\;tan^2 x = sec^2 x - 1$:

$$= \int (sec^2 3x - 1)\tan 3x\,dx - \int \frac{3\,sen^2\,3x}{cos^2 3x}\cdot\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}dx$$

$$+3\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{cos^2 3x}{sen^2\,3x}dx - \int (csc^2 3x - 1)\cot 3x\,dx$$

Se realiza los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = \tan 3x \quad du = 3\,sec^2\,3x\,dx}$; $\boldsymbol{u = \cot 3x \quad du = -3\,csc^2 3x\,dx}$

$$= \frac{1}{3}\int u\,du - \int \tan 3x\,dx - 3\int \tan 3x\,dx$$

$$+3\int \cot 3x\,dx + \frac{1}{3}\int u\,du + \int \cot 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}u^2 - 4\int \tan 3x\, dx + 4\int \cot 3x\, dx + \frac{1}{6}u^2 + c$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{1}{6}\boldsymbol{tan^2 3x} + \frac{4}{3}\ln|\cos 3x| + \frac{4}{3}\ln|\mathrm{sen}\, 3x| + \frac{1}{6}\boldsymbol{cot^2 3x + c}$$

44. $-$***Resolver***: $\int \left(\boldsymbol{cot^4 3x + cot^2 3x}\right) \boldsymbol{dx}$

Solución.-

$$\int cot^4 3x\, dx + \int cot^2 3x\, dx$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2 x = csc^2 x - 1$:

$$= \int (csc^2 3x - 1)cot^2 3x\, dx + \int cot^2 3x\, dx$$

$$= \int csc^2 3x \cdot cot^2 3x\, dx - \int cot^2 3x\, dx + \int cot^2 3x\, dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \cot 3x}$; $\quad \boldsymbol{du = -3\, csc^2 3x\, dx}$

$$= -\frac{1}{3}\int u^2\, du = -\frac{1}{9}u^3 + c =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{1}{9}\boldsymbol{cot^3 3x + c}$$

45. $-$***Resolver***: $\int \boldsymbol{\tan^4 x \quad dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x = sec^2 x - 1$:

$$= \int (\sec^2 x - 1)\tan^2 x\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\tan^2 x\, dx = \int \sec^2 x \tan^2 x - \tan^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x \tan^2 x - (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \sec^2 x \tan^2 x - \int \sec^2 x + \int dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \tan x\,;\; du = \sec^2 x\, dx;\; dx = \frac{du}{\sec^2 x}}$

$= \int \sec^2 x\,.u^2 \frac{du}{\sec^2 x} - \int \sec^2 x + \int dx$

$= \int u^2 du - \int \sec^2 x + \int dx = \frac{u^3}{3} - \tan x + x + C$

$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C =$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\tan^3 x - 3\tan x + 3x\right) + C}$

46.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int e^x \tan^2(e^x)\quad dx}$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = e^x;\; du = e^x dx;\; dx = \frac{du}{e^x}}$

$= \int e^x \tan^2(u)\;\frac{du}{e^x} = \int \tan^2(u)\;du = \int (\sec^2 u - 1)\;du$

$= \int \sec^2 u\,du - \int du = \tan u - u + C =$

Respuesta: $\boldsymbol{\tan e^x - e^x + C}$

47.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int x\cot^2(2x^2)\quad dx}$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2x^2;\; du = 4x dx;\; dx = \frac{du}{4x}}$

$= \int x\cot^2 u\;\frac{du}{4x} = \frac{1}{4}\int \cot^2 u\,du = \frac{1}{4}\int (\csc^2 u - 1)\,du$

$= \frac{1}{4}\left(\int \csc^2 u\,du - \int du\right) = \frac{1}{4}(-\cot u - u) + C$

$= \frac{1}{4}(-\cot 2x^2 - 2x^2) + C =$

Respuesta: $\boldsymbol{-\frac{1}{4}\cot 2x^2 - \frac{1}{2}x^{2} + C}$

$$\mathbf{48.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:}\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\mathbf{sen}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{cos}^{3}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=\frac{x}{2};\ du=\frac{1}{2}dx;\ dx=2\ du}$

Se aplica la identidad trigonométrica pitagórica:

$$=2\int\frac{1}{\operatorname{sen}u\cos^3u}du=2\int\frac{\operatorname{sen}^2u+\cos^2u}{\operatorname{sen}u\cos^3u}du$$

$$=2\int\left(\frac{\cancel{\operatorname{sen}^2u}}{\cancel{\operatorname{sen}}u\cos^3u}+\frac{\cancel{\cos^2u}}{\operatorname{sen}u\cancel{\cos^3u}}\right)du$$

$$=2\int\left(\frac{\operatorname{sen}u}{\cos^3u}+\frac{1}{\operatorname{sen}u\cos u}\right)du$$

$$=2\left(\int\frac{\operatorname{sen}u}{\cos^3u}du+\int\frac{1}{\operatorname{sen}u\cos u}du\right)$$

Se aplica la identidad sen $2x=2$ *sen x cos x*

$$=2\left(\int\frac{\operatorname{sen}u}{\cos^3u}du+2\int\frac{du}{2\operatorname{sen}u\cos u}\right)$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{v=\cos u;\ dv=-\operatorname{sen}u\,du;\ du=-\frac{dv}{\operatorname{sen}u};\ w=2u;\ dw=2du;\ du=\frac{dw}{2}}$

$$=2\left(\int\frac{\operatorname{sen}u}{v^3}.-\frac{dv}{\operatorname{sen}u}+2\int\frac{du}{\operatorname{sen}2u}\right)=2\left(-\int v^{-3}dv+\frac{2}{2}\int\frac{dw}{\operatorname{sen}w}\right)$$

$$=2\left(\int v^{-3}dv+\frac{2}{2}\int\csc w\,dw\right)$$

$$=2\left(-\frac{v^{-2}}{-2}+\ln|\csc w-\cot w|\right)+C$$

$$=2\left(\frac{1}{2\cos^2u}+\ln|\csc w-\cot w|\right)+C$$

$$=\frac{1}{\cos^2u}+2(\ln|\csc 2u-\cot 2u|)+C$$

$$=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+2\left(\ln\left|\csc 2\left(\frac{x}{2}\right)-\cot 2\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{sec^2}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)+\mathbf{2\ ln|csc}\boldsymbol{x}|-\mathbf{2ln|cot}\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{C}$

49.−*Resolver*: $\int (\tan 2x + \cot 2x)^2$

Solución.-

Se realiza el producto notable: cuadrado de un binomio:

$$= \frac{1}{2}\int (\tan^2 u + 2\tan u \cot u + \cot^2 u)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \tan^2 u\, du + \int 2\tan u \cot u\, du + \int \cot^2 u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int (\sec^2 u - 1)du + 2\int \left(\frac{\cancel{\operatorname{sen} u}}{\cancel{\cos u}}.\frac{\cancel{\cos u}}{\cancel{\operatorname{sen} u}}\right)du \right.$$
$$\left. + \int (\csc^2 u - 1)du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \sec^2 u\, du - \int du + 2\int du + \int \csc^2 u\, du - \int du\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \sec^2 u\, du + \int \csc^2 u\, du\right) = \frac{1}{2}(\tan u - \cot u) + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{2}(\tan 2x - \cot 2x) + C}$

50.−*Resolver*: $\int (\sec 5x + \csc 5x)^2\, dx$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 5x; du = 5dx;\ dx = \frac{du}{5}}$

$$= \frac{1}{5}\int (\sec u + \csc u)^2 du =$$

$$= \frac{1}{5}\int (\sec^2 u + 2\sec u \csc u + \csc^2 u)du$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int \sec^2 u\, du + 2\int \sec u \csc u\, du + \int \csc^2 u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int \sec^2 u\, du + 2\int \frac{du}{\cos u \operatorname{sen} u} + \int \csc^2 u\, du\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\tan u + 2.2\int \frac{du}{2\cos u \operatorname{sen} u} - \cot u\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}\left(\tan u + 4\int \frac{du}{\operatorname{sen} 2u} - \cot u\right) + C$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v = 2u;\ dv = 2du;\ du = \frac{dv}{2}}$

$$= \frac{1}{5}\left(\tan u + 4\int \frac{1}{\operatorname{sen} v}.\frac{dv}{2} - \cot u\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}\left(\tan u + 2\int \csc v - \cot u\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}(\tan u + 2\ln|\csc v - \cot v| - \cot u) + C$$

$$= \frac{1}{5}(\tan u + 2\ln|\csc 2u - \cot 2u| - \cot u) + C$$

$$= \frac{1}{5}(\tan 5x - \cot 5x + 2\ln|\csc 10x - \cot 10x|) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{5}(\tan 5x - \cot 5x + 2\ln|\csc 10x| - 2\ln|\cot 10x|) + C}$

$\boldsymbol{51.-Resolver}$: $\boldsymbol{\int \frac{\tan^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx}$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \sqrt{x};\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx;\ dx = 2\sqrt{x}\,du}$

$$= \int \frac{\tan^3 u}{\sqrt{x}}.2\sqrt{x}\,du = 2\int \tan^3 u\ du$$

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2x = sec^2x - 1$:

$$= 2\int \tan^2 u \tan u\ du = 2\int (\sec^2 u - 1)\tan u\ du$$

$$= 2\int \sec^2 u \tan u - \tan u\ du$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v = \tan u;\ dv = \sec^2 u\,du;\ du = \frac{dv}{\sec^2 u}}$

$$= 2\left(\int \sec^2 u \tan u\,du - \int \tan u\ du\right)$$

$$= 2\left(\int \sec^2 u.v.\frac{dv}{\sec^2 u} - \int \tan u\ du\right) = 2\left(\int v\ dv - \int \tan u\, du\right)$$

$$= 2\left(\frac{v^2}{2} - \int \tan u\, du\right) = 2\left(\frac{v^2}{2} + \ln|\cos u|\right) + C$$

$$= v^2 + 2\ln|\cos u| + C = \tan u + 2\ln|\cos u| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{\tan\sqrt{x} + 2\ln|\cos\sqrt{x}| + C}$

52.−*Resolver*: $\displaystyle\int \tan^2 5x\, dx$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 5x;\ du = 5dx;\ dx = \frac{du}{5}}$

$$= \int \tan^2 u \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \tan^2 u\, du$$

Se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x = sec^2 x - 1$:

$$= \frac{1}{5}\int(\sec^2 u - 1)\, du = \frac{1}{5}\int \sec^2 u\, du - \int du$$

$$= \frac{1}{5}(\tan u - u) + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{\frac{1}{5}(\tan 5x - 5x) + C}$

53.− *Resolver*: $\displaystyle\int \tan^5\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \frac{\theta}{2};\ du = \frac{d\theta}{2};\ d\theta = 2\ du}$

$$= 2\int \tan^5(u)\, du =$$

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2 x = sec^2 x - 1$:

$$= 2\int \tan^3 u \tan^2 u\, du = 2\int \tan^3 u\,(\sec^2 u - 1)du =$$

$$2\int(\tan^3 u \sec^2 u - \tan^3 u)\, du$$

$$= 2\int \tan^3 u \sec^2 u\, du - 2\int \tan^2 u \tan u\, du$$

$$= 2\int \tan^3 u \sec^2 u\, du - 2\int (\sec^2 u - 1)\tan u\, du$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{v = \tan u;\ dv = \sec^2 u\, du;\ du = \frac{dv}{\sec^2 u}}$$

$$= 2\int \tan^3 u \sec^2 u\, du - 2\int \sec^2 u \tan u\, du + 2\int \tan u\, du$$

$$= 2\int v^3 \sec^2 u \frac{dv}{\sec^2 u} - 2\int \sec^2 u\,.\,v.\frac{dv}{\sec^2 u} + 2\int \tan u\, du$$

$$= 2\int v^3 dv - 2\int v\, dv + 2\int \tan u\, du$$

$$= 2\left(\frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2} - \ln|\cos u|\right) + C$$

$$= 2\left(\frac{\tan^4 u}{4} - \frac{\tan^2 u}{2} - \ln|\cos u|\right) + C$$

$$= 2\left(\frac{\tan^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4} - \frac{\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} - \ln\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\tan^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4} - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\ln\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| + C$$

$$\mathbf{54.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

Solución.-

Se multiplica la fracción por la conjugada de la siguiente manera:

$$= \int \frac{dx}{1+\cos x}.\frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \int \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx$$

Se descompone la fracción de la siguiente manera:

$$= \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}dx - \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \int \csc^2 x\, dx - \int \frac{\cos x}{u^2}.\frac{du}{\cos x}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u = \operatorname{sen}\ x;\ du = \cos x\, dx;\ dx = \frac{du}{\cos u}}$$

$$= \int \csc^2 x\, dx - \int \frac{du}{u^2} = \int \csc^2 x\, dx - \int u^{-2}$$

$$= -\cot x - \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\cot x + u^{-1} + C = -\cot x + \frac{1}{u} + C$$

$$= -\cot x + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C = -\cot x + \csc x + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\csc x - \cot x + C}$

55.-*Resolver*: $\int \cot^3 t \, dt$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2 x = csc^2 x - 1$:

$$= \int \cot^2 t \cot t \, dt = \int (\csc^2 t - 1) \cot t \, dt$$

$$= \int (\csc^2 t \cot t - \cot t) \, dt = \int \csc^2 t \cot t \, dt - \int \cot t \, dt$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \cot t;\ du = -\csc^2 t \, dt;\ dt = -\frac{du}{\csc^2 t}}$

$$= \int \csc^2 t \, u . -\frac{du}{\csc^2 t} - \int \cot t \, dt = -\int u \, du - \int \cot t \, dt$$

$$= -\frac{u^2}{2} - \ln|\operatorname{sen} t| + C =$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\frac{\cot^2 t}{2} - \ln|\operatorname{sen} t| + C}$

56.-*Resolver*: $\int \cot^3 2t \, dt$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 2t;\ du = 2dt;\ dt = \frac{du}{2}}$

$$= \int \cot^3 u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cot^3 u \, du$$

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2 x = csc^2 x - 1$:

$$=\frac{1}{2}\int \cot^2 u \cot u\, du=\frac{1}{2}\int (\csc^2 u-1)\cot u\, du$$

$$=\frac{1}{2}\int (\csc^2 u \cot u-\cot u)\, du=\frac{1}{2}\int \csc^2 u \cot u\, du-\frac{1}{2}\int \cot u\, du$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v=\cot u;\ dv=-\csc^2 u\, du}$; $\boldsymbol{du=-\frac{dv}{\csc^2 u}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\int \csc^2 u.\, v\left(-\frac{dv}{\csc^2 u}\right)-\ln|\operatorname{sen} u|\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\int v\, dv-\ln|\operatorname{sen} u|\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{2}-\ln|\operatorname{sen} u|\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cot^2 u}{2}-\ln|\operatorname{sen} u|\right)+C$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\frac{\cot^2 2t}{4}-\frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} 2t|+C}$

57.− *Resolver*: $\boldsymbol{\int \cos^3 x\, dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica:

$$=\int \cos^2 x \cos x\, dx=$$

$$=\int (1-sen^2 x)\cos x\, dx=\int \cos x-sen^2 x\, cosx\ dx=$$

$$=\int \cos x\, dx-\int sen^2 x \cos x\, dx=$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=sen\ x;\ du=cos\ x\ dx}$

$$=\ sen\ x-\int u^2\, du=sen\ x-\frac{u^3}{3}+C$$

Respuesta: $\boldsymbol{sen\ x-\frac{sen^3 x}{3}+C}$

58.−*Resolver*: $\int \cos^5 \theta\, d\theta$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= \int (cos^2 \theta\,)^{\,2}\, cos\theta\, d\theta$$

$$= \int (1 - sen^2\theta)^2 cos\theta\, d\theta = \int (1 - 2\, sen^2\theta + sen^4\theta) cos\theta\, d\theta =$$

$$= \int \cos\theta - 2\, sen^2\theta\, cos\theta + sen^4\theta\, cos\theta\, d\theta =$$

$$= \int \cos\theta\, d\theta - 2\int sen^2\theta\, cos\theta\, d\theta + \int sen^4\theta\, cos\theta\, d\theta =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\,\theta;\ du = cos\,\theta\, d\theta}$

$$= sen\theta - 2\int u^2\, du + \int u^4\, du = sen\,\theta - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

***Respuesta*:** $\boldsymbol{sen\,\theta - 2\frac{sen^3\theta}{3} + \frac{sen^5\theta}{5} + C}$

59.−*Resolver*: $\int sen^3 4x \cos^2 4x\, dx$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = 4x;\ \ da = 4\, dx}$

$$= \frac{1}{4}\int sen^3 a\ \cos^2 a\, da =$$

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 a)\, sen\, a \cos^2 a\ \ da =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{b = \cos a;\ db = -sen\ a\, da}$

$$= -\frac{1}{4}\int (1 - b^2) b^2\, db = -\frac{1}{4}\left(\int b^2\, db - \int b^4\, db\right) =$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{b^5}{5}\right)+C=-\frac{b^3}{12}+\frac{b^5}{20}+C=$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{cos^3 4x}{12}+\frac{cos^5 4x}{20}+C}$

$\mathbf{60.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen^6\theta\, d\theta}$

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométricas $Sen^2(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$$=\int (sen^2\theta)^3\, d\theta=\int\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^3 d\theta$$

$$=\int\frac{(1-3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta-\cos^3 2\theta)}{8}\, d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int d\theta-3\int\cos 2\theta\, d\theta+3\int\cos^2 2\theta-\int\cos^3 2\theta\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{3}{2}\ sen\ 2\theta+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1+\cos 2(2\theta)}{2}\right)d\theta\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int(1-sen^2u)\cos u\, du\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{3}{2}\ sen\ 2\theta+\frac{3}{2}*\frac{1}{2}\left(\int d\theta+\int\cos 4\theta\, d\theta\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\int\cos u\, du-\int\cos u\ sen^2u\, du\right)\right)=$$

$$\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{3}{2}\ sen\ 2\theta+\frac{3}{4}\left(\theta+\frac{1}{4}\int\cos u\ du\right)-\frac{1}{2}\left(sen\ 2\theta-\int u^2\, du\right)\right)$$

$$\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{3}{2}\ sen\ 2\theta+\frac{3}{4}\theta+\frac{3}{16}sen\ 4\theta-\frac{1}{2}\ sen\ 2\theta+\frac{sen^3 2\theta}{6}\right)+C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{8}\theta-\frac{3}{16}\ sen\ 2\theta+\frac{3}{32}\theta+\frac{3}{128}sen\ 4\theta}$
$\boldsymbol{-\frac{1}{16}\ sen\ 2\theta+\frac{sen^3 2\theta}{48}+C}$

$$61.-\boldsymbol{Resolver}: \int (\boldsymbol{sen^3 2t})\sqrt{\mathbf{cos\,2}\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{dt}$$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{a = 2t;\ da = 2\ dt}$

$$= \int sen^3\ 2t\ (\cos 2t)^{1/2}\ dt = \frac{1}{2}\int sen^3 a\ (\cos a)^{1/2}\ da =$$

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica:

$$= \frac{1}{2}\left(\int (1-\cos^2 a)(sen\ a)(\cos a)^{1/2}\ da\right)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = \cos a;\ du = -sen\ a}$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int (1-u^2)(u)^{\frac{1}{2}}\ du\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{cos^{3/2}}\ \mathbf{2}\boldsymbol{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\mathbf{cos^{7/2}}\ \mathbf{2}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{C}$$

$$62.-\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{cos\,4}\boldsymbol{y}\ \mathbf{cos}\,\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{dy}$$

Solución.-
Se aplica lo siguiente: $\boldsymbol{\int cos\,mx \cdot cos\,nx\ dx = \frac{1}{2}cos(m+n)x + \frac{1}{2}cos\ (m-n)x\ dx}$

$$= \int \frac{1}{2}\cos(4+1)\ y + \frac{1}{2}\cos(4-1)\ dy$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 5y\ dy + \frac{1}{2}\int \cos 3y\ dy =$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:
$\boldsymbol{a = 5y;\ da = 5\ dy;\ b = 3y;\ db = 3\ dy}$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{5}\int \cos a\ da + \frac{1}{2} * \frac{1}{3}\int \cos b\ db =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{sen\ 5y} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\ \boldsymbol{sen\ 3y} + \boldsymbol{C}$$

$63. -\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen\ 3t\ sen\ t\ dt}$

Solución.-

Se aplica lo siguiente: $\int \boldsymbol{sen\, mx \cdot sen\, nx\ dx = -\frac{1}{2} cos(m+n)x + \frac{1}{2} cos\ (m-n)x\ dx}$

$$= \int -\frac{1}{2}\cos(3+1)\,t + \frac{1}{2}\cos(3-1)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 4t\ \ dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt =$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a = 4t;\ da = 4\ dt;\ b = 2t;\ db = 2\ dt}$

$$= -\frac{1}{2} * \frac{1}{4}\int \cos a\ da + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\int \cos b\ db =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\frac{1}{8} sen\ 4t + \frac{1}{4}\ sen\ 2t + C}$

$64. -\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{x \cos^2 x\ sen\ x\ dx}$

Solución.-

Se encuentran los valore de u, du, v, dv, para ser reemplazados en la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = x; du = dx;\ dv = \cos^2 x\ sen\ x\ dx; v = -\frac{\cos^3 x}{3}}$ $\boldsymbol{I. por\ partes}$

$$= -x\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right) - \int -\frac{\cos^3 x}{3}\ dx = -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3}\int \cos^3 x\ dx =$$

$$= -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3}\int (1 - sen^2\ x)\cos x\ dx =$$

$$= -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3}\left(\int \cos x\ dx - \int sen^2 x \cos x\ dx\right) =$$

$$= -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3} sen\ x - \frac{1}{3}\int b^2\ d$$

$$= -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3} sen\ x - \frac{1}{3} * \frac{b^3}{3} + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{1}{3} sen\ x - \frac{sen^3 x}{9} + C}$

$65.-\boldsymbol{Resolver}: \int \tan^3 x \sec^{-1/2} x\, dx$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la tangente y se utiliza la identidad trigonométrica $tan^2x = sec^2x - 1$:

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-3/2} x \ \sec x \tan x\, dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \sec x\,;\ du = \sec x \tan x\, dx}$

$$= \int (u^2 - 1)\, \mathrm{u}^{-3/2} \ \ du = \int u^{1/2}\, du - \int u^{-3/2} \ du =$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C \ =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{2}{3}\sec^{\frac{3}{2}} x + 2\sec^{-\frac{1}{2}} x + C}$

$66.-\boldsymbol{Resolver}: \int \cot^4(2t)\ dt$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{z = 2t;\ \ dz = 2\ dt}$

$$= \frac{1}{2}\int \cot^4 z\, dz$$

Se descompone la potencia trigonométrica de la cotangente y se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2x = csc^2x - 1$:

$$= \frac{1}{2}\left(\int \csc^2 z - 1\right) \cot^2 z\, dz =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int \csc^2 z \cot^2 z\, dz - \int \cot^2 z\ dz\right) =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = \cot z\,;\ da = -\csc^2 z\ \ dz}$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int a^2\, da - \int (\csc^2 z - 1)\, dz\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{a^3}{3} - \left(\int \csc^2 z\, dz - \int dz\right)\right] =$$

$$= -\frac{cot^3 z}{6} - \frac{1}{2}(-\cot z - 2t) + C = -\frac{cot^3 2t}{6} + \frac{1}{2}\cot 2t + t + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{cot^3 2t}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{cot}\,\mathbf{2}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{67}. -\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{tan}^{-3} \boldsymbol{x}\, \mathbf{sec}^4 \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la secante y se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2 x = 1 + tan^2 x$:

$$= \int \tan^{-3} x\,(1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{tan}\, \boldsymbol{x}\,;\ \boldsymbol{du} = \mathbf{sec}^2\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx}$

$$\int \mathrm{u}^{-3}\ (1 + u^2)\, du = \int u^{-3} + u^{-1}\, du = \int u^{-3}\, du + \int u^{-1} du =$$

$$= -\frac{u^{-2}}{2} + \ln u + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{tan^{-2}}}{\mathbf{2}} + \mathbf{ln}\,|\,\mathbf{tan}\, \boldsymbol{x}\,| + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{68}. -\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{tan}^{-3/2} \boldsymbol{x}\, \mathbf{sec}^4 \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la secante y se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2 x = 1 + tan^2 x$:

$$= \int \tan^{-3/2} x\,(1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{tan}\, \boldsymbol{x}\,;\ \boldsymbol{du} = \mathbf{sec}^2\, \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{dx}$

$$= \int \mathrm{u}^{-3/2}\ (1 + u^2)\, du = \int u^{-3/2} + u^{1/2}\, du =$$

$$= \int u^{-3/2}\, du + \int u^{1/2} du = \frac{u^{-1/2}}{-1/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\mathbf{2}\,\mathbf{tan}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{tan}^{3/2}\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

69.−*Resolver*: $\int \sec^4 4x\, dx$

Solución.-
Se realizan los siguientes cambios de variables:
$a = 4x$; $da = 4\, dx$; $b = tan\ a$; $db = \sec^2 a\, da$

$$\frac{1}{4}\int \sec^2 a\ .\sec^2 a\ da$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+\tan^2 a)\sec^2 a\, da = \frac{1}{4}\int 1 + b^2\, db =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int db + \int b^2\, db\right) = \frac{1}{4}\left(b + \frac{b^3}{3}\right) + C$$

***Respuesta*:** $\frac{1}{4}\tan 4x + \tan^3\frac{4x}{3} + C$

70.−*Resolver*: $\int \tan^2 5x\, dx$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$a = 5x$; $da = 5\, dx$

$$= \frac{1}{5}\int (\sec^2 a - 1)\ da =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int \sec^2 a\, da - \int da\right) = \frac{1}{5}(\tan a - a) + C$$

***Respuesta*:** $\frac{1}{5}\tan 5x - 5x + C$

71.−*Resolver*: $\int \frac{\cos^3 x}{sen^4 x}\ dx$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$u = sen\ x$; $du = \cos x\ dx$

$$= \int sen^{-4} x \cos^3 x\ dx = \int (1 - sen^2\ x)\cos x\, sen^{-4}\ x\ \ dx =$$

$$= \int (1-u^2\ )u^{-4}\ du = \int u^{-4}\ du - \int u^{-2}\ du =$$

$$= -\frac{u^{-3}}{3} + \frac{u^{-1}}{1} + C \quad = \quad -\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{sen^3 x}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\ \boldsymbol{sen\ x}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{72.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \mathbf{cot^2}\ \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se utiliza la identidad trigonométrica $cot^2 x = csc^2 x - 1$:

$$= \int (\csc^2 x - 1)dx = \int \csc^2 x\ dx - \int dx$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\mathbf{cot}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{73.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen}\ \mathbf{10}\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{sen}\ \mathbf{15}\boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a} = \mathbf{25}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{da} = \mathbf{25}\ \boldsymbol{dx};\ \boldsymbol{b} = -\mathbf{5}\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{db} = -\mathbf{5}\ \boldsymbol{dx}$

$$= \int -\frac{1}{2}\cos(10+15)\,x + \frac{1}{2}\cos(10-15)\,x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cos 25x\ dx + \frac{1}{2}\int \cos(-5x)dx =$$

$$= -\frac{1}{50}\int \cos a\ da - \frac{1}{10}\int \cos b\ db =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}\ \boldsymbol{sen}\ \mathbf{25}\boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{sen}\ (-\mathbf{5}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{74.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{sen^4}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{cos^2}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\mathbf{2}}\right)\ \boldsymbol{dw}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{w}}{\mathbf{2}};\ \boldsymbol{da} = \mathbf{1/2}\ \boldsymbol{dw}$

$$= 2\int sen^4 a \cos^2 a\ da =$$

Se descompone la potencia trigonométrica y se utiliza la identidad trigonométrica $Sen^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $Cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$= 2\int \left(\frac{1-\cos 2a}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2a}{2}\right)\ da =$$

$$= 2\int \frac{1}{4}(1-\cos 2a)^2 * \frac{1}{2}(1+\cos 2a)da =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2a + \cos^2 2a + \cos 2a - 2\cos^2 2a + \cos^3 2a)\ da$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos^3 2a - \cos^2 2a - \cos 2a + 1)\ da =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{b = 2a;\ db = 2\ da}$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\int \cos^3 b\ db - \frac{1}{2}\int \cos^2 b\ db - \frac{1}{2}\int \cos b\ db + \int da\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\int (1 - sen^2 b)cosb\ db\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\int (1+\cos 2b)db - \frac{1}{2}sen\ 2a + a\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(sen\ b - \int u^2 du\right) - \frac{1}{4}\left(b + \frac{1}{2}\int \cos c\ dc\right) - \frac{1}{2}\ sen\ w + \frac{w}{2}\right] =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{c = 2b;\ dc = 2\ db}$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ sen\ w - \frac{1}{2}\left(\frac{sen^3 b}{3}\right) - \frac{1}{4}w - \frac{1}{8}sen\ 2w - \frac{1}{2}sen\ w + \frac{w}{2}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}w - \frac{1}{8}\ sen\ 2w - \frac{1}{6}\ sen^3\ w\right] + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{8}w - \frac{1}{32}\ sen\ 2w - \frac{1}{24}\ sen^3\ w + C}$

75.−*Resolver*: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{sen\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}}$

Solución.-

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a = \frac{x}{2};\ da = \frac{dx}{2};\ \ u = \cos a;\ du = -sen\ a}$

$$= \int \left(sen\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}\right)^{-1}\ dx = 2\int (sen\ a\cos^3 a)^{-1}\ da =$$

$$= -2\int u^{-3}\ du = -2\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C = \cos^{-2} a + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2}\,\dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}}+\boldsymbol{C}$

$\mathbf{76.}-\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{Sen^2(x)Cos^3(x)dx}$

Solución.-
Se descompone la potencia trigonométrica del seno y se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica:

$$=\int Sen^2(x)Cos^2(x)\,\mathrm{Cos}(x)\,dx$$

$$=\int Sen^2(x)\big(1-Sen^2(x)\big)\,\mathrm{Cos}(x)\,dx$$

$$=\int Sen^2(x)\,\cos(x)\,dx-\int Sen^4(x)\,\mathrm{Cos}(x)\,dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{sen(x)};\ \boldsymbol{du}=\mathbf{cos}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$

$$=\int u^2du-\int u^4du=\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\dfrac{\left(\boldsymbol{Sen(x)}\right)^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}-\dfrac{\left(\boldsymbol{Sen(x)}\right)^{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}+\boldsymbol{C}$

$\mathbf{77.}-\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{Sen^3}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{Cos^5}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{dy}$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}};\ \boldsymbol{du}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{dy}$

$$=2\int Sen^3(u)Cos^5(u)du=$$

Se descompone la potencia trigonométrica del seno y se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica:

$$=2\int Sen\,(u)Sen^2(\,u)Cos^5(u)du$$

$$=2\int\big(1-Cos^2(u)\big)Sen(u)Cos^5\,(u)du$$

$$=2\int Sen(u)Cos^5\,(u\,)du-2\int Cos^2\,(u)Sen(u)Cos^5\,(u)du$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \cos u\, ;\, du = -sen\, u\, du}$

$$= -2\int u^5\, du + 2\int u^7\, du = -\frac{2}{6}(Cos(u)\,)^6 + \frac{2}{8}(\mathrm{Cos}(u)\,)^8 + C$$

$$= -\frac{(\mathrm{Cos}(u)\,)^6}{3} + \frac{(\mathrm{Cos}(u))^8}{4} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\left(\boldsymbol{Cos}(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{2}})\right)^{\boldsymbol{6}}}{\boldsymbol{3}} + \frac{\left(\boldsymbol{Cos}(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{2}})\right)^{\boldsymbol{8}}}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{78.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{Sen}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}\right)}{\boldsymbol{Sen}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica la identidad trigonométrica del seno de la suma de dos funciones:

$$= \int \frac{Sen(x)Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + Sen\left(\frac{\pi}{4}\right)Cos(x)}{Sen(x)Cos(x)}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{Senx + \ Cos(x)}{Sen(x)Cos(x)}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{Sen(x)}{Sen(x)Cos(x)}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{Cos(x)}{Sen(x)Cos(x)}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int Sec(x)dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int Csc(x)dx$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\sqrt{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2}}\ln|\boldsymbol{Sec}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{Tan}(\boldsymbol{x})| + \frac{\sqrt{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2}}\ln|\boldsymbol{Csc}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{Ctg}(\boldsymbol{x})| + \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{79.-\ Resolver}: \int \boldsymbol{Cos}^{6}(\boldsymbol{3x})\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 3x; du = 3dx}$

$$= \frac{1}{3}\int Cos^6(u)du$$

Se descompone la potencia trigonométrica del Coseno y se utiliza la identidad trigonométrica $Cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{3}\int (cos^2(u))^3\, du = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1 + Cos\, 2u}{2}\right)^3 du =$$

$$= \frac{1}{24}\int 1 + 3\, Cos\, 2u + 3\, (Cos\, 2u)^2 + (Cos\, 2u)^3\, du =$$

$$= \frac{1}{24}[\int du + 3\int Cos\, 2u\, du$$

$$+ 3\int \left(\frac{1 + Cos\, 4u}{2}\right) du$$

$$+ \int (1 - (Sen\, 2u)^2)\, Cos\, 2u\, du\,] =$$

$$= \frac{1}{24}\, u + \frac{1}{16} Sen\, 2u + \frac{1}{16} u + \frac{1}{64}\, Sen\, 4u + \frac{1}{48} Sen\, 2u$$

$$- \frac{1}{144}(Sen\, 2u)^3 + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{5x}{16} + \frac{1}{12} Sen\, 6x + \frac{1}{64} Sen\, 12x}$

$$\boldsymbol{- \frac{1}{144}\, (Sen\, 6x)^3 + C}$$

$\mathbf{80.-}$ ***Resolver***: $\boldsymbol{\int Sec^3(4m) dm}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica de la secante y se utiliza la identidad trigonométrica $sec^2x = 1 + tan^2x$:

$$= \int \left(1 + Tan^2(4m)\right) Sec^3(4m) dm$$

$$= \int sec^3(4m) dm + \int Tan^2(4m)\, Sec^3(4m)\, dm$$

Se encuentran los valores de u, du, v, dv, para reemplazarlos en la fórmula de la integración por partes:

$\boldsymbol{u = Sec(4m);\ du = 4Sec(4m)Tan(4m);\ dv = \int Sec^2(4m)}$

$\boldsymbol{v = \frac{Tan\ 4m}{4}}$

$$= \frac{Tan(4m)Sec(4m)}{4} - \int \frac{4\, Sec(4m)Tan(4m)Tan(4m)}{4} dm$$

$$= \frac{Tan(4m)Sec(4m)}{4} - \int Sec(4m)\, Tan^2(4m) dm$$

$$= \frac{Tan(4m)\, Sec(4m)}{4} - \int Sec^3(4m)\, dm + \int Sec(4m)\, dm$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\frac{1}{8}[\boldsymbol{Sec(4m)Tan(4m)} + \ln(\boldsymbol{sec4m} + \boldsymbol{Tan(4m)})] + \boldsymbol{C}$

$\mathbf{81.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{Sen^5(y)\sqrt[3]{Cos\, y}dy}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica del Seno y se utiliza la identidad trigonométrica pitagórica

$$= \int sen^4(y)cos^{\frac{1}{3}}(y)sen(y)dy$$

$$= \int \left(1 - cos^2(y)\right)^2 cos^{\frac{1}{3}}sen(y)dy$$

$$= \int (1 - 2cos^2(y) + (cos^2(y))^2)cos^{\frac{1}{3}}(y)sen(y)dy$$

$$= \int cos^{\frac{1}{3}}(y)sen(y) - 2\int cos^{\frac{7}{3}}(y)sen(y) + \int cos^{\frac{13}{3}}(y)sen(y)dy$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{cos}(\boldsymbol{y})$; $\boldsymbol{du} = -\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{y})$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $-\frac{3}{4}\boldsymbol{cos^{\frac{4}{3}}(y)} + \frac{3}{5}\boldsymbol{cos^{\frac{10}{3}}(y)} - \frac{3}{16}\boldsymbol{Cos^{\frac{16}{3}}} + \boldsymbol{C}$

$\mathbf{82.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{ds}}{\sqrt{\boldsymbol{Sen(s)Cos^3(s)}}}$

Solución.-

$$= \int \frac{ds}{Cos(s)\sqrt{Sen\, s\, Cos\, s}}$$

$$= \int \frac{sec(s)ds}{\sqrt{sen(s)cos(s)}} = \int \frac{sec(s)sec(s)ds}{\sqrt{sec^2(s)sen(s)cos(s)}}$$

$$\int \frac{sec^2(s)}{\sqrt{\frac{1}{cos^2(s)}sen(s)cos(s)}}ds = \int \frac{sec^2(s)ds}{\sqrt{tan(s)}}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \mathbf{tan}(\boldsymbol{s})$; $\boldsymbol{du} = \boldsymbol{sec^2(s)}$

$$= \int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{2}\left(\sqrt{\mathbf{tan}(\boldsymbol{s})}\right) + \boldsymbol{C}$

$$83.-\boldsymbol{Resolver}: \int \left(\boldsymbol{Tan}^3\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}\right) + \boldsymbol{Tan}^4\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}\right)\right)\boldsymbol{dx} =$$

Solución.-

Primero se resuelve la integral de $\boldsymbol{Tan^3}\left(\frac{x}{3}\right)$, *se descompone la potencia trigonométrica y se aplica identidad:*

$$= \int \boldsymbol{Tan^3}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}\right)\boldsymbol{dx};\ = \int (Sec^2\left(\frac{x}{3}\right) - 1)\,Tan(\frac{x}{3})dx$$

$$= \int Sec^2\left(\frac{x}{3}\right)Tan\left(\frac{x}{3}\right)dx - \int Tan\left(\frac{x}{3}\right)dx$$

$$= \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\,\boldsymbol{Tan^2}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}\right) - \boldsymbol{3}\ \mathbf{ln}\left|\boldsymbol{Cos}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}\right)\right|$$

Segundo se resuelve la integral de $\boldsymbol{Tan^4}\left(\frac{x}{4}\right)$, *se descompone la potencia trigonométrica y se aplica identidad:*

$$= \int \boldsymbol{Tan^4}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}\right)\boldsymbol{dx};\ = \int (Sec^2\left(\frac{x}{4}\right) - 1)\,Tan^2\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \int Sec^2\left(\frac{x}{4}\right)Tan^2\left(\frac{x}{4}\right)dx - \int Tan^2\left(\frac{x}{4}\right)dx$$

$$= \frac{4}{3}\,Tan^3\left(\frac{x}{4}\right) - 4\int (Sec^2\left(\frac{x}{4}\right) - 1)dx$$

$$= \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\,\boldsymbol{Tan^3}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}\right) - \boldsymbol{4}\,\boldsymbol{Tan}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}\right) + \boldsymbol{4}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{4x} + \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Tan}^2\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}\right) + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{Tan}^3\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}\right) - \boldsymbol{4}\ \boldsymbol{Tan}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}\right)$$
$$- \boldsymbol{3}\ \mathbf{ln}\left|\boldsymbol{Cos}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{3}}\right)\right| + \boldsymbol{C}$$

$$84.-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{Cos}(\boldsymbol{ax} - \boldsymbol{b})\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = 2ax; du = 2a\ dx; v = 2bx; dv = 2b\ dx}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2a}\int \cos u\ du\ + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2b}\int \cos v\ dv$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{sen\ 2ax}}{\boldsymbol{4a}} + \frac{\boldsymbol{sen\ 2bx}}{\boldsymbol{4b}} + \boldsymbol{C}$$

$\mathbf{85.-}\boldsymbol{Resolver}\text{: } \displaystyle\int \boldsymbol{Sen(10x)Sen(15x)dx}$

Solución.-

$$= \frac{1}{2}\int \big(Cos(5x) - Cos(25x)\big)dx$$

$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } \displaystyle\boldsymbol{\frac{Sen(5x)}{10} - \frac{Sen(25x)}{50} + C}$

$\mathbf{86.-}\ \boldsymbol{Resolver}\text{: } \displaystyle\int \boldsymbol{Sen(wt)Sen(\ wt + p)dt}$

Solución.-

$$= \frac{1}{2}\int \text{Cos}(-p)\ \ - \text{Cos}(2wt + p)\,dt$$

$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } \displaystyle\boldsymbol{\frac{t\ Cos(p)}{2} - \frac{Sen(2wt + p)}{4w} + C}$

$\mathbf{87.-}\ \boldsymbol{Resolver}\text{: } \displaystyle\int \boldsymbol{Cos\left(\frac{x}{2}\right)Cos\left(\frac{x}{3}\right)dx}$

Solución.-

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = \frac{x}{6}dx;\ du = \frac{1}{6}dx;\ v = \frac{5x}{6}dx;\ du = \frac{5}{6}dx}$

$$\frac{1}{2}\int (Cos(\frac{x}{6}) + Cos(\frac{5x}{6})dx\ = \frac{1}{2}\left(6\,Sen\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{6}{5}Sen\left(\frac{5}{6}x\right)\right) =$$

$\boldsymbol{Respuesta}\text{: } \displaystyle\boldsymbol{3Sen\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{3}{5}Sen\ \left(\frac{5x}{6}\right) + C}$

$\mathbf{88.-}\ \boldsymbol{Resolver}\text{: } \displaystyle\int \boldsymbol{Cos(x)Cos^2(3x)dx}$

Solución.-

Se descompone la potencia trigonométrica del Coseno y se utiliza la identidad trigonométrica $Cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$= \int Cos(x)\left(\frac{1 + Cos(6x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \big(Cos(x) + Cos(x)Cos(6x)\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int Cos(x)dx + \int \big(Cos(5x) + Cos(7x)\big)dx\right)$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\boldsymbol{Sen(x)}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{Sen(5x)}}{\mathbf{10}} + \frac{\boldsymbol{Sen(7x)}}{\mathbf{14}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{89.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{Sen}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)\boldsymbol{Cos}\left(\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right)\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

$$= \frac{1}{2}\int \left(Sen(x) + Sen\left(-\frac{x}{3}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{Cos}(x) + 3Cos\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{Cos(x)}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Cos}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{90.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{Sen(x)Sen(2x)Sen(3x)dx}$$

Solución.-

$$= \frac{1}{2}\int (Sen(x)\,Cos(x) - Sen(x)Cos(5x))dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \big(Sen(2x) - \mathrm{Sen}(4x) + \mathrm{Sen}\ (6x)\big)dx$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\boldsymbol{Cos(2x)}}{\mathbf{8}} - \frac{\boldsymbol{Sen(4x)}}{\mathbf{16}} + \frac{\boldsymbol{Sen(6x)}}{\mathbf{24}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{91.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{Sen(x)}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{Sen(x)}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se multiplica la fracción por la conjugada de la siguiente manera:

$$\int \frac{Sen(x)\big(1 + Sen(x)\big)}{1 - Sen^2(x)}$$

$$= \int \frac{Sen(x) + Sen^2(x)}{1 - Sen^2(x)} = \int \frac{Sen(x)}{Cos^2(x)}dx - \int \frac{Sen^2(x)}{Cos^2(x)}dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Cos(x)}; \boldsymbol{du} = -\boldsymbol{Sen(x)}$

$$= -\int \frac{1}{u^2}du + \int\ Tan^2(x)dx = \frac{1}{u} + \int (Sec^2(x) - 1)dx$$

$$= \frac{1}{Cos(x)} + Tan(x) - x + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{Sec(x)} + \boldsymbol{Tan(x)} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$

$$\mathbf{92.-Resolver:}\int \frac{\boldsymbol{Sen(y)}}{\boldsymbol{(1-Cos(y))^3}}\,\boldsymbol{dy}$$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = 1 - Cos(y); du = Sen(y)dy}$

$$= \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{(1-Cos(y))^2}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{93.-\ Resolver:}\int \frac{\boldsymbol{Sen(2x)}}{\boldsymbol{1+Sen^2(x)}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-
Se reemplaza el numerador por la identidad Sen $2x = 2Sen(x)\,Cos(x)$:

$$= \int \frac{2Sen(x)Cos(x)}{1+Sen^2(x)}\,dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = 1 + Sen^2 x; du = 2\ Sen\ x\ Cos\ x}$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{ln}\left|\boldsymbol{1 + Sen^2(x)}\right| + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{94.-Resolver:}\int \boldsymbol{Sec^3\frac{m}{3}\ dm}$$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u = \frac{m}{3}; du = \frac{1}{3}dm;}$

$$= 3\int Sec^3 u\,du = 3\int Sec^2 u\ Sec\,u\ du$$

Se encuentran los valores de u, du, v, dv, para ser reemplazados en la fórmula de la integración por partes:
$\boldsymbol{v = Sec\ u; dv = Sec\ u\,Tan\ u; dw = Sec^2\ u; w = Tan\ u}$

$$= Sec\,u\,Tan\,u - \int Tan^2 u\,Sec\,u\,du$$

$$= Sec\,u\,Tan\,u - \int (Sec^2 u - 1)\,\mathrm{Sec}\,u\,du =$$

$$= 3\,Sec\,u\,Tan\,u - 3\int Sec^3 u\;du\; + 3\int Sec\,u\,du$$

$$= \frac{3}{4}\;Sec\,u\,Tan\,u - \frac{3}{4}\ln\,(\mathrm{Sec}\,u + Tan\,u) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{3}{4}\;Sec\;\frac{m}{3}\;Tan\;\frac{m}{3} - \frac{3}{4}\ln\;(\mathrm{Sec}\frac{m}{3} + Tan\;\frac{m}{3})\;+C}$

$\boldsymbol{95. - Resolver}$: $\boldsymbol{\int Tan^5\left(\frac{s}{2}\right)Sec^4\left(\frac{s}{2}\right)\;ds}$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \frac{s}{2};\; du = \frac{1}{2}\,ds;}$

$$= 2\int Tan^5 u\; Sec^4 u\,du\; =$$

Se descompone la potencia trigonométrica de la Secante y se utiliza la identidad trigonométrica $Sec^2(x) = 1 + \;tan^2(x)$

$$= 2\int Tan^5 u\;Sec^2 u\,Sec^2 u\,du\; = 2\int Tan^5 u\;(1 + Tan^2 u)Sec^2 u\;du$$

$$= 2\int Tan^5 u\;Sec^2 u\,du + 2\int Tan^7 u\;Sec^2 u\,du$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{v = Tan\;u;\; dv = Sec^{\,2} u\;du;}$

$$= 2\int v^5\;dv + 2\int v^7\;dv = \frac{v^6}{3} + \frac{v^8}{4} + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{Tan^6\left(\frac{s}{2}\right)}{3} + \frac{Tan^8\left(\frac{s}{2}\right)}{4} + C}$

$\boldsymbol{96. - Resolver}$: $\boldsymbol{\int \frac{Cos^3(w)}{Sen^5(w)}\,dw}$

Solución.-

Se descompone el denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{Cos^3(w)}{Sen^3(w)}\frac{1}{Sen^2(w)}dw\; =$$

$$= \int Cot^{\,3}\,w\;Csc^2\,w\,dw = \;-\int u^3\,du = \;-\frac{u^4}{4} + C$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = Cot\ w\ ; du = -\ Csc^2\ w\ dw;}$

$$\boldsymbol{Respuesta: -\frac{Cot^4\ w}{4} + C}$$

$$\boldsymbol{97.- Resolver: \int \frac{dx}{\sqrt{Tan\ x}}}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{t = Tan\ x\ ; x = Tan^{-1}\ t;\ dx = \frac{1}{t^2+1} dt; u = \sqrt{t};\ u^2 = t; 2\ u\ du = dt}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}\ (t^2+1)} dt = \int \frac{2\ u\ du}{u\ (u^4+1)} = 2 \int \frac{du}{(u^4+1)} =$$

$$= 2 \int \frac{du}{(u^2)^2+1)} = 2\ Tan^{-1} u^2 = 2\ Tan^{-1}\ t =$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 2\ Tan^{-1}\ (Tan\ x) + C}$$

$$\boldsymbol{98.- Resolver: \int \frac{Cos\ m}{1 + Cos\ m} dm}$$

Solución.-

Se multiplica la fracción por la conjugada de la siguiente manera:

$$= \int \frac{Cos\ m}{1 + Cos\ m} \frac{1 - Cos\ m}{1 - Cos\ m} dm$$

$$= \int \frac{Cos\ m - Cos^2 m}{1 - Cos^2 m} dm = \int \frac{Cos\ m - Cos^2 m}{Sen^2 m} dm$$

$$= \int \frac{Cos\ m}{Sen^2 m} dm - \int \frac{Cos\ ^2 m}{Sen^2 m} dm$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = Sen\ m\ ; du = Cos\ m\ dm}$

$$= \int \frac{du}{u^2} - \int Cot^2\ m\, dm = \frac{u^{-1}}{-1} - Cot\ m - m + C$$

$$= -\frac{1}{Sen\ m} - Cot\ m - m + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta: -Csc\ m - Cot\ m - m + C}$$

$$\mathbf{99.- } \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{1} + \boldsymbol{Tan\ x\ dx}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{Tan\ x}}$$

Solución.-

Se aplica la siguiente identidad y se realiza el respectivo cambio de variable:

$$\boldsymbol{Tan\ (s+t) = \frac{Tan\ s + Tan\ t}{1 - Tan\ s\ Tan\ t}; u = \frac{\pi}{4} + x; du = dx}$$

$$\int \frac{Tan\ 45° + Tan\ x}{1 - Tan\ 45°\ Tan\ x} dx$$

$$= \int Tan\ \left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx = \int Tan\, u\, .\, du = -\ln(Cos\, u) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\ln\left(\boldsymbol{Cos}\ \left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{x}\right)\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{100.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{Sen^5\ x\ Cos^5\ x}} =$$

Solución.-

Se aplica la siguiente identidad trigonométrica:

$$\boldsymbol{Sen\ 2x = 2\ Sen\ x\ Cos\ x; u = 2x, du = 2\ dx}$$

$$= 32 \int \frac{dx}{(Sen\ 2x)^5} = \ = 32 \int (Csc\ 2x)^5 dx =$$

$$= 16 \int (Csc\, u)^5 du = \ = 16 \left[-\frac{1}{4}\ Csc^3 u\ Cot\, u + \frac{3}{4} \int Csc^3 u\, du\right]$$

$$= -4\ Csc^3 u\ Cot\ u + 12\ \left[-\frac{1}{2} Csc\ u\ Cot\ u + \frac{1}{2} \ln(Csc\ u - Cot\ u\ )\right] + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\mathbf{4}\ \boldsymbol{Csc^3 2x\ Cot\ 2x} - \mathbf{6}\ \boldsymbol{Csc\ 2x\ Cot\ 2x}$$
$$+ \mathbf{6}\ \ln(\boldsymbol{Csc\ 2x - Cot\ 2x}\ ) + \boldsymbol{C}$$

5.2EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Utilizando la técnica de integración trigonométrica, resuelva las siguientes integrales:

$1.-\int \frac{d\theta}{(Sen\ \theta + Cos\ \theta)^2}$

$2.-\int \frac{Sen\ \theta}{1 - Sen\theta}\, d\theta$

$3.-\int \frac{d\beta}{Sen^2 \beta\ Cos^4 \beta}$

$4.-\int \frac{Sen\ \rho\ Cos\ \rho}{\sqrt{Cos^2 \rho + Sen^2 \rho}}\ d\rho$

$5.-\int Sen\ \left(\frac{\pi}{4} - \omega\right)\ Sen\ \left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)\ d\omega$

Respuestas a los ejercicios propuestos

$1: -\frac{1}{(Tan\ \theta)+1} + C$

$2: Sec\ \theta + Tan\ \theta - \theta + C$

$3: Tan\ \beta + \frac{Tan^3 \beta}{3} - \ 2\ \ Cot\ (2\beta) + C$

$4: -\frac{1}{2}\sqrt{Cos\ 2\rho} + C$

$5: 0$

6. FRACCIONES PARCIALES

Partiendo de que una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas. Las funciones racionales se pueden integrar si el denominador es una función que se pueda descomponer, sea en factores lineales, factores lineales repetidos, factores cuadráticos y factores cuadráticos repetidos.

Factores lineales simples

Sea $\int \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x)$ se puede descomponer en factores simples, ya sea por factorización o algún otro método, las fracciones parciales quedan definidas de la siguiente manera:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{factor\ 1} + \frac{B}{factor\ 2} + \frac{C}{factor\ n}$$

Donde A, B, C…… son coeficientes que se calculan por medio de las indeterminaciones que toma x en la función g(x). Y luego se procede a integrar por cualquiera de las técnicas de integración descritas anteriormente.

Factores lineales repetidos

Sea $\int \frac{f(x)}{(factor)^n}$ si $(factor)^n$ se puede descomponer en factores lineales simples (repetidos), ya sea por factorización o algún otro método, las fracciones parciales quedan definidas de la siguiente manera:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)^n} = \frac{A_1}{(factor)^1} + \frac{B_2}{(factor)^2} + \frac{C_n}{(factor)^n}$$

Donde A, B, C…… son coeficientes que se calculan por medio de las indeterminaciones que toma x en $(factor)^n$. La regla general seria que por cada $(factor)^n$ en el denominador, existen n términos en la descomposición de fracciones parciales.

Luego se procede a integrar por cualquiera de las técnicas de integración descritas anteriormente.

Factores cuadráticos

Sea $\int \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x)$ se puede descomponer en factores cuadráticos, ya sea por factorización o algún otro método, las fracciones parciales quedan definidas de la siguiente manera:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Ax+B}{factor\ 1} + \frac{Cx+D}{factor\ 2} + \frac{Ex+F}{factor\ n} + \cdots$$

Donde A, B, C, D. E y F…… son coeficientes que se calculan por medio de las indeterminaciones que toma x en la función g(x). Y luego se procede a integrar por cualquiera de las técnicas de integración descritas anteriormente.

Si existen combinaciones de factores lineales simples, repetidos, cuadráticos, se siguen las reglas mencionadas anteriormente. (Espinoza, E., 2016)

6.1EJERCICIOS CON FRACCIONES PARCIALES

$$\mathbf{1.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{3x+2}}{\mathbf{x^3+3x^2+3x+1}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se expresa el denominador con el siguiente producto notable:

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)^3}\,dx \ =$$

Se descompone el denominador mediante factores lineales repetidos:

$$= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

$$3x+2 = A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\boldsymbol{x=-1};\Rightarrow \quad 3(-1)+2 = A(-1+1)^2+B(-1+1)+C$$

$$-3+2=C;\ \Rightarrow\ \boldsymbol{C=-1}$$

$$3x+2 = A(x+1)^2+B(x+1)+C;$$

$$3x+2 = Ax^2+2Ax+A+Bx+B+C;$$

$$\boldsymbol{A=0};\ 2A+B=3;\ A+B+C=2;\Rightarrow \boldsymbol{B=3}$$

$$= \int \frac{0}{x+1}dx+\int \frac{3}{(x+1)^2}dx-\int \frac{dx}{(x+1)^3} \ =$$

$$= 3\int \frac{dx}{(x+1)^2}-\int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=x+1};\quad \boldsymbol{du=dx}$$

$$= 3\int \frac{du}{u^2}+\int \frac{du}{u^3} \ = 3\int u^{-2}du+\int u^{-3}du \ =$$

$$= -3\,u^{-1}-\frac{1}{2}u^{-2}+C = -\frac{3}{u}-\frac{1}{2\,u^2}+C \ =$$

$$= -\frac{3}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C \ = \frac{-6(x+1)-1}{2(x+1)^2}+C$$

$$= \frac{-6x-6-1}{2(x+1)^2}+C \ = \frac{-6x-7}{2(x+1)^2}+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{6x+7}}{\mathbf{2(x+1)^2}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{2.-\ \mathit{Resolver}}: \int \frac{\mathbf{3x^2 - 21x + 32}}{\mathbf{x^3 - 8x^2 + 16x}}\,\mathbf{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$\int \frac{3x^2 - 21x + 32}{x\,(x-4)^2}dx \ =$$

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales: dos repetidos y uno distinto:

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

$$3x^2 - 21x + 32 = A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\boldsymbol{x = 4} \ \Rightarrow\ 3(4)^2 - 21(4) + 32 = A(4-4)^2 + B(4)(4-4) + C(4)$$

$$\Rightarrow 48 - 84 + 32 = 4C \quad \Rightarrow\ 4C = -4 \quad \Rightarrow \boldsymbol{C = -1}$$

$$\boldsymbol{x = 0} \ \Rightarrow\ 3(0)^2 - 21(0) + 32 = A(0-4)^2 + B(0)(0-4) + C(0)$$

$$\Rightarrow\ 32 = 16A \quad \Rightarrow\ \boldsymbol{A = 2}$$

$$3x^2 - 21x + 32 = 2(x^2 - 8x + 16) + B(x^2 - 4x) - x$$

$$3x^2 - 21x + 32 = 2x^2 - 16x + 32 + Bx^2 - 4Bx - x$$

$$(2+B)x^2 = 3x^2 \quad\ \Rightarrow\quad 2 + B = 3;\ \ \boldsymbol{B = 1}$$

$$= \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{dx}{x-4} - \int \frac{dx}{(x-4)^2}$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-4} - \int \frac{dx}{(x-4)^2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x - 4 \quad du = dx}$

$$= 2\ln x + \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} = 2\,ln\,x + ln\,u - \int u^{-2}du$$

$$= 2\,ln\,x + ln\,u + u^{-1} + C = 2\,ln\,x + ln|x-4| + \frac{1}{u} + C$$

$$= \ 2\,ln\,x + ln|x-4| + \frac{1}{x-4} + C$$

$$\boldsymbol{\mathit{Respuesta}: ln\,x^2 + ln|x-4| + \frac{1}{x-4} + C}$$

$$\mathbf{3.-}\boldsymbol{Resolver}\text{: } \int \frac{\boldsymbol{x^2+19x+10}}{\boldsymbol{2x^4+5x^3}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^2+19x+10}{x^3(2x+5)}dx$$

Se descompone el denominador mediante 4 factores lineales: tres repetidos y uno distinto:

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{2x+5}$$

$$x^2+19x+10 = Ax^2(2x+5)+x(2x+5)+C(2x+5)+Dx^3$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\boldsymbol{x=0} \Rightarrow 0^2+19(0)+10 = A(0)^2(2(0)+5)+B(0)(2(0)+5) + C(2(0)+5)+D(0)^3$$

$$10=5C \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C=2}$$

$$\boldsymbol{x=-\frac{5}{2}}\ ;$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)^2+19\left(-\frac{5}{2}\right)+10 = A\left(-\frac{5}{2}\right)^2\left(2\left(-\frac{5}{2}\right)+5\right)+ B\left(-\frac{5}{2}\right)\left(2\left(-\frac{5}{2}\right)+5\right)+C\left(2\left(-\frac{5}{2}\right)+5\right)+D\left(-\frac{5}{2}\right)^3$$

$$\frac{25}{4}-\frac{95}{2}+10 = D\left(-\frac{125}{8}\right) \quad \Rightarrow \quad D=\frac{8\cdot 125}{4\cdot 125} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D=2}$$

$$\Rightarrow x^2+19x+10 = 2Ax^3+5Ax^2+2Bx^2+5Bx+2Cx+5C+Dx^3$$

$$x^2+19x+10 = x^3(2A+D)+x^2(5A+2B)+x(5B+2C)+5C$$

$$\Rightarrow\ 2A+D=0;\quad 5A+2B=1;\quad 5B+2C=19;\quad 5\,C=10$$

$$\Rightarrow\ 2A+2=0;\quad 2A=-2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A=-1}$$

$$\Rightarrow\ 5A+2B=1;\ -5+2B=1;\ 2B=5+1;\quad \boldsymbol{B=3}$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{3}{x^2}dx+\int\frac{2}{x^3}dx+\int\frac{2}{2x+5}dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{x^3}+2\int\frac{dx}{2x+5}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=2x+5};\qquad \boldsymbol{du=2dx}$$

$$=-\ln x-3x^{-1}-x^{-2}+\int\frac{du}{u} = -\ln x-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\ln u$$

$$= -\ln x \ - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln(2x+5) =$$

Respuesta: $\boldsymbol{ln\left|\frac{2x+5}{x}\right| - \frac{3x+1}{x^2} + C}$

4.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$\int \frac{2x^2+x-8}{x(x^2+4)}dx$$

Se descompone el denominador mediante 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$2x^2+x-8 \ = A(x^2+4) + (Bx+C)(x)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\boldsymbol{x=0} \ \Rightarrow \ 2(0)^2+(0)-8 \ = A((0)^2+4) + (B(0)+C)(0)$$

$$\Rightarrow -8 = 4A \quad \Rightarrow \boldsymbol{A=-2}$$

$$2x^2+x-8 \ = Ax^2+4A+Bx^2+Cx \quad \Rightarrow \ x^2(A+B) = 2x^2$$

$$A+B=2 \quad \Rightarrow \ -2+B=2 \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{B=4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C=1}$$

$$= -\int \frac{2}{x}dx + \int \frac{4x+1}{x^2+4} \ = -2\int \frac{d}{x} + 4\int \frac{x}{x^2+4}dx + \int \frac{dx}{x^2+4}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u = x^2+4 \quad du = 2x\,dx}$$

$$= -2\ln x + \frac{4}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^2+2^2}$$

$$= \ -2\ln \mathrm{x} + 2\,ln\,u + \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -2\,ln|x| + 2\,ln|x^2+4| + \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

$$= -ln\,x^2 + ln(x^2+4)^2 + \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

Respuesta: $\boldsymbol{ln\left|\frac{(x^2+4)^2}{x^2}\right| + \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{x}{2} + c}$

$\mathbf{5.-}$***Resolver***: $\int \frac{\boldsymbol{y^4+y^2-1}}{\boldsymbol{y^3+y}}\boldsymbol{dy}$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$\int \frac{y^4+y^2-1}{y(y^2+1)}dy$$

Se descompone el denominador mediante 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$=\frac{A}{y}+\frac{By+C}{y^2+1}$$

$$y^4+y^2-1=A(y^2+1)+(By+C)(y)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{y=0} \quad \Rightarrow \quad (0)^4+(0)^2-1=A((0)^2+1)+(B(0)+C)(0)$

$\boldsymbol{A=-1}$

$y^4+y^2-1=Ay^2+A+By^2+Cy$

$A+B=1 \;\Rightarrow\; -1+B=1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B=2} \quad \Rightarrow \; \boldsymbol{C=0}$

$$=-\int \frac{dy}{y}+\int \frac{2y+0}{y^2+1}dy$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=y^2+1} \quad \boldsymbol{du=2y\,dy}$

Respuesta: $\boldsymbol{-\ln y+\ln|y^2+1|+c}$

$\mathbf{6.-}$ ***Resolver***: $\int \frac{\boldsymbol{2y^4}}{\boldsymbol{y^3-y^2+y-1}}\boldsymbol{dy}$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$=\int \frac{2y^4}{(y-1)(y^2+1)}dy$$

$$2y^4=A(y^2+1)+(By+C)(y-1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{y=1} \;\Rightarrow\; 2(1)^4=A((1)^2+1)+(B(1)+C)(1-1)$

$2A=2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A=1}$

$2y^4=Ay^2+A+By^2-By+Cy-C$

$A+B=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B=-1} \;\Rightarrow -B+C=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{C=-1}$

$$=\int \frac{dy}{y-1}-\int \frac{y+1}{y^2+1}dy \quad = \int \frac{du}{u}-\int \frac{y}{y^2+1}dy-\int \frac{dy}{y^2+1} =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = y - 1}$; $\boldsymbol{d = dy}$;

$\boldsymbol{u = y^2 + 1}$; $\boldsymbol{du = 2y\, dy}$; $\int \frac{du}{u^2+a} = \frac{1}{a} \boldsymbol{tan}^{-1} \frac{u}{a} + c$

$$= ln\, u - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + tan^{-1} y + C \;= ln\, u - ln\, u^{1/2} + tan^{-1} y + C$$

$$= ln\left|\frac{u}{u^{1/2}}\right| + tan^{-1} y + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln}\left|\frac{\boldsymbol{y - 1}}{(\boldsymbol{y^2 + 1})^{1/2}}\right| + \boldsymbol{tan^{-1}\, y + C}$$

$$7.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{e^t}}{\boldsymbol{e^{2t} + 3e^t + 2}} \boldsymbol{dt}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = e^t}$; $\boldsymbol{du = e^t\ dt}$;

$$= \int \frac{du}{u^2 + 3\, u + 2} =$$

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$\int \frac{du}{(u+2)(u+1)}$$

Se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$= \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1}$$

$$1 = A(u+1) + B(u+2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$u = -2 \;\Rightarrow\; 1 = A(-2+1) + B\,(-2+2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A = -1}$$

$$u = -1 \;\Rightarrow\; 1 = A(-1+1) + B\,(-1+2) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B = 1}$$

$$= -\int \frac{du}{u+2} + \int \frac{du}{u+1}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{v = u + 2}$; $\boldsymbol{dv = du}$; $\boldsymbol{w = u + 1}$; $\boldsymbol{dw = du}$

$$= -\int \frac{dv}{v} + \int \frac{dw}{w} \quad = -\ln v + \ln w =$$

$$= -\ln(u+2) + \ln(u+1) + C = \; -\ln(e^t + 2) + \ln(e^t + 1) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{ln}\frac{\boldsymbol{e^t + 1}}{\boldsymbol{e^t + 2}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{8.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{cos\,y}}{\boldsymbol{sen^2 y + sen\,y - 6}}\boldsymbol{dy}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\,y};\quad \boldsymbol{du = cos\,y}$

$$\int \frac{du}{u^2 + u - 6}$$

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{du}{(u+3)(u-2)} = \int \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u-2}$$

$$A(u-2) + B\,(u+3) = 1$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\boldsymbol{u = 2} \quad \Rightarrow A\big((2) - 2\big) + B\big((2) + 3\big) = 1$$

$$5B = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{B = \frac{1}{5}}$$

$$\boldsymbol{u = -3} \quad \Rightarrow A\big((-3\,) - 2\big) + B\big((-3) + 3\big) = 1$$

$$-5A = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{A = -\frac{1}{5}}$$

$$= -\int \frac{du}{5(u+3)} + \int \frac{du}{5\,(u-2)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{v = u + 3};\quad \boldsymbol{dv = du} \qquad\qquad \boldsymbol{v = u - 2}\,;\;\; \boldsymbol{dv = du}$

$$= -\frac{1}{5}\int \frac{dv}{v} + \frac{1}{5}\int \frac{dv}{v} \;\; = \;\; -\frac{1}{5} ln\,v + \frac{1}{5} ln\,v + C$$

$$= -\frac{1}{5} ln|u+3| + \frac{1}{5} ln|u-2| + C$$

$$= \;-\frac{1}{5} ln|sen\,y + 3| + \frac{1}{5} ln|sen\,y - 2| + C$$

$$= \;\frac{1}{5} ln\left|\frac{sin\,y - 2}{sin\,y + 3}\right| + C \;\; =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{sin\,y - 2}}{\boldsymbol{sin\,y + 3}}\right)^{\mathbf{1/5}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{9.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{\sin\theta\, d\theta}}{\boldsymbol{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}} \boldsymbol{dy}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = \cos\theta}$; $\quad \boldsymbol{du = -\sin\theta\, d\theta}$

$$= \int \frac{du}{u^2 + u - 2}$$

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{du}{(u+2)(u-1)} \quad = \quad \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u-1}$$

$$1 = A(u-1) + B(u+2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\boldsymbol{u = 1} \;\Rightarrow\; 1 = A\big((1) - 1\big) + B\big((1) + 2\big)$$

$$1 = 3B \quad \Rightarrow \; \boldsymbol{B = {}^{1}/_{3}}$$

$$\boldsymbol{u = -2} \Rightarrow \; 1 = A\big((-2) - 1\big) + B\big((-2) + 2\big)$$

$$1 = -3A \quad \Rightarrow \; \boldsymbol{A = -{}^{1}/_{3}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u+2} + \frac{1}{3}\int \frac{du}{u-1}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{v = u + 2}$; $\quad \boldsymbol{dv = du} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v = u - 1}$; $\quad \boldsymbol{dv = du}$

$$= -\frac{1}{3} \ln v + \frac{1}{3} \ln v + C \quad = \quad -\frac{1}{3} \ln(u+2) + \frac{1}{3} \ln(u-1)$$

$$= -\frac{1}{3} \ln(\cos\theta + 2) + \frac{1}{3} \ln(\cos\theta - 1) + C \; =$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 2}\right) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{\ln\left(\frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta + 2}\right)^{{}^{1}/_{3}} + C}$$

$$\mathbf{10.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{(t+2)^2(t+1)}}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$= \frac{A}{(t+2)} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{C}{(t+1)}$$

$$A(t+2)(t+1) + B(t+1) + C(t+2)^2 = 1$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{t=-2} \Rightarrow \big((-2)+2\big)\big((-2)+1\big)+B\big((-2)+1\big)+C\big((-2)+2\big)^2$
$= 1$

$-B = 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{B=-1}$

$\boldsymbol{t=-1} \Rightarrow \big((-1)+2\big)\big((-1)+1\big)+B\big((-1)+1\big)+C\big((-1)+2\big)^2$
$= 1$

$\boldsymbol{C=1}$

$At^2+2At+At+2A+Bt+B+Ct^2+4tC+4C=1$

$At^2+3At+2A+Bt+B+Ct^2+C4t+4C=1$

$t^2(A+C)+t(3A+B+4C)+2A+B+4C=1$

$A+1=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A=-1}$

$$=-\int\frac{dt}{t+2}-\int\frac{dt}{(t+2)^2}+\int\frac{dt}{t+1} \quad =-\int\frac{du}{u}-\int\frac{du}{u^2}+\int\frac{du}{u}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=t+2}; \quad \boldsymbol{du=dt} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u=t+1}; \quad \boldsymbol{du=dt}$

$$=-\ln u-\int u^{-2}du+\ln u=-\ln u+u^{-1}+\ln u+C$$

$$=-\ln(t+2)+\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\dfrac{1}{t+2}+\ln\left(\dfrac{t+1}{t+2}\right)+C}$

11.−*Resolver*: $\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{3x^2-x+1}}{\boldsymbol{x^3-x^2}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$=\int\frac{3x^2-x+1}{x^2(x-1)} \quad =\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

$3x^2-x+1=A(x-1)(x)+B(x-1)+C(x)^2$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{x=1} \Rightarrow 3(1)^2-(1)+1=A\big((1)-1\big)(1)+B\big((1)-1\big)+C(1)^2$

$\boldsymbol{C=3}$

$\boldsymbol{x=0} \Rightarrow 3(0)^2-(0)+1=A\big((0)-1\big)(0)+B\big((0)-1\big)+C(0)^2$

$\boldsymbol{B=-1}$

$Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2=3x^2-x+1$

$\Rightarrow\ x^2(A+C)+x(-A+B)-B=\ 3x^2-x+1$

$A+C=3 \qquad \Rightarrow \qquad A+3=3 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{A=0}$

$$=\int\frac{0}{x}dx-\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x-1}\ =-\int x^{-2}dx+3\int\frac{du}{u}=$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=x-1} \quad \boldsymbol{du=dx}$

$$=\frac{1}{x}+3lnu=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}+\mathbf{3}\,\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+\boldsymbol{C}\ =\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{3}}+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{12.-}\boldsymbol{Resolver}:\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^3}\ +\mathbf{3}\boldsymbol{x^2}}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$\int\frac{dx}{x^2(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}$$

$\Rightarrow A(x+3)(x)\,+B(x+3)+\,Cx^2=\,1$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{x=-3} \quad \Rightarrow \quad A(-3+3)(-3)+B(-3+3)+C(-3)^2=1$

$\boldsymbol{C}={}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{9}}$

$\boldsymbol{x=0} \quad \Rightarrow \quad A(0+3)(0)+B(0+3)+C(0)^2=1$

$\boldsymbol{B}={}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{3}}$

$Ax^2+3Ax+Bx+3B+Cx^2=1$

$x^2(A+C)+x(3A+B)+3B\ =1$

$A+C=0 \ \ \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}=-{}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{9}}$

$$=-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{9(x+3)}=$$

$$=-\frac{1}{9}\ln x+\frac{1}{3}\int x^{-2}dx+\ \frac{1}{9}\int\frac{du}{u}=$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=x+3};\quad \boldsymbol{du\ =dx}$

$$=-\frac{1}{9}\ln x-\ \frac{1}{3x}+\ \frac{1}{9}\ln(x+3)\ =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^{1/9} - \frac{1}{3x} + C}$$

$$\mathbf{13.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{(y-m)(y-n)}}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$= \frac{A}{(y-m)} + \frac{B}{(y-n)}$$

$$A(y-n) + B(y-m) = 1$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\boldsymbol{y = n} \quad \Rightarrow A(n-n) + B(n-m) = 1$$

$$\boldsymbol{B} = {}^{\mathbf{1}}\!/\!(\boldsymbol{n-m})$$

$$\boldsymbol{y = m} \quad \Rightarrow A(m-n) + B(m-m) = 1$$

$$\boldsymbol{A} = {}^{\mathbf{1}}\!/\!(\boldsymbol{m-n})$$

$$= \frac{1}{m-n}\int \frac{dy}{y-m} + \frac{1}{n-m}\int \frac{dy}{y-n}$$

$$= \int \frac{dy}{(m-n)(y-m)} + \int \frac{dy}{(n-m)(y-n)} \;=$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$$\boldsymbol{u = y-m}; \quad \boldsymbol{du = dy} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{u = y-n}; \quad \boldsymbol{du = dy}$$

$$= \frac{1}{m-n}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{n-m}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{m-n} lnu + \frac{1}{n-m} lnu + C$$

$$= \frac{1}{m-n} ln(y-m) - \frac{1}{m-n} ln(y-n) + C \;=$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m-n}} \cdot \boldsymbol{ln\left(\frac{y-m}{y-n}\right) + C}$$

$$\mathbf{14.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{(x^2+x-1)}}{\boldsymbol{x^3+2x^2+x}} \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$= \int \frac{(x^2+x-1)}{x(x^2+2x+1)} dx$$

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales: 2 repetidos y 1 distinto:

$$= \int \frac{(x^2+x-1)}{x(x+1)^2}dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$\boldsymbol{x = 0} \;\Rightarrow A(0+1)^2 + B(0)(0+1) + C(0) = (0)^2 + 0 - 1$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{A = -1}$

$\boldsymbol{x = -1} \Rightarrow A(-1+1)^2 + B(-1)(-1+1) + C(-1)$

$= (-1)^2 + (-1) - 1$

$\boldsymbol{C = 1}$

$Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx = x^2 + x - 1$

$x^2(A+B) = 1 \;\Rightarrow\; x(2A+B+C) = 1 \;\Rightarrow\; -1+B = 1 \;\Rightarrow \boldsymbol{B = 2}$

$$= -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\ln x + 2\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x+1;\; du = dx}$

$$= -\ln x + 2\ln u - \frac{1}{u} + C = -\,ln x + ln(x+1)^2 - \frac{1}{(x+1)} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln\left(\frac{(x+1)^2}{x}\right) - \frac{1}{(x+1)} + C}$$

$$\mathbf{15.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{13}}{(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})}\, \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$5x - 13 = A(x-2) + B(x-3)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\boldsymbol{x = 2} \;\Rightarrow\; 5(2) - 13 = A(2-2) + B(2-3)$

$10 - 13 = B(-1)$

$-3 = -B$

$\boldsymbol{B = 3}$

$\boldsymbol{x = 3} \Rightarrow 5(3) - 13 = A(3-2) + B(3-3)$

$15 - 13 = A(1)$

$\boldsymbol{A = 2}$

$$= \int \frac{2}{(x-3)}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)}\,dx = 2\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{du}{u}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x - 3; du = dx;\ u = x - 2; \quad du = dx}$

$= 2\,ln|u| + 3ln|u| + c = 2\,ln|x-3| + 3ln|x-2| + C$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln(x-3)^2 + ln(x-2)^3 + C}$

$$\mathbf{16.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{5x-7}}{\boldsymbol{x^2-3x+2}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se expresa el denominador de la siguiente manera:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} =$$

$\Rightarrow 5x - 7 = A(x-1) + B(x-2)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\boldsymbol{x = 1} \Rightarrow 5(1) - 7 = A(1-1) + B(1-2)$

$5 - 7 = B(-1)$

$-2 = -B \Rightarrow \boldsymbol{B = 2}$

$\boldsymbol{x = 2} \Rightarrow 5(2) - 7 = A(2-1) + B(2-2)$

$10 - 7 = A(1) \Rightarrow \boldsymbol{A = 3}$

$$= \int \frac{3}{(x-2)}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)}\,dx$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x - 2\ ;\ du = dx\ ;\ u = x - 1,\ du = dx}$

$$= 3\int \frac{du}{u} + 2\int \frac{du}{u} = 3\,ln|u| + 2ln|u| + C$$

$= 3\,ln|x-2| + 2ln|x-1| + C =$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln(x-2)^3 + ln(x-1)^2 + C}$

$$\mathbf{17.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x+4}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}\,\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores lineales repetidos:

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$x + 4 = A(x+1) + B$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow\ x+4=Ax+(A+B)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A=1}$

$\Rightarrow A+B=4\ \Rightarrow 1+B=4\ \Rightarrow \boldsymbol{B=3}$

$$=\int\frac{dx}{(x+1)}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\int\frac{du}{u}+3\int\frac{du}{u^2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=x+1; du=dx}$

$$=\int\frac{du}{u}+3\int u^{-2}=\ ln|u|+3\frac{u^{-1}}{-1}+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+C}$$

$$\boldsymbol{18.-Resolver}: \int\frac{\boldsymbol{2x-2}}{\boldsymbol{x^2-2x+1}}\ \boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales repetidos:

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$2x-2=A(x-1)+B\ \Rightarrow\ 2x-2=Ax-A+B\Rightarrow\quad \boldsymbol{A=2}$

$-A+B=-2\ \Rightarrow -2+B=-2\Rightarrow\ \boldsymbol{B=0}$

$$=\int\frac{2\,dx}{(x-1)}+0=\ 2\int\frac{du}{u}=2\,ln|u|+C$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=x-1\ ;\ du=dx}$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln(x-1)^2+C}$$

$$\boldsymbol{19.-Resolver}: \int\frac{\boldsymbol{cost}}{\boldsymbol{sen^4t-16}}\boldsymbol{dt}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=sen\ t;\ du=cos\ tdt}$

$$\int\frac{du}{u^4-16}=\frac{Au+B}{u^2+4}+\frac{C}{u+2}+\frac{D}{u-2}$$

$$u^4-16=\ (u^2-4)\,(u^2+4)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$(u^2+4)(u+2)(u-2)$

$1=(Au+B)(u+2)(u-2)+C(u^2+4)(u-2)+D(u^2+4)(u+2)$

$\boldsymbol{u=-2} \Rightarrow 1=C(8)(-4) \Rightarrow 1=C(-32) \Rightarrow \boldsymbol{C=-\frac{1}{32}}$

$\boldsymbol{u=2} \Rightarrow\ 1=D(8)(4) \Rightarrow\ 1=D(32) \Rightarrow \boldsymbol{D=\frac{1}{32}}$

$1=(Au^2+2Au+Bu+2B)(u-2)+C(u^3-2u^2+4u-8)$
$+D(u^3+2u^2+4u+8)$

$1=Au^3+2Au^2+Bu^2+2Bu-2Au^2-4Au-2Bu-4B+Cu^3$
$-2Cu^2+4Cu-8C \quad +Du^3+2Du^2+4Du+8D$

$1=(A+C+D)u^3+(2A+B-2A-2C+2D)u^2$
$+(2B-4A-2B+4C+4D)u+(-4B-8C+8D)$

$A+C+D=0 \Rightarrow\ A+\frac{1}{32}-\frac{1}{32}=0\ \Rightarrow \boldsymbol{A=0}$

$2A+B-2A-2C+2D=0 \Rightarrow\ 0+B-0-2\left(-\frac{1}{32}\right)+2\left(\frac{1}{32}\right)=0$

$B+\left(\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)=0 \Rightarrow \boldsymbol{B=-\frac{1}{8}}$

$=-\frac{1}{8}\int\frac{du}{u^2+4}\ -\frac{1}{32}\int\frac{du}{u+2}+\frac{1}{32}\int\frac{du}{u-2}$

$=-\frac{1}{8}\int\frac{du}{u^2+2^2}\ -\frac{1}{32}\int\frac{dz}{z}+\frac{1}{32}\int\frac{dz}{z}$

$=-\frac{1}{8}*\frac{1}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{32}ln|z|+\frac{1}{32}ln|z|+C$

$=-\frac{1}{16}\ tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{32}ln|u+2|\ +\frac{1}{32}ln|u-2|+C$

$=-\frac{1}{16}\ tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)+\frac{1}{32}ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\frac{1}{16}\ tan^{-1}\left(\frac{sen\ t}{2}\right)+\frac{1}{32}ln\left|\frac{sen\ t-2}{sen\ t+2}\right|+C}$

$$\mathbf{20.-\textit{Resolver}}: \int \frac{\boldsymbol{x^3-4x}}{\boldsymbol{(x^2+1)^2}}$$

Solución.-
Se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos repetidos:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=$$

$$x^3-4x=(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D$$

$$x^3-4x=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D$$

$$x^3-4x=Ax^3+Bx^2+x(A+C)+(B+D)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$$\boldsymbol{A=1};\ \boldsymbol{B=0};\ A+C=-4;\ 1+C=-4;\ \boldsymbol{C=-5}$$

$$B+D=0;\ 0+D=0;\ \boldsymbol{D=0}$$

$$=\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{5x}{(x^2+1)^2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u^2=x^2;\ a^2=1;\ u=x^2+1;\ du=2xdx}$$

$$=\int\frac{u}{1+u^2}-5*\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}=\ tan^{-1}u-\frac{5}{2}\frac{u^{-1}}{-1}+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{tan^{-1}x+\frac{5}{2(x^2+1)}+C}$$

$$\mathbf{21.-\textit{Resolver}}:\int\frac{\boldsymbol{sen\,t\,(4cos^2t-1)}}{\boldsymbol{cos\,t\,(1+2cos^2t+cos^4t)}}\boldsymbol{dt}$$

Solución.-
Se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u=cos\,t;\ du=-\,sen\,t\,dt}$$

$$=-\int\frac{(4u^2-1)}{u(1+2u^2+u^4)}du=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{u^2+1}+\frac{Du+E}{(u^2+1)^2}$$

$$\boldsymbol{u\left(1+2u^2+u^4\right);\ u\left(u^2+1\right)\left(u^2+1\right);\ u(u^2+1)^2}$$

$$4u^2-1=A(u^2+1)^2+(Bu+C)(u^2+1)(u)+(Du+E)u$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C, D y E:

$$u=0\Rightarrow\ \boldsymbol{A=-1}$$

$$4u^2-1=A+2Au^2+Au^4+(Bu^3+Bu+Cu^2+C)u+Du^2$$
$$+Eu$$

$$=A+2Au^2+Au^4+Bu^4+Bu^2+Cu^3+Cu+Du^2+Eu$$

$= (A+B)u^4 + Cu^3 + (2A+B+D)u^2 + (C+E)u + A$

$\Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow\ -1 + B = 0 \Rightarrow\ \boldsymbol{B = 1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{C = 0}$

$\Rightarrow 2A + B + D = 4;\ 2(-1) + 1 + D = 4;\ -1 + D = 4;\ \boldsymbol{D = 5}$

$\Rightarrow C + E = 0;\ \boldsymbol{E = 0}$

$$= -\left[-\int \frac{du}{u} + \int \frac{u}{u^2+1}du + 5\int \frac{u}{(u^2+1)^2}du\right]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{z = u^2 + 1;\ dz = 2udu}$

$$= -\left[-\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{5}{2}\int \frac{dz}{z^2}\right] = -\left[-\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{5}{2}\int \frac{dz}{z^2}\right]$$

$$= -\left[-ln\, u + \frac{1}{2} ln\, z + \frac{5}{2}\frac{z^{-1}}{-1}\right] + C =$$

$$= -\left[-ln\, u + \frac{1}{2} ln|u^2+1| - \frac{5}{2}(u^2+1)^{-1}\right] + C$$

$$= ln\, u - \frac{1}{2} ln|u^2+1| + \frac{5}{2}(u^2+1)^{-1} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln\cos t - \frac{1}{2} ln\left|cos^2 t + 1\right| + \frac{5}{2}\left(cos\, t^2 + 1\right)^{-1} + C}$$

$$\boldsymbol{22.- Resolver}: \int \boldsymbol{\frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 - x^2 + x + 3}\ dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores: 1 lineal y 1 cuadrático:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 3} =$$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 7 = A(x^2 - 2x + 3) + Bx + C(x+1)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = -1;\ 1 + 4 + 7 = A(1 + 2 + 3);\ 12 = A(6);\ \boldsymbol{A = 2}$

⇒A+B=1; 2+B=1; ***B=-1***

$x^2 - 4x + 7 = Ax^2 - 2Ax + 3A + Bx^2 + Bx + Cx + C$

$= (A+B)x^2 + (-2A + B + C)x + (3A + C)$

$= -2A + B + C = -4;\ -2(2) + (-1) + C = -4;\ -5 + C = -4$

$\boldsymbol{C = 1}$

$$= \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{-x+1}{x^2-2x+3}dx = 2\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x-1}{x^2-2x+3}dx$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x+1;\ du = dx;\ u = x^2 - 2x + 3;\ du = 2(x-1)dx}$

$$= 2\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = 2ln|u| - \frac{1}{2}ln|u| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 2ln|x+1| - \frac{1}{2}ln\left|x^2 - 2x + 3\right| + C}$$

$$\boldsymbol{23.- Resolver: \int \frac{6x}{x^3 - 8}\ dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores: 1 lineal y 1 cuadrático:

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$6x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$6x = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$= (A+B)x^2 + (2A - 2B + C)x + (4A - 2C)$$

$$\Rightarrow x = 2;\ 6(2) = A(4+4+4);\ 12 = A(12);\ \boldsymbol{A = 1}$$

$$\Rightarrow A + B = 0;\ 1 + B = 0;\ \boldsymbol{B = -1}$$

$$\Rightarrow 2A - 2B + C = 6;\ 4 + C = 6;\ \boldsymbol{C = 2}$$

$$= \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{-x+2}{x^2+2x+4}dx$$

$$= \int \frac{dx}{x-2} + \left[\int \frac{-x}{x^2+2x+4} + 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+3}\right]$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x-2;\ du = dx;\ u = x^2 + 2x + 4; du = 2x + 2}$

$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + 3$ (***Artificio para no alterar la ecuación***)

$$= \int \frac{du}{u} + \left[\int \frac{-x}{x^2+2x+4} + (2+1)\int \frac{dx}{(x+1)^2+3}\right]$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u^2 = (x+1)^2;\ du = dx;\ a^2 = 3; a = \sqrt{3}}$

$$= ln|u| + \left[-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{du}{u^2+3}\right]$$

$$= ln|x-2| - \frac{1}{2}ln|u| + 3\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3}} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: ln|x-2| - \frac{1}{2}ln\left|x^2+2x+4\right| + 3\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C}$$

$$\boldsymbol{24.-Resolver: \int \frac{x^2+x+3}{x^4+6x^2+9}dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos repetidos:

$$\frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{(x^2+3)^2}$$

$$x^4+6x^2+9 = (x^2+3)^2$$

$$\Rightarrow x^2+x+3 = Ax + B(x^2+3) + Cx + D$$

$$\Rightarrow Ax^3 + Bx^2 + (3A+C)x + (3B+D)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$$\Rightarrow \boldsymbol{A=0};\ \boldsymbol{B=1};\ 3A+C=1;\ \boldsymbol{C=1};\ 3B+D=3;\ 3+D=3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{D=0}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+3} + \int \frac{x}{(x^2+3)^2}dx$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$$\boldsymbol{u^2 = x^2;\ du = dx;\ a^3 = 3;\ a = \sqrt{3};\ u = x^2+3;\ du = 2x}$$

$$= \int \frac{du}{u^2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}u^{-1} + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta: \frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-1} + C}$$

$$\boldsymbol{25.-\ Resolver: \int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}}$$

Solución.-

Se realizan el siguiente cambio de variable:

$$\boldsymbol{u = e^x;\ du = e^x\,dx}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)}$$

Se descompone el denominador mediante 2 factores: 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$= \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1} \Rightarrow 1 = (Au+B)(u-1) + C(u^2+1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\Rightarrow u = 1;\ 1 = 2C;\ \boldsymbol{C = \frac{1}{2}}$$

$$1 = Au^2 - Au + Bu - B + Cu^2 + C$$

$$\Rightarrow (A+C)u^2 + (-A+B)u + (-B+C)$$

$$\Rightarrow A + C = 0;\ A + \frac{1}{2} = 0;\ \boldsymbol{A = -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow -A + B = 0;\ \frac{1}{2} + B = 0;\ \boldsymbol{B = -\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{u+1}{u^2+1}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{du}{u-1} - \int \frac{u+1}{u^2+1}du\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{du}{u-1} - \int \frac{u}{u^2+1}du - \int \frac{du}{u^2+1}\right]$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{z = u - 1;\ dz = du;\ z = u^2 + 1;\ dz = 2udu;\ z^2 = u^2;\ a^2 = 1}$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \int \frac{dz}{z^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[ln|z| - \frac{1}{2}ln|z| - tan^{-1}z\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[ln|u-1| - \frac{1}{2}ln|u^2+1| - tan^{-1}u\right] + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{\frac{1}{2}ln|e^x - 1| - \frac{1}{4}ln\left|e^{2x} + 1\right| - \frac{1}{2}tan^{-1}e^x + C}$$

$$\boldsymbol{26.-Resolver}: \int \boldsymbol{\frac{4x+3}{4x^3+8x^2+3x}dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x+1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{4x^3 + 8x^2 + 3x;\ x(4x^2 + 8x + 3);\ x(2x+3)(2x+1)}$$

$$\Rightarrow 4x + 3 = A(2x+3)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x+3)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x=0;\ 3=A(3)(1);\ 3=3A;\ \boldsymbol{A=1}$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2};\ 4\left(-\frac{3}{2}\right)+3=B\left(-\frac{3}{2}\right)\left(2\left(-\frac{3}{2}\right)+1\right)$

$\Rightarrow -6+3=B\left(-\frac{3}{2}\right)(-2);\ \boldsymbol{B=-1}$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2};\ 4\left(-\frac{1}{2}\right)+3=C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right)$

$\Rightarrow -2+3=C\left(-\frac{1}{2}\right)(2);\ \boldsymbol{C=-1}$

$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{2x+3}-\int\frac{dx}{2x+1}$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=2x+3;\ du=2dx;\ u=2x+1;\ du=2dx}$

$=ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\ ln|x|-\frac{1}{2}ln|u|-\frac{1}{2}ln|u|+C$

$\boldsymbol{Respuesta: ln|x|-\frac{1}{2}ln|2x+3|-\frac{1}{2}ln|2x+1|+C}$

$\boldsymbol{27.-\ Resolver: \int\frac{x^2+5}{x^3-x^2+x+3}dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+3}=$

$\Rightarrow \boldsymbol{(x+1)(x^2-2x+3)};$

$x^2+5=A(x^2-2x+3)+(Bx+C)(x+1)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x=-1;\ 1+5=A(1+2+3);\ 6=A(6);\ \boldsymbol{A=1}$

$\Rightarrow A+B=1;\ 1+B=1;\ \boldsymbol{B=0}$

$\Rightarrow x^2+5=Ax^2-2Ax+3A+Bx^2+Bx+Cx+C$

$\Rightarrow (A+B)x^2+(-2A+B+C)x+(3A+C)$

$\Rightarrow 3A+C=5;\ 3(1)+C=5;\ \boldsymbol{C=2}$

$=\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{dx}{x^2-2x+3}=\int\frac{du}{u}+2\int\frac{dx}{(x^2-2x+1)+2}$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=x+1;\ du=dx}$

$$= ln|u| + 2\int \frac{dx}{(x-1)(x-1)+2} = ln|x+1| + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+2}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u^2 = (x-1)^2;\ du = dx;\ a^2 = 2;\ a = \sqrt{2}}$

$$= ln|x+1| + 2\int \frac{du}{(u)^2+a^2} = ln|x+1| + 2\frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: ln|x+1| + \frac{2}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

$$\boldsymbol{28.-Resolver: \int \frac{t^2+8}{t^2-5t+6}dt}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-2} =$$

$$\Rightarrow t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)$$

$$\Rightarrow t^2 + 8 = A(t-2) + B(t-3)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow t = 3;\ 9+8 = A(3-2) + B(3-3);\ 17 = A(1);\ \boldsymbol{A = 17}$$

$$\Rightarrow t = 2;\ 4+8 = A(2-2) + B(2-3);\ 12 = B(-1);\ \boldsymbol{B = -12}$$

$$= \int \frac{17}{t-3}dt - \int \frac{12}{t-2}dt = 17\int \frac{dt}{t-3} - 12\int \frac{dt}{t-2}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = t-3;\ du = dt;\ u = t-2;\ du = dt}$

$$= 17\int \frac{du}{u} - 12\int \frac{du}{u} = 17ln|u| - 12ln|u| + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 17ln|t-3| - 12ln|t-2| + C}$$

$$\boldsymbol{29.-Resolver: \int \frac{sec^2 x}{tan^4 x + 5tan^2 x + 6}dx}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = tan\ x;\ du = sec^2\ x\ dx}$

$$\int \frac{du}{u^4 + 5u^2 + 6} =$$

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos distintos:

$$\Rightarrow \frac{Au+B}{u^2+3}+\frac{Cu+D}{u^2+2}$$

$\boldsymbol{u^4+5u^2+6=(u^2+3)(u^2+2)}$

$$\Rightarrow 1=(Au+B)(u^2+2)+(Cu+D)(u^2+3)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$$\Rightarrow 1=Au^3+2Au+Bu^2+2B+Cu^3+3Cu+Du^2+3D$$

$$\Rightarrow (A+C)u^3+(B+D)u^2+(2A+3C)u+(2B+3D)$$

$$\Rightarrow A+C=0;\ B+D=0;\ 2A+3C=0;\ 2B+3D=1$$

$\Rightarrow B+D=0; 2B+3D=1$ ***sistema de ecuaciones donde*** $\boldsymbol{D=1; B=-1}$

$\Rightarrow A+C=0;\ 2A+3C=0$ ***sistema de ecuaciones donde*** $\boldsymbol{C=0; A=0}$

$$=-\int\frac{du}{u^2+3}+\int\frac{du}{u^2+2}=-\int\frac{dz}{z^2+a^2}+\int\frac{dz}{z^2+a^2}=$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u^2=z^2;\ du=dz;\ a^2=3; a=\sqrt{3}}$

$\boldsymbol{u^2=z^2;\ du=dz;\ a^2=2;\ a=\sqrt{2}}$

$$=-\frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)+\frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)+C}$$

$$\boldsymbol{30.- Resolver}: \int\boldsymbol{\frac{(y^4-8)}{y^3+2y^2}dy}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 2 factores lineales repetidos y 1 factor lineal distinto:

$$\frac{A}{y}+\frac{B}{y^2}+\frac{C}{y+2}$$

$$y^3+2y^2=y^2(y+2)$$

$$\Rightarrow y^4-8=Ay(y+2)+B(y+2)+Cy^2$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\Rightarrow y=-2;\ 16-8=4C;\ 8=4C;\ \boldsymbol{C=2}$$

$\Rightarrow y = 0;\ -8 = 2B;\ \boldsymbol{B = -4}$
$\Rightarrow y^4 - 8 = Ay^2 + 2Ay + By + 2B + Cy^2$
$\Rightarrow (A + C)y^2 + (2A + B)y + 2B$
$\Rightarrow A + C = 0;\ A = -C;\ \boldsymbol{A = -2}$

$$= -2\int \frac{dy}{y} - 4\int \frac{dy}{y^2} + 2\int \frac{dy}{y+2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = y + 2; du = dy}$

$$= 2ln|y| + \frac{4}{y} + 2ln|u| + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 2ln|y| + \frac{4}{y} + 2ln|y + 2| + C}$$

$$\boldsymbol{31.-Resolver: \int \frac{2x^3 + 3x + 2}{x^3 + 4x^2 + 6x + 4}\,dx}$$

Solución.-

Se aplica algebra de fracciones y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$= \int 2dx - \int \frac{8x^2 + 9x + 6}{x^3 + 4x^2 + 6x + 4} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

$\Rightarrow 8x^2 + 9x + 6 = A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x + 2)$
$\Rightarrow x = -2$

$$8(-2)^2 + 9(-2) + 6 = A((-2)^2 + 2(-2) + 2) + (B(-2) + C)((-2) + 2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow 32 - 18 + 6 = A(4 - 4 + 2);\ 20 = A(2);\ \boldsymbol{A = 10}$
$\Rightarrow 8x^2 + 9x + 6 = Ax^2 + 2Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C$
$\Rightarrow (A + B)x^2 + (2A + 2B + C)x + (2A + 2C)$
$\Rightarrow A + B = 8;\ 10 + B = 8;\ \boldsymbol{B = -2}$
$\Rightarrow 2A + 2B + C = 9;\ 20 - 4 + C = 9;\ \boldsymbol{C = -7}$

$$= \int 2dx - \left[\int \frac{10}{x+2}dx + \int \frac{-2x - 7}{x^2 + 2x + 2}dx\right]$$

$$= 2x - \left[10\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{2x}{x^2 + 2x + 2} - 7\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}\right]$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x + 2;\ du = dx;\ u = x^2 + 2x + 2;\ du = (2x + 2)\ dx}$

$$= 2x - \left[10\int \frac{du}{u} - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - (7-2)\int \frac{dx}{(x+1)^2+1}\right]$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x + 1;\ du = dx}$

$$= 2x - \left[10ln|u| - \int \frac{du}{u} - 5\int \frac{du}{u^2+1}\right]$$

$$= 2x - [10ln|x+2| - ln|x^2+2x+2| - 5tan^{-1}(x+1) + C]$$

$\boldsymbol{Respuesta: 2x - 10ln|x+2| + ln|x^2+2x+2| + 5tan^{-1}(x+1) + C}$

$$\boldsymbol{32.-Resolver: \int \frac{(sen^3 t - 8sen^2 t - 1)cos\ t}{(sent+3)(sen^2 t - 4sent - 5)} dt}$$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\ t;\ du = cos\ t\ dt}$

$$= \int \frac{u^3 - 8u^2 - 1}{(u+3)(u^2-4u-5)} du = \int du - \int \frac{7u^2 - 17u - 14}{u^3 - u^2 - 17u - 15} du$$

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$\Rightarrow \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u-5} + \frac{C}{u+1}$$

$$\Rightarrow 7u^2 - 17u - 14 = A(u-5)(u+1) + B(u+3)(u+1) + C(u+3)(u-5)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\Rightarrow u = -3;\ 27 + 51 - 14 = A(-8)(-2); 64 = 16A;\ A = \frac{64}{16} = \mathbf{4}$$

$$\Rightarrow u = 5;\ 175 - 85 - 14 = B(8)(6);\ 76 = 48B;\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\frac{19}{12}}$$

$$\Rightarrow u = -1;\ 7 + 17 - 14 = C(2)(-6);\ \ 10 = -12C;\ \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

$$= \int du - \left[4\int \frac{du}{u+3} + \frac{19}{12}\int \frac{du}{u-5} - \frac{5}{6}\int \frac{du}{u+1}\right]$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{z = u + 3;\ dz = du;\ z = u - 5;\ dz = du;\ z = u + 1;\ dz = du}$

$$= u - \left[4\int \frac{dz}{z} + \frac{19}{12}\int \frac{dz}{z} - \frac{5}{6}\int \frac{dz}{z}\right]$$

$$= u - \left[4ln|z| + \frac{19}{12}ln|z| - \frac{5}{6}ln|z|\right] + C$$
$$= u - \left[4ln|u+3| + \frac{19}{12}ln|u-5| - \frac{5}{6}ln|u+1|\right] + C$$
$$= u - 4\ ln|u+3| - \frac{19}{12}ln|u-5| + \frac{5}{6}ln|u+1| + C$$
$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{u - 4\ ln|sent\ + 3| - \frac{19}{12}ln|sent - 5| + \frac{5}{6}ln|sent + 1|}$$
$$\boldsymbol{+ C}$$

$$\mathbf{33.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \boldsymbol{\frac{9t^2 - 25t - 5}{3t^2 - 5t - 2}dt}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\frac{A}{(3t+1)} + \frac{B}{(t-2)}$$
$$9t^2 - 25t - 5 = A(t-2) + B(3t+1)$$
$$\Rightarrow t = -\frac{1}{3};\ 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 25\left(-\frac{1}{3}\right) - 5 = A\left(-\frac{1}{3} - 2\right)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow 1 + \frac{25}{3} - 5 = A\left(-\frac{7}{3}\right);\ \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\frac{13}{7}}$$
$$\Rightarrow t = 2;\ 9(2)^2 - 26(2) - 5 = B(3(2) + 7)$$
$$\Rightarrow 36 - 52 - 5 = B(6+7);\ -21 = 13B;\ \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\frac{21}{13}}$$
$$= \int -\frac{13/7}{(3t+1)} - \frac{21}{13(\ t-2)}dt = -\frac{13}{7}\int \frac{dt}{(3t+1)} - \frac{21}{13}\int \frac{dt}{(\ t-2)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$$\boldsymbol{u = 3t + 1; du = 3dt;\ u = t - 2;\ du = dt}$$
$$= -\frac{13}{21}\int \frac{du}{u} - \frac{21}{13}\int \frac{du}{u} = -\frac{13}{21}lnu - \frac{21}{13}lnu + C$$
$$\boldsymbol{Respuesta}: -\boldsymbol{\frac{13}{21}ln|3t+1| - \frac{21}{13}ln|t-2| + C}$$

$$\mathbf{34.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dt}}{(\boldsymbol{t}+\mathbf{2})^2(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales: 2 factores repetidos y 1 factor distinto:

$$\frac{A}{(t+2)}+\frac{B}{(t+2)^2}+\frac{C}{(t+1)}$$

$$1 = A(t+2)(t+1) + B(t+1) + C(t+2)^2$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\Rightarrow t = -2; 1 = B(-1);\ \boldsymbol{B} = \mathbf{-1}$$

$$\Rightarrow t = -1; 1 = C(1); \boldsymbol{C} = \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(t^2 + t + 2t + 2) + Bt + B + C(t^2 + 4t + 4)$$

$$\Rightarrow 1 = At^2 + 3At + 2A + Bt + B + Ct^2 + 4Ct + 4C$$

$$\Rightarrow 1 = (A+C)t^2 + (3A + B + 4C)t + 2A + B + 4C$$

$$\Rightarrow A + C = 0;\ A + 1 = 0;\ \boldsymbol{A} = \mathbf{-1}$$

$$= \int -\frac{1}{(t+2)} - \frac{1}{3(t+2)^2} + \frac{1}{t+1}\, dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{(t+2)} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t+2)^2} + \int \frac{dt}{(t+1)} =$$

$$= -\int \frac{da}{a} - \frac{1}{3}\int \frac{da}{a^2} + \int \frac{da}{a} = -\, ln|a| + \frac{1}{3}\ a^{-1} + ln\,|a| + C$$

$$= -\,ln|a| + \frac{1}{3a} + l\,n|a| + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{t} - \mathbf{2}| - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{t} + \mathbf{6}} + \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{t} + \mathbf{1}| + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{35.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}^3 + \mathbf{3}\boldsymbol{x}^2}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales; 2 factores repetidos y 1 factor distinto:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}$$

$$1 = Ax(x+3) + B(x+3) + Cx^2$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\Rightarrow x = 0;\ 1 = B(0+3);\ 1 = B(3);\ \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

$\Rightarrow x = -3;\ 1 = C(-3)^2;\ 1 = C(9);\ \boldsymbol{C = \frac{1}{9}}$

$\Rightarrow 1 = Ax^2 + 3Ax + Bx + 3B + Cx^2$

$\Rightarrow 1 = (A + C)x^2 + (3A + B)x + 3B$

$\Rightarrow A + C = 0;\ A + \frac{1}{9} = 0;\ \boldsymbol{A = -\frac{1}{9}}$

$= \int -\frac{1}{9x}dx + \int \frac{1}{3x^2}dx + \int \frac{1}{9(x+3)}dx =$

$= -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x+3)} =$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x + 3;\ du = dx}$

$= -\frac{1}{9}\,lnx + \frac{1}{3}\int x^{-2}dx + \frac{1}{9}\int \frac{du}{u} =$

$= -\frac{1}{9}\,lnx + \frac{1}{3}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + \frac{1}{9}ln|u| + C =$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\frac{1}{9}lnx - \frac{1}{3x} + \frac{1}{9}ln|x+3| + C}$

36.–*Resolver*: $\boldsymbol{\int \frac{w^2 + 4w - 1}{w^3 - w}dw}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$\frac{A}{w} + \frac{B}{w-1} + \frac{C}{w+1}$

$w^2 + 4w - 1 = A(w-1)(w+1) + Bw(w+1) + Cw(w-1)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow w = 0;\ -1 = A(0-1)(0+1);\ -1 = -A;\ \boldsymbol{A = 1}$

$\Rightarrow w = 1;\ 1 + 4 - 1 = B(1)(1+1);\ 4 = 2B;\ \boldsymbol{B = 2}$

$\Rightarrow w = -1;\ 1 - 4 - 1 = C(-1)(-1-1);\ -4 = 2C;\ \boldsymbol{C = -2}$

$= \int \frac{dw}{w} + \int \frac{2}{w-1}dw - \int \frac{2}{w+1}dw =$

$= \int \frac{dw}{w} + 2\int \frac{dw}{w-1} - 2\int \frac{dw}{w+1}$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = w - 1;\ du = dw;\ u = w + 1;\ du = dw}$

$$= ln|w| + 2\int \frac{du}{u} - 2\int \frac{du}{u} = ln|w| + 2\,ln|u| - 2\,ln|u| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln|w| + 2\,ln|w-1| - 2\,ln|w+1| + C}$

$\boldsymbol{37. - Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{x+4}{x^3+4x}dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x + 4 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\Rightarrow x = 0;\ 4 = A(4);\ \boldsymbol{A = 1}$$

$$\Rightarrow x + 4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$\Rightarrow x + 4 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

$$\Rightarrow A + B = 0;\ 1 + B = 0;\ \boldsymbol{B = -1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C = 1}$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{(-x+1)}{x^2+4}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x-1}{x^2+4}dx =$$

$$= lnx - \left(\int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{dx}{x^2+4}\right) =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = x^2 + 4;\ da = 2xdx}$

$$= ln\,x - \frac{1}{2}\int \frac{da}{a} + \int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= ln\,x - \frac{1}{2}ln\,a + \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln\,x - \frac{1}{2}ln\left|x^2+4\right| + \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C}$

$\boldsymbol{38. - Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{3t}{2t^4+5t^2+2}dt}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos distintos:

$$\frac{At+B}{(2t^2+1)}+\frac{Ct+D}{(t^2+2)}$$
$\Rightarrow 3t = (At+B)(t^2+2)+(Ct+D)(2t^2+1)$
$\Rightarrow 3t = At^3+2At+Bt^2+2B+2Ct^3+Ct+2Dt^2+D$
$\Rightarrow 3t = t^3(A+2C)+t^2(B+2D)+t(2A+C)+2B+D$
Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:
$\Rightarrow A+2C=0; A=-2C;\ \boldsymbol{A=2}$
$\Rightarrow B+2D=0;\ B=-2D;\ \boldsymbol{B=0}$
$\Rightarrow 2A+C=3;\ 2(-2C)+C=3;\ -3C=3; \boldsymbol{C=-1}$
$$=\int\frac{2t}{2t^2+1}dt-\int\frac{t}{t^2+2}dt=$$
Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:
$\boldsymbol{a=2t^2+1}; \boldsymbol{da=4tdt};\ \boldsymbol{b=t^2+2};\ \boldsymbol{db=2tdt}$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{da}{a}-\frac{1}{2}\int\frac{db}{b}=\frac{1}{2}ln|a|-\frac{1}{2}ln|b|+C$$
$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{2}ln\left|2t^2+1\right|-\frac{1}{2}ln\left|t^2+2\right|+C}$

$\boldsymbol{39.-Resolver}$: $\displaystyle\int\boldsymbol{\frac{2x-6}{x^2-4x\ \ +3}}$

Solución.-
Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:
$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$
$\Rightarrow 2x-6=A(x-1)+B(x-3)$
Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:
$\Rightarrow x=3; 2(3)-6=A(3-1);\ 0=A(2);\ \boldsymbol{A=0}$
$\Rightarrow x=1; 2(1)-6=B(1-3);\ -4=B(-2);\ \boldsymbol{B=2}$
Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{a=x-1};\ \boldsymbol{da=dx}$
$$=\int\frac{2}{x-1}dx=2\int\frac{da}{a}=2\ ln|a|+C=$$
$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{2\,ln|x-1|+C}$

$\mathbf{40.-}\boldsymbol{Resolver}\text{:} \displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\mathbf{16}\boldsymbol{x^4}-\mathbf{1}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 2 factores lineales distintos y 1 factor cuadrático:

$$\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}+\frac{Cx+D}{4x^2+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(2x+1)(4x^2+1)+B(2x-1)(4x^2+1) + (Cx+D)(4x^2-1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2};\ 1 = A\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2+1\right);\ 1 = 4A;\ \boldsymbol{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2};\ 1 = B\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)\left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1\right);\ 1=-4B;$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$\Rightarrow 1 = (2Ax+A)(4x^2+1)+(2Bx-B)(4x^2+1)+4Cx^3-Cx + 4Dx^2-D$$

$$\Rightarrow 1 = 8Ax^3+2Ax+4Ax^2+A+8Bx^3+2Bx-4Bx^2-B + 4Cx^3-Cx+4Dx^2-D$$

$$\Rightarrow 1 = x^3(8A+8B+4C)+x^2(4A-4B+4D)+x(2A+2B-C) + A-B-D$$

$$\Rightarrow 8A+8B+4C=0;\ 8\left(\frac{1}{4}\right)+8\left(-\frac{1}{4}\right)+4C=0;\ 2-2+4C=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow 4A-4B+4D=0;\ 4\left(\frac{1}{4}\right)-4\left(-\frac{1}{4}\right)+4D=0$$

$$\Rightarrow 2+4D=0;\ \boldsymbol{D}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$=\int\frac{1}{4(2x-1)}dx-\int\frac{1}{4(2x+1)}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{4x^2+1}=$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{1};\ \boldsymbol{da}=\mathbf{2}\boldsymbol{dx};\ \boldsymbol{b}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1};\ \boldsymbol{db}=\mathbf{2}\boldsymbol{dx}$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{da}{a}-\frac{1}{8}\int\frac{db}{b}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{4x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{8}ln|a|-\frac{1}{8}ln|b|-\frac{1}{2}tan^{-1}(2x)+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{1}{8} ln|2x-1| - \frac{1}{8} ln|2x+1| - \frac{1}{2} tan^{-1}(2x) + C$$

$$41.- \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{4+5x^2}{4x+x^3} dx$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$\Rightarrow 4+5x^2 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = 0;\ 4 = A(0+4);\ 4 = 4A;\ \boldsymbol{A = 1}$

$\Rightarrow 4+5x^2 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$

$\Rightarrow 4+5x^2 = x^2(A+B) + Cx + 4A$

$\Rightarrow A + B = 5;\ 1 + B = 5;\ \boldsymbol{B = 4}$

$\Rightarrow \boldsymbol{C = 0}$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{4x}{x^2+4} dx = lnx + \int \frac{2*2x}{x^2+4} dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^2 + 4;\ du = 2xdx}$

$$= lnx + 2\int \frac{2x}{x^2+4} dx = lnx + 2\int \frac{du}{u} =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln\,x + 2\,ln\,u + C = ln|x| + 2ln\left|x^2+4\right| + C}$$

$$42.- \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{x}{x^3+2x^2+x} dx$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 1 factor lineal distinto y 2 factores lineales repetidos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$\Rightarrow x = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = 0;\ 0 = A(0+1)^2;\ \boldsymbol{A = 0}$

$\Rightarrow x = -1;\ -1 = C(-1);\ \boldsymbol{C = 1}$

$\Rightarrow x = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$

$\Rightarrow x = x^2(A + B) + x(2A + B + C) + A$

$\Rightarrow A + B = 0;\ \boldsymbol{B = 0}$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x + 1;\ du = dx}$

$= -u^{-1} + C = -(x+1)^{-1} + C =$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-\frac{1}{x+1} + C}$

$\boldsymbol{43.-\ Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{5x^2 - 3x + 18}{9x - x^3}dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 1 factor lineal distinto y 2 factores lineales repetidos:

$$\frac{A}{x} - \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3}$$

$5x^2 - 3x + 18 = A(x^2 - 9) - Bx(x+3) + Cx(x-3)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = 0; 18 = A(0 - 9); 18 = -9A;\ \boldsymbol{A = -2}$

$\Rightarrow x = 3;\ 45 - 9 + 18 = -B(3)(6); 54 = -18B;\ \boldsymbol{B = -3}$

$\Rightarrow x = -3;\ 45 + 9 + 18 = C(18);\ 72 = 18C;\ \boldsymbol{C = 4}$

$$= -\int \frac{2}{x}dx + 3\int \frac{dx}{x-3} + 4\int \frac{dx}{x+3} =$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a = x + 3;\ da = dx;\ b = x - 3;\ db = dx}$

$$= -2ln|x| + 3\int \frac{db}{b} + 4\int \frac{da}{a} = 2ln|x| + 3ln|b| + 4ln|a| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{2ln|x| + 3ln|x - 3| + 4ln|x + 3| + C}$

$\boldsymbol{44.-Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{5x^3 - 4x}{x^4 - 16}dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 2 factores lineales distintos y 1 factor cuadrático:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

$5x^3 - 4x = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2 - 4)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\Rightarrow x = 2; 40 - 8 = A(4)(8);\ 32 = 32\,A;\ \ \boldsymbol{A = 1}$

$\Rightarrow x = -2;\ -40 + 8 = B\,(-4)(8);\ -32 = \ -32\,B;\ \boldsymbol{B = 1}$

$\Rightarrow\ 5x^3 - 4x = Ax^3 + 4Ax + 2Ax^2 + 8A + Bx^3 + 4Bx - 2Bx^2 - 8B + Cx^3 - 4\,Cx + Dx^2 - 4D$

$\Rightarrow 5x^3 - 4x = x^3(\,A + B + C) + x^2\,(2A - 2B + D) + x(4A + 4B - 4C) + 8A - 8B - 4D$

$\Rightarrow A + B + C\, = 5; 1 + 1 + C\, = 5; \boldsymbol{C\, = 3}$

$\Rightarrow 2A - 2B + D\, = 0; 2 - 2 + D = 0; \boldsymbol{D = 0}$

$= \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{3x}{x^2+4}dx =$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a = x - 2;\ da = dx;\ b = x + 2;\ db = dx; c = x^2 + 4; dc = 2x\ dx}$

$= \int \frac{da}{a} + \int \frac{db}{b} - \frac{3}{2}\int \frac{dc}{c} = \ ln|a| + ln|b| - \frac{3}{2}ln|c| + C$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln|x - 2| + ln|x + 2| - \frac{3}{2}ln\left|x^2 + 4\right| + C}$

45.–*Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{x^2 + 3x + 3}{x^3 + 10x^2 + 25x}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 1 factor lineal y 2 factores lineales repetidos:

$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{(x+5)^2}$

$x^2 + 3x + 3 = A(x+5)^2 + Bx(x+5) + Cx$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = 0; 3 = 25\,A;\ \boldsymbol{A = \frac{3}{25}}$

$\Rightarrow x = -5;\ 25 - 15 + 3 = \ -5C;\ \boldsymbol{C = -\frac{13}{5}}$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 3\, = Ax^2 + 10Ax + 25A + Bx^2 + 5Bx + Cx$

$\Rightarrow A + B\, = 1; \frac{3}{25} + B\, = 1;\ \ \boldsymbol{B = \frac{22}{25}}$

$$= \int \frac{3}{25x}dx + \int \frac{22}{25(x+5)}dx - \int \frac{13}{5(x+5)^2}dx =$$

$$= \frac{3}{25}\int \frac{dx}{x} + \frac{22}{25}\int \frac{dx}{x+5} - \frac{13}{5}\int \frac{dx}{(x+5)^2} =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$a = x+5;\ da = dx$

$$= \frac{3}{25}ln|x| + \frac{22}{25}\int \frac{da}{a} - \frac{13}{5}\int \frac{da}{(a)^2} =$$

$$= \frac{3}{25}ln|x| + \frac{22}{25}ln|a| - \frac{13}{5}\int a^{-2} =$$

$$= \frac{3}{25}ln|x| + \frac{22}{25}ln|a| + \frac{13}{5}a^{-1} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{\frac{3}{25}ln|x| + \frac{22}{25}ln|x+5| + \frac{13}{5}(x+5)^{-1} + C}$$

$$\boldsymbol{46. - Resolver}: \int \boldsymbol{\frac{1+t}{9t^4+t^2}dt}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 2 factores lineales repetidos y 1 factor cuadrático:

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{(9t^2+1)}$$

$\Rightarrow 1 + t = At(9t^2+1) + B(9t^2+1) + (Ct+D)t^2$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\Rightarrow t = 0;\ \boldsymbol{B = 1}$

$\Rightarrow 1 + t = 9At^3 + At + 9Bt^2 + B + Ct^3 + Dt^2$

$\Rightarrow 9B + D = 0; 9 + D = 0; \boldsymbol{D = -9}$

$\Rightarrow \boldsymbol{A = 1}$

$\Rightarrow 9A + C = 0; 9 + C = 0; \boldsymbol{C = -9}$

$$= \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{t^2} + \int \frac{-9t-9}{(9t^2+1)}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t^2} - \left(9\int \frac{t}{(9t^2+1)}dt + 9\int \frac{dt}{(9t^2+1)}\right) =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = 9t^2 + 1;\ da = 18t\ dt}$

$$= ln|t| + \int t^{-2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{da}{a} - tan^{-1}3t =$$

$= ln|t| - t^{-1} - \frac{1}{2} ln|a| - tan^{-1}(3t) + C$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln|t| - t^{-1} - \frac{1}{2} ln\left|9t^2 + 1\right| - tan^{-1}(3t) + C}$

$\boldsymbol{47.-Resolver}$: $\int \frac{\boldsymbol{12\ y}}{\boldsymbol{6y^2 - 7y - 3}} \boldsymbol{dy}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$\frac{A}{2y-3} + \frac{B}{3y+1}$

$12y = A(3y+1) + B(2y-3)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}; 18 = \frac{11}{2}A;\ \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{36}}{\boldsymbol{11}}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3};\ -4 = B\left(-\frac{11}{3}\right);\ \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{12}}{\boldsymbol{11}}$

$= \int \frac{36}{11(2y-3)} dy + \int \frac{12}{11(3y+1)} dy =$

$= \frac{36}{11} \int \frac{dy}{(2y-3)} + \frac{12}{11} \int \frac{dy}{(3y+1)} =$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a = 2y - 3;\ da = 2dy;\ b = 3y + 1;\ db = 3dy}$

$= \frac{18}{11} \int \frac{da}{a} + \frac{4}{11} \int \frac{db}{b} = \frac{18}{11} ln|a| + \frac{4}{11} ln|b| + C$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{18}{11} ln|2y-3| + \frac{4}{11} ln|3y+1| + C}$

$\boldsymbol{48.-Resolver}$: $\int \frac{\boldsymbol{2x^2 + 2}}{\boldsymbol{x^2 - x - 6}} \boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$

$2x^2 + 2 = A(x+2) + B(x-3)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow x = 3; 18 + 2 = 5A; 20 = 5A;\ \boldsymbol{A = 4}$

$\Rightarrow x = -2; 8 + 2 = -5B; 10 = -5B;\ \boldsymbol{B = -2}$

$$= \int \frac{4}{(x-3)} dx - \int \frac{2}{(x+2)} dx = 4\int \frac{dx}{(x-3)} - 2\int \frac{dx}{(x+2)} =$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a = x - 3;\ da = dx;\ b = x + 2;\ db = dx}$

$$= 4\int \frac{da}{a} - 2\int \frac{db}{b} = 4ln|a| - 2ln|b| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta: 4ln|x-3| - 2ln|x+2| + C}$

$\boldsymbol{49.-Resolver: \int \frac{3x-2}{x^2+2x} dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$3x - 2 = A(x+2) + Bx$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow x = 0;\ -2 = 2A;\ \boldsymbol{A = -1}$

$\Rightarrow x = -2;\ -6 - 2 = -2B;\ -8 = -2B;\ \boldsymbol{B = 4}$

$$= \int -\frac{1}{x} dx + \int \frac{4}{(x+2)} = -\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{dx}{(x+2)} =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = x + 2;\ da = dx}$

$$= -\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{da}{a} = -\ ln|x| + 4ln|a| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta: -ln|x| + 4ln|x+2| + C}$

$\boldsymbol{50.- Resolver: \int \frac{2x-12}{3x^2-10x-8} dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\boldsymbol{\frac{A}{3x+2} + \frac{B}{x-4}}$$

$2x - 12 = A(x-4) + B(3x+2)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3} - 12 = -\frac{14}{3}A;\ -\frac{40}{3} = -\frac{14}{3}A;\ \boldsymbol{A = \frac{20}{7}}$

$\Rightarrow x = 4;\ 8 - 12 = 14\,B;\ -4 = 14B;\ \boldsymbol{B = -\frac{2}{7}}$

$= \int \frac{20}{7(3x+2)}dx - \int \frac{2}{7(x-4)}dx = \frac{20}{7}\int \frac{dx}{3x+2} - \frac{2}{7}\int \frac{dx}{(x-4)} =$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{a = 3x + 2;\ da = 3dx; b = x - 4; db = dx}$

$= \frac{20}{21} ln|3x + 2| - \frac{2}{7}\int \frac{db}{b} =$

$\boldsymbol{Respuesta: \frac{20}{21} ln|3x + 2| - \frac{2}{7} ln|x - 4| + C}$

$\boldsymbol{51. - Resolver: \int \frac{dx}{x^5 - 12x^4 + 36x^3}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 5 factores lineales repetidos:

$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x-6)} + \frac{E}{(x-6)^2}$

$1 = Ax^2(x-6)^2 + Bx(x-6)^2 + C(x-6)^2 + Dx^3(x-6) + Ex^3$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C, D y E:

$\Rightarrow x = 0; 1 = 36C;\ \boldsymbol{C = \frac{1}{36}}$

$\Rightarrow x = 6; 1 = 216\,E;\ \boldsymbol{E = \frac{1}{216}}$

$$1 = Ax^4 - 12Ax^3 + 36Ax^2 + Bx^3 - 12Bx^2 + 36Bx + Cx^2 - 12Cx + 36C + Dx^4 - 6Dx^3 + Ex^3$$

$\Rightarrow A + D = 0; -12\,A + B - 6D + E = 0; 36A - 12B + C = 0;$

$\Rightarrow 36B - 12C = 0; 36B - 12\left(\frac{1}{36}\right) = 0; 36B - \frac{1}{3} = 0;\ \boldsymbol{B = 1/108}$

$\Rightarrow 36A - 12B + C = 0; 36A - 12\left(\frac{1}{108}\right) + \frac{1}{36} = 0;\ \boldsymbol{A = \frac{1}{432}}$

$\Rightarrow A + D = 0;\ \frac{1}{432} + D = 0;\ \boldsymbol{D = -\frac{1}{432}}$

$$= \int \frac{1}{432x}dx + \int \frac{1}{108x^2}dx + \int \frac{1}{36x^3}dx - \int \frac{1}{432(x-6)}dx + \int \frac{1}{216(x-6)^2}dx$$

$$= \frac{1}{432}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{108}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{36}\int \frac{dx}{x^3} - \frac{1}{432}\int \frac{dx}{(x-6)} + \frac{1}{216}\int \frac{dx}{(x-6)^2} =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{a = x - 6;\ da = dx}$

$$= \frac{1}{432}ln|x| - \frac{1}{108}(x^{-1}) - \frac{1}{36}\left(\frac{x^{-2}}{2}\right) - \frac{1}{432}ln|a| + \frac{1}{216}\int a^{-2}da$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{432}ln|x| - \frac{1}{108x} - \frac{1}{72x^2} - \frac{1}{432}ln|x-6| - \frac{1}{216(x-6)} + C}$

$\boldsymbol{52. - Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{4x-2}{x^3 - x^2 - 2x}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$\int \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}\ dx$$

$$= \int \frac{A}{x} + \int \frac{B}{x-2} + \int \frac{C}{x+1}$$

$$4x - 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = 0;\ 0 - 2 = A(-2)(1);\ -2 = -2A; \boldsymbol{A = 1}$

$\Rightarrow x = 2;\ 4(2) - 2 = 2B(2+1);\ 6 = 6B;\ \boldsymbol{B = 1}$

$\Rightarrow x = -1;\ 4(-1) - 2 = -C(-1-2);\ -6 = 3C;\ \boldsymbol{C = -2}$

$$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x+1}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x - 2;\ du = dx;\ u = x + 1;\ du = dx}$

$$= ln|x| + ln|u| - 2ln|u| + C = ln|x| + ln|x-2| - 2ln|x+1| + C$$

$$= ln|x(x-2)| - ln|x+1|^2 + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln}\left|\frac{\boldsymbol{x(x-2)}}{\boldsymbol{(x+1)^2}}\right| + \boldsymbol{C}$

$\mathbf{53.-}$ $\boldsymbol{Resolver}$: $\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2+x-6}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$$

$$x^2 = A(x-2) + B\ (x+3)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow x=-3;\ 9=-5\,A;\ \boldsymbol{A}=-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}$$

$$\Rightarrow x=2; 4=5\,B;\ \boldsymbol{B}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

$$=\left(-\int \frac{9}{5(x+3)}\,dx+\int \frac{4}{5(x-2)}\ dx\right)=$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=x+3;\ du=dx;\ u=x-2;\ du=dx}$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $-\frac{9}{5}\int\frac{du}{u}+\frac{4}{5}\int\frac{du}{u}=\ -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{ln|x+3|}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{ln|x-2|}$ $+\boldsymbol{C}$

$\mathbf{54.-}$$\boldsymbol{Resolver}$: $\int \frac{\boldsymbol{17x-3}}{\boldsymbol{3x^2+x-2}}\ \boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\int \frac{17x-3}{(x+1)(3x-2)}=$$

$$=\int \frac{A}{x+1}+\frac{B}{3x-2}$$

$$17x-3 = A(3x-2)+B(x+1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow x=-1; -17-3=A(-3-2);\ -20\ = A(-5);\ \boldsymbol{A}=\mathbf{4}$$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3};\ 17\left(\frac{2}{3}\right) - 3 = B\left(\frac{2}{3} + 1\right);\ \frac{25}{3} = B\left(\frac{5}{3}\right);\ \boldsymbol{B = 5}$

$= 4\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{5}{3x-2}dx$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x + 1};\ \boldsymbol{du = dx};\ \boldsymbol{u = 3x - 2};\ \boldsymbol{du = 3dx}$

$= 4ln|u| + \frac{5}{3}ln|u| + C =$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{4ln|x+1| + \frac{5}{3}ln|3x-2| + C}$

$\boldsymbol{55. -Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{2x^2 + x - 4}}{\boldsymbol{x^3 - x^2 - 2x}}\ \boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$= \int \frac{2x^2 + x - 4}{x(x-2)(x+1)}dx =$

$\int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}\ dx$

$2x^2 + x - 4 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = 0;\ -4 = A(-2)(1);\ -4 = -2A;\ \boldsymbol{A = 2}$

$\Rightarrow x = 2;\ 8 + 2 - 4 = 2B(2+1);\ 6 = 6B;\ \boldsymbol{B = 1}$

$\Rightarrow x = -1;\ 2 - 1 - 4 = -C(-1-2);\ -3 = 3C;\ \boldsymbol{C = -1}$

$= 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+1} = 2ln|x| + \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u}$

$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{2ln|x| + ln|x-2| - ln|x+1| + C}$

$\boldsymbol{56. -Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{3x + 13}}{\boldsymbol{x^2 + 4x + 3}}\ \boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$\int \frac{3x + 13}{(x+3)(x+1)}\ dx$

$$= \int \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}\,dx$$

$3x + 13 = A(x+1) + B(x+3)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow x = -3; -9 + 13 = A(-3+1);\ 4 = A(-2);\ \boldsymbol{A = -2}$

$\Rightarrow x = -1;\ -3 + 13 = B(-1+3);\ 10 = B(2);\ \boldsymbol{B = 5}$

$$= -2\int \frac{dx}{x+3} + 5\int \frac{dx}{x+1} = -2\int \frac{du}{u} + 5\int \frac{du}{u}$$

$= -2\,ln|u| + 5ln|u| + C =$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{-2\,ln|x+3| + 5ln|x+1| + C}$

57.- $\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2 + 2x}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\int \frac{dx}{x(x+2)} = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$1 = A(x+2) + Bx$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$x = 0;\ 1 = A(2);\ \boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow x = -2;\ 1 = -2B;\ \boldsymbol{B = -\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{2}ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{2}ln|x+2| + C = \frac{1}{2}(ln|x| - ln|x+2|) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\displaystyle\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right) + C}$

58.- $\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{2x + 1}}{\boldsymbol{x^2 - 7x + 12}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\int \frac{2x+1}{(x-4)(x-3)}\ dx =$$

$$= \int \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3}\ dx$$

$$2x + 1 = A(x-3) + B(x-4)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow x = 4; 8 + 1 = A(4-3);\ 9 = A(1);\ \boldsymbol{A = 9}$

$\Rightarrow x = 3;\ 6 + 1 = B(3-4);\ 7 = B(-1);\ \boldsymbol{B = -7}$

$$= 9\int \frac{dx}{x-4} - 7\int \frac{dx}{x-3} = 9\int \frac{du}{u} - 7\int \frac{du}{u} = 9\ln u - 7\ln u + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\mathbf{9\ln(\boldsymbol{x}-4) - 7\ln(\boldsymbol{x}-3) + \boldsymbol{C}}$

$\mathbf{59.-}\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{y+4}}{\boldsymbol{y^2+y}}\boldsymbol{dy}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\int \frac{y+4}{y(y+1)} = \int \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}\ dy$$

$$y + 4 = A(y+1) + By$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\Rightarrow y = 0;\ 4 = A(1);\ \boldsymbol{A = 4}$

$\Rightarrow y = -1;\ -1 + 4 = B(-1);\ \boldsymbol{B = -3}$

$$= 4\int \frac{dy}{y} - 3\int \frac{dy}{y+1} = 4ln|y| - 3\int \frac{du}{u} = 4ln|y| - 3ln|u| + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{4ln|y| - 3ln|y+1| + C}$

$\mathbf{60.-}\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{t^3+t^2-2t}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$\int \frac{dt}{t(t+2)(t-1)} =$$

$$= \int \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t-1}\ dt$$

$1 = A(t+2)(t-1) + Bt(t-1) + Ct(t+2)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow t = 0;\ 1 = A(2)(-1);\ 1 = -2A;\ \boldsymbol{A} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$\Rightarrow t = -2;\ 1 = -2B(-2-1);\ 1 = 6B;\ \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

$\Rightarrow t = 1;\ 1 = C(1+2);\ 1 = C(3);\ \boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} ln|t| + \frac{1}{6} ln|u| + \frac{1}{3} ln|u| + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{-\frac{1}{2} ln|t| + \frac{1}{6} ln|t+2| + \frac{1}{3} ln|t-1| + C}$

61.−*Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{\cos x}{sen^2 x - 6sen\, x + 12}\, dx}$

Solución.-

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = sen\ x;\ du = \cos x\ dx}$

$$= \int \frac{du}{u^2 - 6u + 12} = \int \frac{du}{(u-3)^2 + 3} =$$

$\boldsymbol{x = u - 3;\ dx = du;\ \sqrt{a^2} = \sqrt{3};\ a = \sqrt{3}}$

Se aplica la integral estándar del arco tangente:

$$= \int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ tg^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ tg^{-1}\left(\frac{u-3}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}\ tg^{-1}\left(\frac{sen\ x - 3}{\sqrt{3}}\right) + C}$

62.−*Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{7x^2 + 2x - 3}{(2x-1)(3x+2)(x+3)} dx}$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$= \frac{7x^2 + 2x - 3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(3x+2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$\frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}$$
$$=\frac{A(3x+2)(x-3)+B(2x-1)(x-3)+C(2x-1)(3x+2)}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}$$
$$7x^2+2x-3 = A(3x+2)(x-3)+B(2x-1)(x-3)+C(2x-1)(3x+2)$$
$$7x^2+2x-3 = 3x^2A-7xA-6A+2x^2B-7xB+3B+6x^2C+xC-2C$$
$$7x^2+2x-3 = x^2(3A+2B+6C)+x(-7A-7B+C)+(-6A+3B-2C)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C, mediante un sistema de ecuaciones por medio del método de igualación:

$$\Rightarrow 3A+2B+6C=7;\ -7A-7B+C=2;\ -6A+3B-2C=-3$$
$$\Rightarrow (\mathbf{7})\ 3A+2B+6C=7 \qquad (\mathbf{3})\ -7A-7B+C=2$$
$$(\mathbf{2})-7A-7B+C=2 \qquad (\mathbf{7})-6A+3B-2C=-3$$
$$\Rightarrow 21A+14B+42C=49 \qquad -21A-21B+3C=6$$
$$\underline{-14A-14B+2C=4} \qquad \underline{-42A+21B-14C=-21}$$
$$7A \quad +44C=53 \qquad -63A \quad -11C=-15$$
$$\Rightarrow (\mathbf{9})\ 7A+44C=53$$
$$-63A-11C=-15$$
$$\Rightarrow 63A+396\,C=477$$
$$\underline{-63A-11\,C=-15}$$
$$385\,C=462 \Rightarrow \boldsymbol{C}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$$
$$\Rightarrow -63A-11\left(\frac{6}{5}\right)=-15 \Rightarrow \boldsymbol{A}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{35}}$$
$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{35}\right)+2B+6\left(\frac{6}{5}\right)=7 \Rightarrow \boldsymbol{B}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$
$$=\int\frac{A}{(2x-1)}dx+\int\frac{B}{(3x+2)}dx+\int\frac{C}{(x-3)}dx$$
$$=\int\frac{1}{35(2x-1)}dx+\int-\frac{1}{7(3x+2)}dx+\int\frac{6}{5(x-3)}dx$$
$$=\frac{1}{35}*\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{7}*\frac{1}{3}\int\frac{dv}{v}+\frac{6}{5}\int\frac{dw}{w}$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{70}}\boldsymbol{ln}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{21}}\boldsymbol{ln}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2})+\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})+\boldsymbol{C}$

$$\mathbf{63.-\textit{Resolver}}: \int \frac{\boldsymbol{6x^2+22x-23}}{\boldsymbol{(2x-1)(x^2+x-6)}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$= \int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x+3)(x-2)}dx$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x+3)(x-2)} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x-2)}$$

$$= \frac{A(x+3)(x-2)+B(2x-1)(x-2)+C(2x-1)(x+3)}{(2x-1)(x+3)(x-2)}$$

$$6x^2+22x-23 = A(x+3)(x-2)+B(2x-1)(x-2)+C(2x-1)(x+3)$$

$$6x^2+22x-23 = Ax^2+Ax-6A+2Bx^2-5Bx+2B+2Cx^2+5Cx-3C$$

$$6x^2+22x-23 = x^2(A+2B+2C)+x(A-5B+5C)+(-6A+2B-3C)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C, Aplicamos matrices

$$A+2B+2C=6$$

$$A-5B+5C=22$$

$$-6A+2B-3C=-23$$

ENCONTRAR LA DETERMINATE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 1\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K} = 1(15-10)-2(-3+30)+2(2-30)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{K} = 5-2(27)+2(-28) = \mathbf{-105}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 22 & -5 & 5 \\ -23 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{K}$$

$$A = \frac{6\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 22 & 5 \\ -23 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 22 & -5 \\ -23 & 2 \end{vmatrix}}{K}$$

$$A = \frac{6(15-10) - 2(-66+115) + 2(44-115)}{K}$$

$$A = \frac{6(5) - 2(49) + 2(-71)}{-105} = \frac{-210}{-105} = \mathbf{2}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 22 & 5 \\ -6 & -23 & -3 \end{vmatrix}}{K}$$

$$B = \frac{1\begin{vmatrix} 22 & 5 \\ -23 & -3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 22 \\ -6 & -23 \end{vmatrix}}{K}$$

$$B = \frac{1(-66+115) - 6(-3+30) + 2(-23+132)}{-105} = -\frac{105}{105} = \mathbf{-1}$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & -5 & 22 \\ -6 & 2 & -23 \end{vmatrix}}{K}$$

$$C = \frac{1\begin{vmatrix} -5 & 22 \\ 2 & -23 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 22 \\ -6 & -23 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}}{K}$$

$$C = \frac{1(115-44) - 2(-23+132) + 6(2-30)}{-105} = \frac{-315}{-105} = \mathbf{3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{A}{2x-1}dx + \int \frac{B}{x+3}dx + \int \frac{C}{x-2}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{2x-1}dx + \int \frac{-1}{x+3}dx + \int \frac{3}{x-2}dx$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = 2x-1;\ du = 2dx;\ v = x+3;\ dv = dx;\ w = x-2;\ dw = dx};$

$$= \int \frac{du}{u} - \int \frac{dv}{v} + 3\int \frac{dw}{w} = \ ln(u) - ln(v) + 3\,ln(w) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{ln(2x-1) - ln(x+3) + 3\,ln(x-2) + C}$

64.$\boldsymbol{-Resolver}$: $\int \frac{\boldsymbol{x^3-6x^2+11x-6}}{\boldsymbol{4x^3-28x^2+56x-32}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{4(x^3-7x^2+14x-8)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-7x^2+14x-8)}$$

Se aplica Rufiini para encontrar los 3 factores lineales distintos:

1	-6	11	-6	⌋	$\mathbf{1 \Rightarrow x-1=0 \ \Rightarrow x=1}$
	1	-5	+6		
1	-5	6	0	⌋	$\mathbf{2 \Rightarrow x-2=0 \ \Rightarrow x=2}$
	2	-6	0		
1	-3				

$\Rightarrow \boldsymbol{x-3=0 \ \Rightarrow x=3}$

1	-7	14	-8	⌋	$\mathbf{1 \Rightarrow x-1=0 \ \Rightarrow x=1}$
	1	-6	+8		
1	-6	8	0	⌋	$\mathbf{22 \Rightarrow x-2=0 \ \Rightarrow x=2}$
	2	-8	0		
1	-4	0			

$\Rightarrow \boldsymbol{x-4=0 \ \Rightarrow x=4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{(x-1)(x-4)(x-2)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(x-3)}{(x-4)}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{x-3-1+1}{x-4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(x-4)+1}{x-4}dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int \frac{(x-4)}{(x-4)}dx + \int \frac{1}{(x-4)}dx\right)$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x-4;\ du = dx}$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx + \int \frac{du}{u}\right) = \frac{1}{4}(x - ln(u)) \ + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}ln(x-4) + C}$

$\boldsymbol{65.-Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{x^3}{x^2+x-2}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\int \frac{x^3}{(x+2)(x-1)}dx$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)}$$

$$\Rightarrow x^3 = A(x-1) + B(x+2)$$

$$\Rightarrow x = -2\,;\;\; (-2)^3 = A(-2-1) + B(-2+2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow -8 = A(-3) + B(0) \Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

$$\Rightarrow x = 1;\; 1^3 = A(1-1) + B(1+2);\;\; 1 = 3B;\; \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

$$= \int \frac{A}{(x+2)}dx + \int \frac{B}{(x-1)}dx = \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x + 2};\; \boldsymbol{du = dx};\; \boldsymbol{v = x - 1};\; \boldsymbol{dv = dx}$

$$= \frac{8}{3}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} = \frac{8}{3}ln(u) + \frac{1}{3}ln(v) + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{66.}-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x^3 + x^2}}{\boldsymbol{x^2 + 5x + 6}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$\int \frac{x^3 + x^2}{(x+3)(x+2)}dx$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + x^2}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + x^2}{(x+3)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x+3)}{(x+3)(x+2)}$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 = A(x+2) + B(x+3)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = -\mathbf{2}\;;\; -2^3 + (-2)^2 = A(-2+2) + B(-2+3) \Rightarrow$$

$$-8 + 4 = B \Rightarrow \boldsymbol{B} = -\mathbf{4}$$

$$\Rightarrow x = -3;\; (-3)^3 + (-3)^2 = A(-3+2) + B(-3+3)$$

$$\Rightarrow -27+9= -A;\ \boldsymbol{A=18}$$

$$=\int \frac{x^3+x^2}{x^2+5x+6}dx=\int \frac{18}{(x+3)}dx+\int \frac{-4}{(x+2)}dx$$

$$=18\int \frac{dx}{(x+3)}-4\int \frac{dx}{(x+2)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=x+3;\ du=dx;\ v=x+2;\ dv=dx}$

$$=18\int \frac{du}{u}-4\int \frac{dv}{v}=18\,ln(u)-4\,ln(v)+c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{18\,ln(x+3)-4\,ln(x+2)+C}$

$\boldsymbol{67.-Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{x-3}{x^3+x^2}dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$\int \frac{x-3}{x^2(x+1)}$$

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{(x+1)}$$

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)}=\frac{(Ax+B)(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$x-3=(Ax+B)(x+1)+Cx^2$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x=-1;\ -1-3=(A(-1)+B)(-1+1)+C(-1)^2;\ \boldsymbol{C=-4};$

$\Rightarrow x=0;\ 0-3=(A(0)+B)(0+1)+C(0)^2;\ \boldsymbol{B=-3}$

$\Rightarrow x-3=\big(Ax+(-3)\big)(x+1)+(-4)x^2$

$x-3=(Ax-3)(x+1)+4x^2$

$x-3=Ax^2+Ax-3x-3+4x^2$

$x+3x+4x^2=Ax^2+Ax$

$$\Rightarrow A(x^2+x)=4(x^2+x);\ A=\frac{4(x^2+x)}{(x^2+x)};\ \boldsymbol{A=4}$$

$$=\int \frac{4x-3}{x^2}dx-4\int \frac{dx}{(x+1)}=\int \frac{4x}{x^2}dx-\int \frac{3}{x^2}dx-4\int \frac{dx}{(x+1)}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=x+1;\ du=dx}$

$$= 4\int \frac{dx}{x} - 3\int x^{-2}dx - 4\int \frac{du}{u} = 4lnx - \frac{3x^{-1}}{-1} - 4\,ln(u) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{3}{x} + 4\,ln(x) - 4\,ln(x+1) + C}$

68.–*Resolver*: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{2x^2+13x+18}{x^3+6x^2+9x}dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales:

$$\int \frac{2x^2+13x+18}{x(x^2+6x+9)}$$

$$= \int \frac{2x^2+13x+18}{x(x+3)^2} = \frac{2x^2+13x+18}{x(x+3)^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)}$$

$$\frac{2x^2+13x+18}{x(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + Bx + Cx(x+3)}{x(x+3)^2}$$

$$2x^2+13x+18 = A(x+3)^2 + Bx + Cx(x+3)$$

$$2x^2+13x+18 = Ax^2 + 6Ax + 9A + Bx + Cx^2 + 3Cx$$

$$2x^2+13x+18 = x^2(A+C) + x(6A+B+3C) + 9A$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$A + C = 2;\ 6A + B + 3C = 13;\ 9A = 18 \Rightarrow \boldsymbol{A = 2}$

$\boldsymbol{C = 0};\ \boldsymbol{B = 1}$

$$= \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{(x+3)^2}dx + \int \frac{C}{(x+3)}dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x + 3;\ du = dx}$

$$= \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{dx}{(x+3)^2} + \int \frac{0}{(x+3)}dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int u^{-2}du$$

$$= 2\,ln(x) + \frac{u^{-1}}{-1} + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{2\,ln(x) - \frac{1}{x+3} + C}$

$$\mathbf{69.-\ Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^3+2x^2+x+2}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$\int \frac{x}{x^2(x+2)+1(x+2)}dx$$

$$=\int \frac{x}{(x+2)(x^2+1)}dx$$

$$\frac{x}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$\frac{x}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$x=\ A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)$$

$$\Rightarrow x=-2;\ -2=A((-2)^2+1)+(B(-2)+C)(-2+2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\boldsymbol{A}=-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$

$$\Rightarrow x=Ax^2+a+Bx^2+2Bx+Cx+2C$$

$$\Rightarrow (A+B)=0;-\frac{2}{5}+B=0;\boldsymbol{B}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}$$

$$\Rightarrow (2B+C)=1;2\left(\frac{2}{5}\right)+C=1;\ \frac{4}{5}+C=1;\quad \boldsymbol{C}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$$

$$=\int\frac{A}{(x+2)}dx+\int\frac{Bx+C}{(x^2+1)}dx=-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{5}\int\frac{2x+1}{(x^2+1)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=x+2;\ du=dx;\ v=x^2+1;\ dv=2x\ dx}$

$$=-\frac{2}{5}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{5}\left(\int\frac{dv}{v}+\int\frac{dx}{x^2+1}\right)$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{ln(x+2)}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\left(\boldsymbol{ln(x^2+1)}+\boldsymbol{tan^{-1}x}\right)+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{70.-Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{(x-1)(x^2+2x+1)}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}dx$$
$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$
$$x^2 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$
$$\Rightarrow x = -1;\ -1^2$$
$$= A(-1+1)^2 + B(-1-1)(-1+1) + C(-1-1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\boldsymbol{C = -\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow x = 1;\quad 1^2 = A(1+1)^2 + B(1-1)(1+1) + C(1-1)$$
$$\boldsymbol{A = \frac{1}{4}}$$
$$x^2 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$
$$x^2 = A(x^2+2x+1) + B(x^2-1) + C(x-1)$$
$$4x^2 = 4Bx^2 - 4B + x^2 + 2x + 1 - 2x + 2$$
$$4B(x^2-1) = 3(x^2-1)$$
$$4B = \frac{3(x^2-1)}{(x^2-1)};\ 4B = 3;\ \boldsymbol{B = \frac{3}{4}}$$
$$= \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x+1)}dx + \int \frac{C}{(x+1)^2}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x - 1;\ du = dx;\ v = x + 1;\ dv = dx}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} + \frac{3}{4}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2}$$

$$\boldsymbol{Respuesta: \frac{1}{4}ln(u) - \frac{3}{4}ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} + C}$$

$$\boldsymbol{71.-Resolver: \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales:

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}$$
$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$\Rightarrow 1=A(x+3)+B(x+2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow x=-3;\ 1=A(-3+3)+B(-3+2);\ \boldsymbol{B=-1}$$
$$\Rightarrow x=-2;\ 1=A(-2+3)+B(-2+2);\ \boldsymbol{A=1}$$
$$=\int\frac{A}{(x+2)}dx+\int\frac{B}{(x+3)}dx=\int\frac{dx}{(x+2)}-\int\frac{dx}{(x+3)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=x+2;\ du=dx;\ v=x+3;\ dv=dx}$

$$=\int\frac{du}{u}-\int\frac{dv}{v}=ln(u)-ln(v)+C$$

$\boldsymbol{Respuesta: ln(x+2)-ln(x+3)+C}$

$\boldsymbol{72.-Resolver:}\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{2+3x-2x^2}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales:

$$\int\frac{dx}{-2x^2+3x+2}$$
$$=\int\frac{dx}{(-2x-1)(x-2)}$$
$$\frac{1}{(-2x-1)(x-2)}=\frac{A}{(-2x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$$
$$\frac{1}{(-2x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(-2x-1)}{(-2x-1)(x-2)}$$
$$1=A(x-2)+B(-2x-1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow x=2;\ 1=A(2-2)+B(-4-1);\ \boldsymbol{B=-\frac{1}{5}}$$
$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2};\ 1=A\left(-\frac{1}{2}-2\right)+B\left(-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right);\ \boldsymbol{A=-\frac{2}{5}}$$
$$-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{(-2x-1)}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x-2)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = -2x - 1;\ du = -2\ dx; v = x - 2; dv = dx}$

$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{dv}{v}\right) = \frac{1}{5}(ln(u) - ln(v)) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{5}(ln(-2x-1) - ln(x-2))} + C$

$\boldsymbol{73.-Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{dx}{(x+1)(x^2+2x)}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$= \int \frac{dx}{(x+1)x(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x+1)x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

$$\frac{1}{(x+1)x(x+2)} = \frac{A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$1 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\Rightarrow x = -1;\ 1 = A(0)(-1+2) + B(-1)(-1+2) + C(0)$

$\boldsymbol{B = -1}$

$\Rightarrow x = 0;\ 1 = A(0+1)(0+2) + B(0)(0+2) + C(0)(0+1)$

$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow x = -2;\ 1 = A(-2+1)(0) + B(-2)(0) + C(-2)(-2+1)$

$\boldsymbol{C = \frac{1}{2}}$

$$= \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{(x+1)}dx + \int \frac{C}{(x+2)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - 1\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = x + 1;\ du = dx; v = x + 2; dv = dx}$

$$= \frac{1}{2}ln(x) - ln(u) + \frac{1}{2}ln(v) + C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{2}ln(x) - ln(x+1) + \frac{1}{2}ln(x+2) + C}$

$\boldsymbol{74.-Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2 - 2x + 1}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales repetidos:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1) + B}{(x-1)^2}$$

$$x^2 = A(x-1) + B$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\Rightarrow x = 1;\ 1 = A(1-1) + B;\ \boldsymbol{B = 1}$$

$$x^2 = A(x-1) + B;\ x^2 = Ax - A + 1$$

$$A = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)};\ \boldsymbol{A = x + 1}$$

$$= \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}dx = \int \frac{x+1}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x - 1}$; $\boldsymbol{du = dx}$

$$= \int \frac{x-1+2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1}\right)dx + \int \frac{du}{u^2}$$

$$= \int dx + 2\int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^2} = x + 2\,ln(u) + \frac{1}{-u} + c$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{x + 2\,ln(x-1) - \frac{1}{(x-1)} + C}$

$\boldsymbol{75.-Resolver}$: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^4 - 4x^2 + 3}}\boldsymbol{dx}$

Se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos distintos:

$$\int \frac{x}{(x^2-3)(x^2-1)}dx$$

$$\frac{x}{(x^2-3)(x^2-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2-3)} + \frac{Cx+D}{(x^2-1)}$$

$$\frac{x}{(x^2-3)(x^2-1)}=\frac{(Ax+B)(x^2-1)+(Cx+D)\ (x^2-3)}{(x^2-3)(x^2-1)}$$

$x=(Ax+B)(x^2-1)+(Cx+D)(x^2-3)$

$x=(Ax+B)(x^2-1)+C(x^3-3x)+D(x^2-3)$

$\Rightarrow x=1;\ 1=0+C((1)^3-3(1))+D((1)^2-3)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$C+D=-\dfrac{1}{2}$

$x=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(-A-3C)+(-B-3D)$

$A+C=0\ ;\ B+D=0;\ -A-3C=1;\ C+D=-\dfrac{1}{2}$

$\boldsymbol{A=\dfrac{1}{2};\ B=0;\ C=-\dfrac{1}{2};\ D=0}$

$$=\int\frac{Ax+B}{(x^2-3)}dx+\int\frac{Cx+D}{(x^2-1)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x}{(x^2-3)}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x}{(x^2-1)}dx$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=x^2-3;\ du=2x\,dx;\ v=x^2-1;\ dv=2x\,dx}$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{4}\int\frac{dv}{v}=\frac{1}{4}(ln(u)-ln(v))+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\left(ln\left(x^2-3\right)-ln\left(x^2-1\right)\right)+C}$

$\boldsymbol{76.-Resolver}$: $\displaystyle\int\boldsymbol{\frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}dx}$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos distintos:

$$\frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(4x^2+1)}+\frac{Cx+D}{(4x^2+1)^2}$$

$$\frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}=\frac{(Ax+B)(4x^2+1)+Cx+D}{(4x^2+1)^2}$$

$8x^2+8x+2=4Ax^3+Ax+4Bx^2+B+Cx+D$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\boldsymbol{A=0}; 4B=8; \boldsymbol{B=2}; A+C=8; \boldsymbol{C=8}; B+D=2; \boldsymbol{D=0}$

$$=\int\frac{Ax+B}{(4x^2+1)}dx+\int\frac{Cx+D}{(4x^2+1)^2}dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{(4x^2+1)} + 8\int \frac{x}{(4x^2+1)^2}dx =$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = 4x^2 + 1;\ du = 8\,x\,dx}$

$$= 2\int \frac{dx}{(4x^2+1)} + \int \frac{du}{(u)^2} = 2tan^{-1}2x + \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 2tan^{-1}2x - \frac{1}{(4x^2+1)} + C}$$

$$\boldsymbol{77.-Resolver: \int \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$\int \frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)}dt$$

$$\frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{(t^2+1)}$$

$$\frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)} = \frac{A(t^2+1)+t(Bt+C)}{t(t^2+1)}$$

$$3t^2+t+4 = A(t^2+1)+t(Bt+C)$$

$$3t^2+t+4 = At^2+A+Bt^2+Ct$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$A + B = 3;\ \boldsymbol{C = 1};\ \boldsymbol{A = 4};\ \boldsymbol{B = -1}$

$$= \int \frac{A}{t}dt + \int \frac{Bt+C}{(t^2+1)}dt = \int \frac{4}{t}dt + \int \frac{-t+1}{(t^2+1)}dt$$

$$= 4\int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{(t^2+1)}dt + \int \frac{dt}{(t^2+1)}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = t^2 + 1;\ du = 2t\,dt}$

$$= 4\,ln(t) - \frac{1}{2}ln(u) + tan^{-1}t + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: 4\,ln(t) - \frac{1}{2}ln(t^2+1) + tan^{-1}t + C}$$

$$\mathbf{78.-\textit{Resolver}}: \int \frac{\boldsymbol{y^2+2y+1}}{\boldsymbol{(y^2+1)^2}}\boldsymbol{dy}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos repetidos:

$$\frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}=\frac{Ay+B}{(y^2+1)}+\frac{Cy+D}{(y^2+1)^2}$$

$$\frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}=\frac{(Ay+B)(y^2+1)+Cy+D}{(y^2+1)^2}$$

$$y^2+2y+1=Ay^3+Ay+By^2+B+Cy+D$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\boldsymbol{A=0}$; $\boldsymbol{B=1}$; $A+C=2$; $\boldsymbol{C=2}$; $B+D=1$; $\boldsymbol{D=0}$

$$\int\frac{Ay+B}{(y^2+1)}dx+\int\frac{Cy+D}{(y^2+1)^2}dx=\int\frac{dy}{(y^2+1)}+2\int\frac{y}{(y^2+1)^2}dx$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u=y^2+1;\ du=2y\,dy}$

$$=\int\frac{dy}{(y^2+1)}+\int\frac{du}{(u)^2}=tan^{-1}y+\frac{u^{-1}}{-1}+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta: tan^{-1}y-\frac{1}{(y^2+1)}+C}$$

$$\mathbf{79.-\textit{Resolver}}: \int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{(x-1)^3}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales repetidos:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$$

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^2+B(x-1)+C}{(x-1)^3}$$

$$x^2=A(x-1)^2+B(x-1)+C$$

$$x^2=Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C$$

$$x^2=Ax^2+x(-2A+B)+(A-B+C)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{A=1}$; $-2A+B=0$; $\boldsymbol{B=2}$; $A-B+C=0$; $\boldsymbol{C=1}$

$$= \int \frac{A}{(x-1)}dx + \int \frac{B}{(x-1)^2}dx + \int \frac{C}{(x-1)^3}dx$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x - 1;\ du = \ dx}$

$$= \int \frac{du}{u} + 2\int \frac{du}{(u)^2} + \int \frac{du}{(u)^3} = ln(u) + 2\frac{u^{-1}}{-1} + \frac{u^{-2}}{-2} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \boldsymbol{ln(x-1) - \frac{2}{(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C}$$

$$\mathbf{80.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{(y+a)(y+b)}}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$= \int \frac{\frac{1}{(a-b)}}{(y+a)}dy - \int \frac{\frac{1}{(b-a)}}{(y+b)}dy$$

$$1 = \frac{A}{(y+a)} + \frac{B}{(y+b)};\ 1 = A(y+b) + B(y+a)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\boldsymbol{y = -b}$

$1 = B(y+a)$

$1 = B(-b+a)$

$\boldsymbol{B = -\frac{1}{(b-a)}}$

$\boldsymbol{y = -a}$

$1 = A(y+b)$

$1 = A(-a+b)$

$\boldsymbol{A = -\frac{1}{(a-b)}}$

$$= -\frac{1}{(a-b)}\int \frac{dy}{(y+a)} - \frac{1}{(b-a)}\int \frac{dy}{(y+b)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u = (y+a);\ du = dy;\ v = y + b;\ dv = dy}$

$$= -\frac{1}{(a-b)}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{(b-a)}\int \frac{du}{u}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(a-b)}}\mathbf{ln}\boldsymbol{(y+a)} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{(b-a)}}\mathbf{ln}\boldsymbol{(y+b) + C}$$

81.− Resolver: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{5x^2+6x+9}}{\boldsymbol{(x-3)^2(x+1)^2}}\,\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 4 factores lineales:

$$5x^2+6x+9 = \frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x+1)}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

$$5x^2+6x+9 = A(x-3)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-3)^2+D(x-3)^2$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\boldsymbol{x=3}$

$72 = B(16)$

$\frac{72}{16} = B$

$\boldsymbol{B=\frac{9}{2}}$

$\boldsymbol{x=-1}$

$8 = A(16)$

$\frac{8}{16} = A$

$\boldsymbol{A=\frac{1}{2}}$

$$= A(x-3)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-3)^2+D(x-3)^2$$

$$5x^2+6x+9 = (Ax-3A)(x^2+2x+1)+Bx^2+2Bx+B+(Cx+C)(x^2-6x+9)+Dx^2-6Dx+9D$$

$$Ax^3+2Ax^2+Ax-3Ax^2-6Ax-3A+Bx^2+2Bx+B+Cx^3-6Cx^2+9Cx+Cx^2-6Cx+9C+Dx^2-6Dx+9D$$

$A+C=0;\ -A+B-5C+D=5; -5A+2B+3C-6D=6;$
$-3A+B+9C+9D=9$

$$\Rightarrow A+C=0;\ \frac{1}{2}+C=0; \boldsymbol{C}=\ -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow -A+B-5C+D=5; -\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+\frac{5}{2}+D=0; \boldsymbol{D}=-\boldsymbol{\frac{13}{2}}$$

$$\boldsymbol{A=\frac{1}{2}; B=\frac{9}{2}; C=-\frac{1}{2}; D=-\frac{13}{2}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{x-3}dx+\int\frac{\frac{9}{2}}{(x-3)^2}dx-\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx-\int\frac{\frac{13}{2}}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^{\boldsymbol{2}}}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=x-3; du=dx;\ \ v=x+1; dv=dx}$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u}+\frac{9}{2}\int\frac{du}{u^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v}-\frac{13}{2}\int\frac{dv}{\boldsymbol{v^2}}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{1}{2}\ln(x-3) - \frac{9}{2}(x-3)^{-1} - \frac{1}{2}ln(x+1) + \frac{13}{2}(x+1)^{-1} + C$$

$$82.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}dx$$

Solución.-
Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales distintos:

$$x^2 - 5x + 9 = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$x^2 - 5x + 9 = A(x-2) + B(x-3)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\boldsymbol{x = 2}$
$x^2 - 5x + 9 = B(x-3)$
$(2)^2 - 5(2) + 9 = B(2-3)$
$4 - 10 + 9 = B(-1)$
$3 = -B$
$\boldsymbol{B = -3}$

$\boldsymbol{x = 3}$
$x^2 - 5x + 9 = A(x-2)$
$(3)^2 - 5(3) + 9 = A(3-2)$
$9 - 15 + 9 = A(1)$
$\boldsymbol{3 = A}$

$$= 3\int \frac{dx}{(x-3)} - 3\int \frac{dx}{(x-2)}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:
$\boldsymbol{u = x - 3; du = dx \quad : \quad v = x - 2; dv = dx}$

$$= 3\int \frac{du}{u} - 3\int \frac{dv}{v} =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{3\ln(x-3) - 3\ln(x-2) + C}$$

$$83.-\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{x^2 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2}dx$$

Solución.-
Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 5 factores lineales:

$$x^2 - 8x + 7 = \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

$$x^2-8x+7=A(x-5)(x+2)^2+B(x+2)^2+C\,(x+2)(x-5)^2 + D\,(x-5)^2$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\boldsymbol{x=5}$

$x^2-8x+7=B(49)$

$(5)^2-8(5)+7=B(49)$

$25-40+7=B(49)$

$-8=49\,B$

$\boldsymbol{B=-\frac{8}{49}}$

$\boldsymbol{x=-2}$

$x^2-8x+7=D\,(49)$

$(-2)^2-8(-2)+7=D\,(49)$

$4+16+7=D\,(49)$

$\boldsymbol{\frac{27}{49}=A};$

$$x^2-8x+7=(Ax-5A)(x^2+4x+4)+Bx^2+4Bx+4B + (Cx+2C)(x^2-10x+25)+Dx^2-10Dx + 25D$$

$x^2-8x+7=Ax^3+4Ax^2+4Ax-5Ax^2-20Ax-20A+Bx^2+4Bx+4B+Cx^3-10Cx^2+25Cx-2Cx^2-20Cx+50C+Dx^2-10Dx+25D$

$(A+C)x^3;(-A+B-12C+D)X^2;(-16A+4B+5C-10D)x;(-20A+4\text{B}+50\text{C}+25\text{D})$

$A+C=0$

$-A+B-12C+D=1$

$-16A+4B+5C-10D=8$

$-20A+4B+50C+25D=7$

$\boldsymbol{C=-\frac{27}{49};D=\frac{165}{49}}$

$$=\frac{27}{49}\int\frac{dx}{(x-5)}-\frac{8}{49}\int\frac{dx}{(x-5)^2}-\frac{27}{49}\int\frac{dx}{(x+2)}+\frac{165}{49}\int\frac{dx}{(x+2)^2}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=x-5;du=dx}$: $\boldsymbol{v=x+2;dv=dx}$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ \boldsymbol{\frac{27}{49}\ln|x-5|+\frac{8}{49}\left(\frac{1}{(x-5)}\right) -\frac{27}{49}\ln|x+2|-\frac{165}{49}\left(\frac{1}{x+2}\right)+C}$$

$$\mathbf{84.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{ds}}{(\boldsymbol{s}-\mathbf{1})(\boldsymbol{s}+\mathbf{2})(\boldsymbol{s}+\mathbf{3})}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$1 = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+3)}$$

$$1 = A(s+2)(s+3) + B(s-1)(s+3) + C(s-1)(s+2)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{s=-2}$ | $\boldsymbol{s=1}$

$1 = B(s-1)(s+3)$ | $1 = A(s+2)(s+3)$

$1 = B(-2-1)(-2+3)$ | $1 = A(1+2)(1+3)$

$1 = B(-3)(1)$ | $1 = A(3)(4)$

$1 = -3B$ | $1 = 12A$

$\boldsymbol{B} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ | $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$

$\boldsymbol{s=-3}$; $1 = C(s-1)(s+2)$; $1 = C(-3-1)(-3+2)$;

$1 = C(-4)(-1)$; $1 = 4C$; $\boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{(s-1)} ds - \int \frac{\frac{1}{3}}{(s+2)} ds + \int \frac{\frac{1}{4}}{(s+3)} ds$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{ds}{(\boldsymbol{s}-\mathbf{1})} - \frac{1}{3}\int \frac{ds}{(s+2)} + \frac{1}{4}\int \frac{ds}{(s+3)}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{s}-\mathbf{1}) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{In}(\boldsymbol{s}+\mathbf{2}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{In}(\boldsymbol{s}+\mathbf{3}) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{85.-}\boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}}{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se aplica el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}; \boldsymbol{du} = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{dx}$

$$= \int \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}^{\mathbf{1}}} + \boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{86.- \ \textit{Resolver}}: \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales distintos:

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x-4)}$$

$$2x^2+41x-91$$
$$= A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{x=-3}$

$2x^2+41x-91 = B(x-1)(x-4)$

$2(-3)^2+41(-3)-91 = B(-3-1)(-3-4)$

$18-123-91 = B(-4)(-7)$

$-196 = -28B$

$B = \frac{-196}{-28}; \ \boldsymbol{B=7}$

$\boldsymbol{x=1}$

$2x^2+41x-91 = A(x+3)(x-4)$

$2(1)^2+41(1)-91 = A(1+3)(1-4)$

$2+41-91 = A(4)(-3)$

$-48 = -12A$

$A = \frac{-48}{-12}; \boldsymbol{A=4}$

$\boldsymbol{x=4}$

$2x^2+41x-91 = C(x-1)(x+3)$

$2(4)^2+41(4)-91 = C(4-1)(4+3)$

$32+164-91 = C(3)(7)$

$105 = 21C; \ C = \frac{105}{21}; \boldsymbol{C=5}$

$$= \int \frac{4}{(x-1)} + \int \frac{7}{(x+3)} + \int \frac{5}{(x-4)}$$

$$= 4\int \frac{dx}{x-1} + 7\int \frac{dx}{x+3} + 5\int \frac{dx}{x-4}$$

$\boldsymbol{\textit{Respuesta}}$: $\mathbf{4 \ \boldsymbol{ln}(x-1) + 7 \ ln(x+3) + 5 \ ln(x-4) + C}$

87.− Resolver: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{x^3 + x + 1}}{\boldsymbol{x(x^2+1)}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 facto cuadrático:

$$x^3 + x + 1 = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$$

$$x^3 + x + 1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x)$$

$$x^3 + x + 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$x^3 + x + 1 = x^2(A+B) + x(C) + A$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$A + B = 0 \qquad \boldsymbol{C = 1} \qquad \boldsymbol{A = 1}$

$1 + B = 0;\ \boldsymbol{B = -1}$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^2 + 1; du = 2xdx}$

$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + tan^{-1}x$$

***Respuesta*:** $\boldsymbol{\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + tan^{-1}x + C}$

88.− Resolver: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{5x^3 + 2}}{\boldsymbol{x^3 - 5x^2 + 4x}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se descompone la fracción mediante algebra de fracciones:

$$= \int \frac{5x^3 + 2 - 5x^3 + 25x^2 - 20x}{x^3 - 5x^2 + 4x} + 5dx$$

$$= \int 5dx + \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}dx = 5x + \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x(x^2 - 5x + 4)}$$

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores lineales:

$$= 5x + \int \frac{25x^2 - 20x + 2}{x(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4}$$

$$25x^2 - 20x + 2 = A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{x = 0}$

$$25x^2 - 20x + 2 \;=\; A(x-1)(x-4)$$

$25(0)^2 - 20(0) + 2 = A(-1)(-4)$
$0 - 0 + 2 = A(4)$
$2 = 4A$
$A = \frac{2}{4};\ \boldsymbol{A = \frac{1}{2}}$
$\boldsymbol{x = 1}$
$25x^2 - 20x + 2 \ = \ Bx(x-4)$
$25(1)^2 - 20(1) + 2 = B(1-4)$
$25 - 20 + 2 = B(-3)$
$7 = -3\ B$
$B = \frac{-7}{3};\ \boldsymbol{B = -\frac{7}{3}}$
$\boldsymbol{x = 4}$
$25x^2 - 20x + 2 \ = \ Cx(x-1)$
$25(4)^2 - 20(4) + 2 = 4C(4-1)$
$400 - 80 + 2 = 4C(3)$
$322 = 12\ C$
$C = \frac{322}{12};\ \boldsymbol{C = \frac{161}{6}}$
$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}; B = -\frac{7}{3}; C = \frac{161}{6}}$
$= 5x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{161}{6}\int \frac{dx}{x-4}$
$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{5x + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{7}{3}\ln|x-1| + \frac{161}{6}\ln|x-4| + C}$

$\boldsymbol{89. - Resolver}$: $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{x^4}{x^4-1}dx}$

Solución.-
Se descompone la fracción mediante algebra de fracciones:
$$\int \left(\frac{x^4 - x^4 + 1}{x^4 - 1}\right) dx + \int dx$$
Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 2 factores lineales y 1 factor cuadrático:
$$= \int dx + \int \frac{dx}{x^4 - 1} = x + \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$= x + \int \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\boldsymbol{x = 1}$

$1 = A(x+1)(x^2+1)$

$1 = A(2)(2)$

$1 = A(4)$

$1 = 4A;\ \boldsymbol{A = \frac{1}{4}}$

$\boldsymbol{x = -1}$

$1 = B(x-1)(x^2+1)$

$1 = B(-2)(2)$

$1 = B(-4)$

$1 = -4B;\ \boldsymbol{B = -\frac{1}{4}}$

$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$

$$1 = Ax^3 + Ax + Ax^2 + A + Bx^3 + Bx - Bx^2 - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D$$

$A - B - D = 1;\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - D = 1;\ \boldsymbol{D = -\frac{1}{2}}$

$A + B + C = 0;\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + C = 0;\ \boldsymbol{C = 0}$

$\boldsymbol{A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{4}; C = 0; D = -\frac{1}{2}}$

$$= x + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$$

$\boldsymbol{Respuesta: x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C}$

$\boldsymbol{90.- Resolver: \int \frac{dy}{y(y+1)^2}}$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$1=\frac{A}{y}+\frac{By+C}{(y+1)^2}$$
$$1=A(y+1)^2+(By+C)(y)$$
$$1=A(y^2+2y+1)+(By+C)y$$
$$1=Ay^2+2Ay+A+By^2+Cy$$
$$1=y^2(A+B)+y(2A+C)+A$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$A+B=0$	$2A+C=0$	$\boldsymbol{A=1}$
$1+B=0$	$2(1)+C=0$	
$\boldsymbol{B=-1}$	$2+C=0$	
	$\boldsymbol{C=-2}$	

$$=\int\frac{dy}{y}-\int\frac{y}{(y+1)^2}-2\int\frac{dy}{(y+1)^2}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=y+1;\,du=dy;\,y=u-1;\ v=y+1;\,dv=dy}$

$$=\ln(y)-\int\frac{u-1}{u^2}du-2\int\frac{dv}{v^2}$$
$$=\ln(y)-\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{u^2}-2\int v^{-2}dv$$
$$=\ln(y)-\ln(y+1)+\int u^{-2}du+2(y+1)^{-1}$$
$$=\ln(y)-\ln(y+1)-(y+1)^{-1}+2(y+1)^{-1}+C$$
$$=\ln(y)-\ln(y+1)+(y+1)^{-1}+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\ln\left(\frac{y}{y+1}\right)+\frac{1}{y+1}+C}$

$\boldsymbol{91.-\ Resolver}$: $\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{x^3-1}}{\boldsymbol{4x^3-x}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se descompone la fracción mediante algebra de fracciones:

$$\int\frac{x^3-1-x^3+\frac{x}{4}}{x^3-\frac{x}{4}}+\frac{1}{4}\int dx$$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\int\frac{\frac{x}{4}-1}{x^3-\frac{x}{4}}dx=\frac{x}{4}+\int\frac{\frac{x}{4}-1}{x\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}$$

Se descompone el denominador mediante 3 factores lineales:

$$= \int \frac{x}{4} - 1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{C}{(x + \frac{1}{2})}$$

$$\frac{x}{4} - 1 = A\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) + Bx\left(x + \frac{1}{2}\right) + Cx(x - \frac{1}{2})$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$$\boldsymbol{x = 0}$$

$$-1 \; = \; A\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$-1 = A\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{A = 4}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$$

$$-\frac{7}{8} = Bx\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{7}{8} = B\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{B = -\frac{7}{4}}$$

$$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{9}{8} = C\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$$

$$-\frac{9}{8} = C\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)$$

$$\boldsymbol{C = -\frac{9}{4}}$$

$$= \frac{x}{4} + 4\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{4}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} - \frac{9}{4}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

Respuesta: $\boldsymbol{\frac{x}{4} + 4\ln x - \frac{7}{4}\ln\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4}\ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + C}$

92.− *Resolver*: $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{m^3+1}}$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 cuadrático:

$$\int \frac{A}{(m+1)} + \frac{Bm+C}{(m^2-m+1)}$$

$$1 = A(m^2-m+1) + (Bm+C)(m+1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{m=-1}$

$1 = A(1+1+1)$

$1 = 3\,A$

$\boldsymbol{A = \frac{1}{3}}$

$1 = \ Am^2 - Am + A + Bm^2 + Bm + Cm + C$

$m^2(A+B) = 0 \qquad m(-A+B+C) = 0 \qquad (A+C) = 1$

$A + B = 0 \qquad \boldsymbol{C = \frac{2}{3}}$

$\boldsymbol{B = -\frac{1}{3}}$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dm}{m+1} + \int \frac{-\frac{m}{3}+\frac{2}{3}}{m^2-m+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(m+1) + \int \frac{-\frac{m}{3}}{m^2-m+1} + \int \frac{\frac{2}{3}}{m^2-m+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(m+1) - \frac{1}{3}\int \frac{m}{m^2-m+1}\,dm + \frac{2}{3}\int \frac{dm}{m^2-m+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln(m+1) - \frac{1}{3}\int \frac{m}{(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{2}{3}\int \frac{dm}{(m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = m - \frac{1}{2};\ du = dm;\ u + \frac{1}{2} = m}$

$$= \frac{1}{3}\ln(m+1) - \frac{1}{3}\int \frac{u+\frac{1}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du + \frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\ln(m+1)-\frac{1}{3}\left(\int\frac{u\,du}{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}\right)$$
$$+\frac{4}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln(m+1)+\frac{1}{6}\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+\frac{4}{3\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}:\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{ln}(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})$$
$$+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\frac{\mathbf{1}}{\left(\boldsymbol{m}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\mathbf{tan}^{-1}\left(\frac{\mathbf{2}\left(\boldsymbol{m}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right)+\boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{93.}-\boldsymbol{Resolver}:\int\frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 1 factor lineal y 2 factores cuadráticos:

$$\mathbf{1}=\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}+\frac{\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{C}}{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1})}+\frac{\boldsymbol{Dx}+\boldsymbol{E}}{(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}$$

$1=A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+x+1)\ +$
$(Dx+E)(x+1)$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C, D y E:

$\boldsymbol{x}=-\mathbf{1}$

$1=A(1-1+1)$

$\mathbf{1}=\ \boldsymbol{A}$

$1=A(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)+Bx^4+2Bx^3+2Bx^2+Bx+$
$+Cx^3+2Cx^2+2Cx+C+Dx^2+Dx+Ex+E$

$1=Ax^4+2Aax^3+3Ax^2+2Ax+A+Bx^4+2Bx^3+2Bx^2+$
$Bx+Cx^3+2Cx^2+2Cx+C+Dx^2+Dx+Ex+E$

$x^4(A+B)=0;B=-A;\boldsymbol{B}=-\mathbf{1}$

$x^3(2A+2B+C)=0; 2-2+C=0; \boldsymbol{C=0}$
$x^2(3A+2B+2C+D)=0; 3-2+0+D=0; \boldsymbol{D=-1}$
$x(2A+B+2C+D+E)=0$
$A+C+E=1; 1+0+E=1; \boldsymbol{E=0}$
$\boldsymbol{A=1; B=-1; C=0; D=-1; E=0}$

$$=\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1}-\int\frac{x}{(x^2+x+1)^2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u=x^2+x+1; du=2x+1}$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|u|-\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\ln|u|-\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|$$
$$-\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:
$\boldsymbol{u=x+\frac{1}{2}; du=dx}$

$$=\ln|x+1|+\frac{5}{3\sqrt{3}}Tan^{-1}\frac{2u}{\sqrt{3}}+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+C$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\ln|x+1|+\frac{5}{3\sqrt{3}}Tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}}$
$\boldsymbol{+C}$

94.−*Resolver*: $\boldsymbol{\int\frac{9x^2+10x+26}{(2x+3)(x^2+4)}dx}$

Solución.-
Se descompone el denominador mediante 2 factores; 1 factor lineal y 1 factor cuadrático:

$$9x^2+10x+26=\frac{A}{(2x+3)}+\frac{Bx+C}{(x^2+4)}$$
$9x^2+10x+26=A(x^2+4)+(Bx+C)(2x+3)$
$9x^2+10x+26=Ax^2+4A+2Bx^2+3Bx+2Cx+3C$
$9x^2+10x+26=x^2(A+2B)+x(3B+2C)+4A+3C$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B y C:

$\boldsymbol{A+2B=9}$ $\quad (8)\boldsymbol{3B+2C=10}$ $\quad \boldsymbol{4A+3C=26}$

$A=9-2B$ $\quad \frac{(3)-8B+3C=-10}{24B+16C=\ 80}$ $\quad 4(9-2B)+3C=26$

$A=9-2(2)$ $\quad \frac{-24B+9C=-30}{25C=\ 50}$ $\quad 36-8B+3C=26$

$A=9-4$ $\quad C=\frac{50}{25}$ $\quad$ *-8B+3C=26-36*

$\boldsymbol{A=5}$ $\quad \boldsymbol{C=2}$ $\quad \boldsymbol{-8B+3C=-10}$

$-8B+3(2)=-10;\ -8B+6=-10;\ -8B=-10-6;\ B=\dfrac{-16}{-8}$

$\boldsymbol{B=2}$

$$=\int\frac{5}{2x+3}dx+\int\frac{2x+2}{x^2+4}dx=5\int\frac{dx}{2x+3}+\int\frac{2(x+1)}{x^2+4}dx$$

$$=5\int\frac{dx}{2x+3}+2\int\frac{x.dx}{x^2+4}+2\int\frac{dx}{x^2+4}$$

Se realizan los siguientes cambios de variables:

$\boldsymbol{u=2x+3}\quad \boldsymbol{du=2dx};\ \boldsymbol{v=x^2+4};\quad \boldsymbol{dv=2xdx}$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{du}{u}+\frac{2}{2}\int\frac{dv}{v}+2\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}ln(2x+3)+ln(x^2+4)+\ \tan^{-1}\dfrac{x}{2}+C}$

95.$-\boldsymbol{Resolver}$: $\displaystyle\int\frac{\boldsymbol{5x^4+x^3+9x^2+3x-9}}{\boldsymbol{(x^2+2)^2(x-1)}}$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 3 factores; 2 factores cuadráticos y 1 factor lineal:

$$5x^4+x^3+9x^2+3x-9=\frac{Ax+B}{(x^2+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{E}{(x-1)}$$

$=(Ax+B)(x^2+2)(x-1)+(Cx+D)(x-1)+E(x^2+2)^2$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C, D y E:

$\boldsymbol{x=1}$

$5+1+9+3-9=E(1+2)^2$

$9=9\ A;\boldsymbol{E=1}$

$=(Ax^2-Ax+Bx-B)(x^2+2)+Cx^2-Cx+Dx-D+E(x^4+4x^2+4)$

$$=Ax^4+2Ax^2-Ax^3-2Ax+Bx^3+2Bx-Bx^2-2B+Cx^2-Cx+Dx-D+Ex^4+4Ex^2+4E$$

$x^4(A+E)=5; A+1=5; \boldsymbol{A}=\mathbf{4}$

$x^3(-A+B)=1;\ -4+B=1; \boldsymbol{B}=\mathbf{5}$

$x^2(2A-B+C+4E)=9; 8-5+C+4=9; \boldsymbol{C}=\mathbf{2}$

$x(-2A+2B-C+D)=3$

$-2B-D+4E=-9;\ -10-D+4=-9; \boldsymbol{D}=\mathbf{3}$

$$=\int \frac{4x+5}{x^2+2}dx+\int \frac{2x+3}{(x^2+2)^2}dx+\int \frac{dx}{(x-1)}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}; \boldsymbol{du}=\ \mathbf{2}\boldsymbol{xdx}$

$$\int \frac{4x}{x^2+2}dx+5\int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$+\int \frac{2x}{(x^2+2)^2}dx+3\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}+\ln(x-1)$$

$$=2\int \frac{du}{u}+\frac{5}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+\int \frac{du}{u^2}+3\int \frac{dx}{(\sqrt{(x^2+2)^2}}+\ln(x-1)$$

$$=2\ln(u)+\frac{5}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+\left(-\frac{1}{u}\right)+\ln(x-1)+3\int \frac{\sqrt{2}\sec^2(t)}{(\sqrt{2}\sec(t))^4}dt$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \mathbf{2\ln(\boldsymbol{x}^2+2)}$$

$$+\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\mathbf{tan}^{-\mathbf{1}}\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\pm\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}}$$

$$+\mathbf{ln}(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+\frac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}\int \boldsymbol{Cos}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{dt}$$

$\mathbf{96.}-\boldsymbol{Resolver}: \displaystyle\int \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{8}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{4}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{dx}$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores lineales repetidos:

$$x^5+3x^4+2x^3+8x^2+7x+4=\ \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

$x^5+3x^4+2x^3+8x^2+7x+4=\ A(x+2)+B$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$\boldsymbol{x}=-\mathbf{2}$

$-32+48-16+32-14+4=B$

$\boldsymbol{B}=\mathbf{22}$

$x^5+3x^4+2x^3+8x^2+7x+4=\ Ax+2A+B$

$2A+B=4; 2A=\ -22+4; 2A=-18; \boldsymbol{A}=-\mathbf{9}$

$$= -9\int \frac{dx}{x+2} + 22\int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x + 2; du = dx}$

$$= -9\int \frac{du}{u} + 22\int \frac{du}{(u)^2} = \ -9\ln u - 22\frac{1}{u} + C$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\mathbf{9}(\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) - \mathbf{22}\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})} + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{97.} - \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{x^3} + \mathbf{1}}{(\boldsymbol{x^2} - \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^2}\boldsymbol{dx}$$

Solución.-

Se descompone el denominador mediante 2 factores cuadráticos repetidos:

$$x^3 + 1 = \frac{Ax + B}{x^2 - 4x + 5} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$x^3 + 1 = (Ax + B)(x^2 - 4x + 5) + Cx + D$$

$$x^3 + 1 = Ax^3 - 4Ax^2 + 5Ax + Bx^2 - 4Bx + 5B + Cx + D$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$\boldsymbol{A} = \mathbf{1};\ x^2(-4A + B) = 0;\ -4 + B = 0;\ \boldsymbol{B} = \mathbf{4};$

$x(5A - 4B + C) = 0; 5 - 16 + C = 0; \boldsymbol{C} = \mathbf{11};$

$5B + D = 1; 20 + D = 1; \boldsymbol{D} = -\mathbf{19}$

$$= \int \frac{x+4}{x^2 - 4x + 5} + \int \frac{11x - 19}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

Se realiza el siguiente cambio de variable:

$\boldsymbol{u = x^2 - 4x + 5; du = 2x - 4;\ x^2 - 4x + 4 + 1; (x - 2)^2 + 1}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$$

$$+ 6\int \frac{dx}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}} + \mathbf{1}}$$

$$+ \frac{11}{2}\int \frac{2x + 4}{(x^2 - 4x + 5)^2} + 3\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 6\int \frac{du}{u^2 + 1} + \frac{11}{2}\int \frac{du}{u^2} + 3\int \frac{Sec^2 t}{Sec^4 t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u) + 6\tan^{-1}(u) - \frac{11}{2}\left(\frac{1}{u}\right) + 3\int \boldsymbol{Cos^2 t\, dt}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)$$
$$+6\tan^{-1}(x-2)-\frac{11}{2}\frac{1}{x^2-4x+5}$$
$$+3\int Cos^2 t\, dt$$

$$\mathbf{98.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{ds}{s^4-1} =$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 3 factores; 2 factores lineales y 1 factor cuadrático:

$$\int \frac{ds}{(s^2+1)\ (s^2-1)} = \int \frac{ds}{(s^2+1)\ (s+1)(s+1)}$$
$$1 = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$
$$1 = A(s-1)(s^2+1)+B(s+1)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2-1)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A, B, C y D:

$$\boldsymbol{s=-1}$$
$$1 = A(-2)(2);\ 1=-4A;\ \boldsymbol{A} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$
$$\boldsymbol{s=1}$$
$$1 = B(2)(2);\ 1=4B;\ \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$
$$1 = (As-A)(s^2+1)+(Bs+B)(s^2+1)+C\,s^3-Cs+Ds^2-D$$
$$1 = As^3+As-As^2-A+Bs^3+Bs+Bs^2+B+Cs^3-Cs+Ds^2-D$$
$$A+B+C=0;-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+C=0;\ \boldsymbol{C=0}$$
$$-A+B-D=1;\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-D=1;\ \boldsymbol{D}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$
$$=-\frac{1}{4}\int\frac{ds}{s+1}+\frac{1}{4}\int\frac{ds}{s-1}-\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s^2+1}$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ln(s+1)+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\ln(s-1)-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{tan^{-1}s+C}$$

$$\mathbf{99.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{u^2 - a^2}}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales:

$$\int \frac{dt}{(u+a)\ (u-a)};\ 1 = \frac{A}{u+a} + \frac{B}{u-a}$$

$$1 = A\ (u-a) + B(u+a)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\boldsymbol{u = a}$$

$$1 = B\ (2a);\ \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2a}}$$

$$\boldsymbol{u = -a}$$

$$1 = A(-2a);\ \boldsymbol{A} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2a}}$$

$$= -\frac{1}{2a}\int \frac{du}{u+a} + \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u-a}$$

$$= -\frac{1}{2a}\ln(u+a) + \frac{1}{2a}\ln(u-a) + C =$$

$$\boldsymbol{Respuesta}: \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2a}}\mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{u-a}}{\boldsymbol{u+a}}\right) + \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{100.-}\ \boldsymbol{Resolver}: \int \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{a^2 - u^2}}$$

Solución.-

Se aplica factorización y se descompone el denominador mediante 2 factores lineales:

$$\int \frac{dt}{(a+u)\ (a-u)};\ 1 = \frac{A}{a+u} + \frac{B}{a-u}$$

$$1 = A\ (a-u) + B(a+u)$$

Se encuentran los valores de los coeficientes indeterminados A y B:

$$\boldsymbol{u = a}$$

$$1 = B\ (2a);\ \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2a}}$$

$$\boldsymbol{u = -a}$$

$$1 = A(2a);\ \boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2a}}$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{du}{a+u} + \frac{1}{2a}\int \frac{du}{a-u} = \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u+a} - \frac{1}{2a}\int \frac{du}{u-a}$$

$$= \frac{1}{2a}\ln(u+a) - \frac{1}{2a}\ln(u-a) + C =$$

$\boldsymbol{Respuesta}$: $\boldsymbol{\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right) + C}$

6.2EJERCICIOS PROPUESTOS DE FRACCIONES PARCIALES

Utilizando la técnica de integración de fracciones parciales, resuelva las siguientes integrales:

1.- $\int \frac{d\beta}{\beta^3 + 1}$

2.- $\int \frac{\theta}{\theta^2 + 3\theta + 2} d\theta$

3.- $\int \frac{d\gamma}{2\,\gamma + \sqrt{3\gamma + 1}}$

4.- $\int \frac{d\rho}{\rho^2 - 1}$

5.- $\int \frac{5m^2 + 6m + 9}{(m-3)^2(m+1)^2} dm$

Respuestas a los ejercicios propuestos

1: $\frac{1}{3}\ln|\beta + 1| - \frac{1}{6}\ln|\beta^2 - \beta + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} Tan^{-1}\left|\frac{2\beta - 1}{\sqrt{3}}\right| + C$

2: $2\ln|\theta + 2| - \ln|\theta + 1| + C$

3: $\frac{4}{5}\ln\left|\sqrt{3\gamma + 1} + 2\right| + \frac{1}{5}\ln\left|2\sqrt{3\gamma + 1} - 1\right| + C$

4: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\rho - 1}{\rho + 1}\right| + C$

5: $\frac{1}{2} ln(m-3) - \frac{9}{2}(m-3)^{-1} - \frac{1}{2} ln(m+1) + \frac{13}{2}(m+1)^{-1} + C$

ABREVIATURAS

Abreviatura	*Significado*
Sen	*Función trigonométrica seno*
Cos	*Función trigonométrica coseno*
Tan	*Función trigonométrica tangente*
Cot	*Función trigonométrica cotangente*
Sec	*Función trigonométrica secante*
Csc	*Función trigonométrica cosecante*
R	*Números reales*
Et al	*Significa y otros. Se utiliza para hacer las referencias bibliográficas, cuando el número de autores de algún documento sea mayor al estipulado por la norma.*

APÉNDICE A

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$1+\ tan^2 x=\ sec^2 x$

$1+cot^2 x=\ csc^2 x$

$\cot x=\frac{\cos x}{sen\,x}$

$\sec x\ =\frac{1}{cos\,x}$

$sen^2 x+\ cos^2 x=1$

$\tan x=\frac{sen\ x}{\cos x}$

$\cot x=\frac{1}{\tan x}$

$\csc x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$sen\ (x+y)=sen\ x\cos y+\cos x\ sen\ y$

$sen\ (x-y)=sen\ x\cos y-\cos x\ sen\ y$

$cos\ (x+y)=cos\ x\cos y-\operatorname{sen} x\ sen\ y$

$cos\ (x-y)=cos\ x\cos y+\operatorname{sen} x\ sen\ y$

$\tan(x+y)\ =\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$

$\tan(x-y)\ =\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

$sen\ 2x=2\ sen\ x\cos x$

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-tan^2 x}$

$\cos 2x=\ cos^2 x-sen^2 x=1-2\ sen^2 x=2cos^2 x-1$

$2\ sen\ x\cos y=sen\ (x+y)+sen\ (x-y)$

$2\cos x\cos y\ =\cos(x+y)+\cos(x-y)$

$2\cos x\ sen\ y=sen\ (x+y)-sen\ (x-y)$

$2\ sen\ x\ sen\ y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$

APÉNDICE B

DERIVADAS

$D_x\, x^r = rx^{r-1}$

$D_x\, sen\, x = \cos x$

$D_x\, cos\, x = -\operatorname{sen}\ x$

$D_x\, tan\, x = \sec^2\ x$

$D_x \cot x = -\csc^2\ x$

$D_x \sec x\ = \sec\ x \tan x$

$D_x\, csc\, x = -\csc\ x \cot x$

$D_x\, ln\, x = \frac{1}{x}$

$D_x\, log_a\, x = \frac{1}{x \ln a}$

$D_x\, e^x = e^x$

$D_x\, a^x = a^x \ln a$

$D_x sen^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D_x cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D_x tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

$$D_x sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

APÉNDICE C

INTEGRALES ESTÁNDAR

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \quad Integración\ por\ partes$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int sen\,u\,du = -\cos u + C$$

$$\int cos\,u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int sec^2\,u\,du = \tan u + C$$

$$\int csc^2\,u\,du = -\cot\,u + C$$

$$\int \sec u \tan u\ du = \sec\ u + C$$

$$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$$

$$\int \tan u\ du = -\ln\,(\cos \mathrm{u})\ +C$$

$$\int \cot u\ du = \ln\,(\operatorname{sen} \mathrm{u})\ +C$$

$$\int \sec u\ du = \ln\,(\sec \mathrm{u} + \tan u)\ +C$$

$$\int \csc u\ du = -\ln\,(\csc \mathrm{u} - \cot u)\ +C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\,tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2a}\,ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right) + C$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Purcell E., Varberg D. y Rigdon S. (2007). *Cálculo*. Juárez, México: Pearson

Demidovich B., Baranenkou G., Ejtmenko V., Kogan S., Lunts G., Porshneua E., Sichoua E., Frolou S., Shostak R. y Yanpolski A. (2001). 5000 Problemas de análisis matemático. Madrid, España: Paraninfo

Leithold L. (1998). El Cálculo. México DF, México: Mapasa

Casteleiro J., Paniagua R. (2002). Cálculo Integral. Madrid, España: Esic

Guerrero G. (2014). Cálculo Integral. México D.F., México: Patria

Marsden J. y Tromba A. (2004). Cálculo Vectorial. Massachusetts, Estados Unidos: Pearson Addison – Wesley

Larson R. y Falvo D. (2012). Precálculo. México D.F., México: Cengage Learning

Haeussler E. y Richard P. (1992). Matemáticas para administración y economía. México D.F., México: Pearson

Sydsaeter K., Hammond P. y Carvajal A. (2012). Matemáticas para el análisis económico. Madrid España: Pearson

Granville W. (2009).Cálculo Diferencial e Integral. México D.F., México: Limusa

Piskunov N. (2009). Cálculo Diferencial e Integral. México D.F., México: Limusa

Adams R. (2009). Cálculo. Massachusetts, Estados Unidos: Addison – Wesley

Stewart J. (1999). Cálculo Multivariable. México D.F., México: Paraninfo

Espinoza E. (2016). Cálculo Integral. Barcelona, España: Reverte

Rogawski j. (2016). Cálculo: una variable. Barcelona, España: Reverte

Zill D., Warren S., Ibarra J. (2015). Matemáticas 3. Cálculo de varias variables. España: MacGrawHill

UNIVERSIDAD ESTATAL PENÍNSULA DE SANTA ELENA

Paulo César Escandón Panchana

Ingeniero en Sistemas, graduado en la Universidad Estatal Península De Santa Elena (UPSE). Con un postgrado de Magíster en Gerencia y Liderazgo Educacional, en la Universidad Técnica Particular de Loja(UTPL). Experiencia profesional y laboral: Director de Sistemas del Gad Municipal del Cantón Salinas (2 años) y Director Académico del Centro de Capacitación Ocupacional CEC (7 años). Actualmente se desempeña como docente de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la UPSE, en las carreras de Ingeniería en Petróleos e Ingeniería Civil y Coordinador Docente de los programas de vinculación con la colectividad y seguimiento de graduados de la carrera de Ingeniería en Petróleos. Asignaturas impartidas: Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales, Matemática Superior, Análisis Numérico, Programación, Estadísticas para Ingenieros, Análisis Matemático IV e Ingeniería Económica

Editorial UPSE